

1. Mutassa meg, hogy bármely x, y, z pozitív reálakra a

$$K = \frac{4}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} : \frac{1}{x + \frac{1}{y}} - \frac{4}{y(xyz + x + z)}$$

kifejezés értéke független x, y, z értékeitől!

9 pont

2. Az r sugarú körön rajzolunk olyan derékszögű trapézot, amelynek legrövidebb oldala $\frac{3r}{2}$. Mekkora a trapéz terlete?

11 pont

3. Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők:

$$\text{a) } x \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \quad \text{b) } x \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x}; \quad \text{c) } x \mapsto \operatorname{tg} \sqrt{x}.$$

12 pont

4. Oldja meg a racionális számok halmazaiban a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 9^{-1} \cdot 9^{\frac{x}{y}} - 27 \cdot 27^{\frac{y}{x}} = 0 \\ \lg(x-2) - \lg(2-y) = 0 \end{cases}$$

13 pont

5. Három szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Ha a második számhoz hozzáadunk 8-at, akkor egy számtani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Ha ennek a számtani sorozatnak a harmadik eleméhez 64-et adunk, akkor egy új mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik ez a három szám?

13 pont

6. Határozza meg a p paraméter mindazon értékeit, amelyekre az x minden valós reálre

$$\frac{x^2 + 8x + 20}{px^2 + 2(p+1)x + 9p + 4} < 0$$

13 pont

7. Egy egyenes körpárhuzamosan rajzolunk be egy függőleges egyenest, hogy az körpárhuzamosan illeszkedjen a kör alapkörnek skálájára, gombfellelete pedig érintse a kör palástját! A kör felső fele egyenest a függőleges görbületnek a felső részéhez, mint $18 : 5$. Határozza meg a kör nyílsszögét!

14 pont

8. A skálázható $P(x; y)$ pontjához rendelje hozzá a $Q(ax; \frac{y}{a})$ pontot, ahol $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Melyek a skálázható azon $P_1 P_2$ szakaszai, amelyekhez ez a hozzárendelés a velük egyenlő hosszúságú $Q_1 Q_2$ szakaszokat rendel?

15 pont