

Elsőfokú egyenletek...

I. sorozat

1. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right).$$

1967. N 1.

2. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{3x-1}{2x-6} + \frac{5}{2} = \frac{3x+1}{x-3} - 2.$$

1981. G 1.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 3x - 7y = 66; \\ 2x - 9y = -8. \end{cases}$$

Hány százaléka az y érték az x értékének, ha x és y az egyenletrendszer megoldása?

1973. G 1.

4. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 9; az első számjegy fele 3- mal nagyobb a második jegy négyzeténél. Melyik ez a kétjegyű szám?

1982. N 1.

5. Egy 1920 Ft-os porszívó árát kétszer szállították le, mégpedig a második alkalommal kétszer annyi százalékkal, mint az első alkalommal. Hány százalékkal szállították le az árát másodszor, ha utána 1260 Ft lett az ára?

1978. G 2.

6. Egy textilgyár két műhelyében egy hónap alatt 10200 méter vásznat szőttek. Új munkamódszerek bevezetésével az első műhelyben 10%-kal, a másodikban 15%-kal nő a termelés. Így egy hónap alatt a második műhely dolgozói 930 m vászonnal szőnek többet, mint az első műhely dolgozói. Mennyi volt eredetileg a két műhely havi termelése külön-külön?

1970. N 2.

Elsőfokú egyenletek...

II. sorozat

1. Hozza a lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^3 + a^2b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b}.$$

1968. N 1.

2. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}?$$

1983. G 1.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 7x - 8y = -31; \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

1973. N 1.

4. Két szám számtani közepe 25-tel kisebb az egyik számnál, szorzatuk 18-adrésze pedig 12-vel nagyobb a másik számnál. Melyek ezek a számok?

1981. N 2.

5. Egy könyvet háromféle kötésben árúsítanak. Ha a bőrkötéses könyv árát $p\%$ -kal csökkentenék, akkor a vászonkötéses könyv árát kellene fizetni a bőrkötésesért. Ha a vászonkötéses könyv árát csökkentenék $2p\%$ -kal, akkor a papírkötéses könyv árába kerülne a vászonkötéses. Ha viszont a bőrkötéses könyv árát $40,5\%$ -kal csökkentenék, akkor a bőrkötéses ugyanannyiba kerülne, mint a papírkötéses. Hány százaléka a vászonkötéses könyv ára a bőrkötéses könyv árának?

1979. G sz 6.

6. 3150 forintot három munkás között osztanak szét a teljesítményeik arányában. Hány forintot kap egy-egy munkás, ha ugyanolyan munkadarabot $\frac{2}{3}$ perc, 2 perc, illetve 3 perc alatt készítenek el?

1969. N 2.

Elsőfokú egyenletek...

III. sorozat

1. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{3x-2}{3x+1} + \frac{2}{3x-1} = 1 - \frac{1}{9x^2-1}.$$

1979. G 1.

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x^2-x}{x^2-2x+1} = \frac{x^2+1}{1-x^2}.$$

1993. G 1.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 5x - 3y = \frac{x}{2} - 6y; \\ \frac{y}{x+3} = \frac{y+3}{x+4}. \end{cases}$$

1974. G 1.

4. Egy tört nevezője egész szám, és 5-tel nagyobb a tört számlálójánál. Ha a számlálót megszorozzuk 7-tel, és a nevezőből elveszünk 3-at, akkor a tört reciprokát kapjuk. Melyik ez a tört?

1976. G 2.

5. Egységnyi oldalú kis kockákból egy nagyobbat állítunk össze. Ha a rendelkezésünkre álló kis kockákból a lehető legnagyobb kockát rakjuk össze, akkor még 107 kis kockánk marad. Ha azonban eggyel több kis kockát akarunk rakni minden él mentén, akkor még 62 kis kockára lenne szükségünk. Hány darab kis kockánk van?

1988. N 3.

6. Egy üzemben egy termék előállításával 16 munkás foglalkozik; heti termelésük 1680 darab. A heti termelést 20%-kal növelni akarják; ennek érdekében újítások bevezetésével egy termék előállítási idejét 24 percről 17,5 percre csökkentik; a munkások száma azonban 16 főről 14 főre csökken. Teljesíthető-e a megemelt terv változatlan munkaidő alatt, feltételezve, hogy minden munkás azonos teljesítménnyel dolgozik?

1983. G 3.

Elsőfokú egyenletek...

IV. sorozat

1. Oldja meg a következő egyenletet:

$$(x^2 - 1) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 \right) = 8 - 6x.$$

1979. N 1.

2. Mely valós x számok elégítik ki a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1?$$

1995. N 3.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y+1}{y-1}; \\ \frac{1}{x-3} = \frac{2}{y+1}. \end{cases}$$

1974. N 1.

4. Egy tört számlálójának és nevezőjének négyzetösszege 34, a törtnek és reciprokanak összege $\frac{34}{15}$. Melyik ez a tört?

1978. N 1.

5. Egy 60 km/óra egyenletes sebességgel haladó személygépkocsi 8 óra 40 perckor érkezik céljához, míg egy 40 km/óra egyenletes sebességgel haladó tehergépkocsi ugyanazon az útvonalon 9 óra 5 perckor fut be a közös célba. Hány km-rel a cél előtt előzte meg a személyautó a teherautót?

1966. N 2.

6. Bizonyos munkát két munkás együtt dolgozva 6 nap alatt végez el. Ha az egyik egyedül 10 nap alatt készül el a munkával, hány nap alatt végzi el a másik egyedül? Hány nap alatt készül el a két munkás együtt dolgozva a munka $\frac{3}{8}$ -ad részével?

1971. N 2.

Geometria IX.

I. sorozat

1. Egy kör sugara 10 egység, a kör C pontjához húzható érintő a kör CB húrával 30° -os szöget zár be. Számítsa ki az ABC háromszög kerületét és területét, ha az AC oldal a kör egyik átmérője!
1989. N 1.
2. Egy trapéz egyik alapján fekvő felső szögek 30° -osak, a másik három oldal mindegyike 12 egység. Mekkora a területe?
1972. N 1.
3. Az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében vegyünk fel a C' pontot úgy, hogy az ABC' háromszög egyenlő szárú derékszögű legyen! Milyen távol van a C' pont a C -től és a BC oldaltól, ha $AB = 10$?
1977. G 1.
4. Egy síkságon két torony áll egymástól 60 m távolságra. Az egyik magassága 50 m, a másiké 40 m. A két torony alapját összekötő szakaszon a tornyok csúcsától egyenlő távolságra van egy kút. Milyen messze van a kút a két torony alapjától?
1978. G 1.
5. Egy 5 cm széles és 50 cm hosszú szalagból maximális számú 2,5 cm sugarú körlemezt vágunk ki. Mekkora a hulladék, és hány százaléka ez a lemez területének?
1969. N 1.
6. Egy derékszögű háromszög befogóinak a hossza 3 és $3\sqrt{3}$ egység. Mekkora a kerülete és a területe annak a körszeletnek, amelyet a háromszög kisebbik befogója a háromszög köré írt körből levág? (A körszelet kisebb a félkörnél.)
1990. N 1.
7. A szimmetrikus trapéz 10 egység hosszú átlója 45° -os szöget zár be a hosszabbik párhuzamos oldallal. Mekkora a trapéz területe?
1983. G 2.
8. Az ABC háromszög BC oldalának egyik belső pontja D . Az AB oldal B -n túli meghosszabbításán felvesszük a P pontot úgy, hogy $BP = BD$ legyen. Bizonyítsa be, hogy a PD egyenes akkor és csak akkor merőleges az AC -re, ha a CAB szög egyenlő a BCA szöggel!
1985. N g 6.

Geometria IX.

II. sorozat

1. Egy rombusz egyik szöge feleakkora, mint a másik szöge, a hosszabbik átlója 12 egység. Számítsa ki a rombusz szögeit, oldalait, másik átlóját és területét!

1974. G 2.

2. Az $ABCD$ trapéz AB alapján az A csúcsnál 60° -os szög van, B -nél pedig derékszög; a trapéz AB -vel párhuzamos oldala 4, magassága pedig $2\sqrt{3}$. Határozza meg a trapéz hosszabbik átlóját, kerületét és területét!

1973. G 2.

3. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

$$\text{a) } \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{b) } 32(8^{-\frac{5}{3}}) + 81^{0,75}; \quad \text{c) } \sin 990^\circ + \operatorname{tg}(-225^\circ).$$

1980. G 3.

4. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsánál lévő szög 30° -os. Szerkesszünk a BC és CD oldalak fölé kifelé BCX , illetve CDY szabályos háromszögeket. Számítsa ki az AXY háromszög oldalait, ha $AB = 11,5$ és $BC = 8\sqrt{3}$.

1996. N 2.

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög BC alapja 40 egység, az alaphoz tartozó magasság 15 egység. Az alap F felezőpontjából a szárakra állított merőlegesek talppontjai P és Q . Mekkora az $APFQ$ négyszög kerülete és területe?

1991. N 3.

6. Egy téglalap oldalaira mint átmérőkre rajzoljon olyan félköröket, amelyek a téglalapon kívül vannak. Igaz-e az az állítás, hogy a téglalap köré írt kör és a négy félkör határolta – 4 db „holdacska” alakú – síkrész területösszege a téglalap területével egyenlő?

1971. N 4.

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság nem nagyobb az átfogó felénél!

1968. N 3.

8. Egy konvex négyszög átlóinak hossza 1, illetve 2 egység. A négyszög szemközti oldalfelezőpontjait összekötő szakaszok hossza egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra, és számítsa ki a négyszög területét!

1983. N sz 6.

Geometria IX.

III. sorozat

1. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög szögfelezőjének hossza 10. Ez a szögfelező a szemközti befogóval 60° -os szöget zár be. Számítsa ki a háromszög hegyesszögeit és oldalait! Mekkora területű részekre bontja ez a szögfelező az adott háromszöget?
1976. G 1.
2. Egy paralelogramma két oldalának hosszúsága 21 cm, illetve 24 cm, és egyik szöge 60° . Határozza meg annak a négyszögnek a területét, amelyiknek csúcspontjai a paralelogramma oldalfelező pontjai!
1967. N 2.
4. Az e és f egyenesek párhuzamosak, távolságuk 10. Köztük két egyenlő sugarú és egymást érintő kör helyezkedik el úgy, hogy az egyik kör az e egyenest, a másik f -et érinti. A körök középpontjából a párhuzamosokra állított merőlegesek egymástól mért távolsága 4. Mekkora a körök sugara?
1977. N 3.
5. Mekkora az r sugarú kör köré rajzolható egyenlő oldalú háromszög és a körbe írható szabályos hatszög területének aránya?
1966. N 3.
6. Legyen AB egy egységsugarú kör egyik átmérője, C pedig a körhöz az A pontban húzható érintőnek olyan pontja, hogy az AC szakasz hossza $2\sqrt{3}$. Számítsa ki az ABC háromszög és a kör közös részének területét!
1988. N 2.
7. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2a$ és $BC = a$. Az AB és AD oldalak mint átmérők fölé köröket rajzolunk; ezeknek a téglalap belsejébe eső metszéspontja M . Mutassa meg, hogy M a BD átlón van! Mekkora az MA , MB és MD szakaszok hossza?
1988. G B 6.
8. Az ABC háromszögben a C csúsnál derékszög van. Az A -ból induló szögfelező a BC befogót a D pontban, a C -ből induló magasságot az F pontban metszi. Az F ponton átmenő, CB -vel párhuzamos egyenes AB -t a G pontban metszi. Igazolja, hogy a $CFGD$ négyszög rombusz!
1978. N 6.

Geometria IX.

IV. sorozat

1. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 30° , az átfogóhoz tartozó magassága $4\sqrt{\frac{2}{3}}$. Számítsa ki a háromszög oldalait és területét!
1973. N 2.
2. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldala és BD átlója merőlegesen egymásra; $AB = BD = 10$. Számítsa ki a paralelogramma területét, szögeit, AD oldalának és AC átlójának a hosszát!
1974. N 2.
3. Egy háromszög egyik szöge egyenlő a másik két szög összegével. A háromszög köré írható kör sugara 6, a legkisebb oldalra rajzolt négyzet területe egyenlő a háromszög területével. Számítsa ki a háromszög területét!
1988. G 4.
4. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2BC = 2a$. Az A és B csúcs mint középpont körül egy-egy a sugarú negyedkört rajzolunk, amelyeknek határoló sugarai a téglalap oldalaira esnek. Számítsa ki annak a k körnek a sugarát, amely érinti a CD oldalt és a két negyedkört! A k kör területe hány százaléka azon síkidom területének, amelyet a CD szakasz, valamint a DE és EC körívek határolnak?
1982. G 2.
5. Az $ABCD$ deltoidban $AB = BC = 2$, $CD = DA$; a B csúcsnál 120° -os, a D csúcsnál pedig 60° -os szög van. Számítsa ki a deltoid ismeretlen szögeit, oldalait, átlóit, valamint a beírt kör sugarát!
1982. N 2.
6. Az a oldalú szabályos háromszög minden oldala mint átmérő fölé kört rajzolunk. Mekkora e három kör közös részének területe?
1975. G 6.
7. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AD és BC . A trapéz BC oldala mint átmérő fölé kört rajzolunk. Ez a kör érinti a trapéz AD oldalát és felezi mindkét átlót. Számítsa ki a trapéz szögeit!
1990. G 5.
8. Legyen P az ABC háromszög AB oldalának tetszőleges belső pontja. A P ponton átmenő és a C -ből induló súlyvonallal párhuzamos egyenes az AC egyenest az M , a CB egyenest az N pontban metszi. Igazolja, hogy a $PN + PM$ összeg állandó!
1971. N 5.

Geometria X.

I. sorozat

1. Két egymást kívülről érintő kör középpontjának távolsága 4 cm. A körök területének összege $\frac{80\pi}{9}$ cm². Mekkora a körök sugara?
1995. N 1.
3. Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra. Párhuzamos oldalainak hossza 17 és 34, egyik szára $\sqrt{964}$. Mekkora a trapéz másik szára, területe és magassága?
1995. G 4.
4. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 120°-os, beírt körének sugara 3. Mekkora a háromszög oldalai?
1984. N 2.
5. Az $ABCD$ téglalap AB oldalegyenesén vegyünk fel egy M pontot! Az A ponton át a DM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes a CM egyenest az N pontban metszi. Mekkora távolságra van N az AB egyenestől, ha $AM = 6$; $MB = 4$ és $BC = 3$?
1980. G 4.
6. Az $ABCD$ téglalap D csúcsán átmenő és az AC átlóra merőleges egyenes az AB szakaszt az E pontban metszi. Az AE szakasz hossza $\frac{9}{2}$ egység, a téglalap területe 48 területegység. Számítsa ki a téglalap oldalainak hosszát és átlóinak szögét!
1993. N 2.
8. Legyen p és q két adott pozitív szám, és $p > q$. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek oldalai

$$a = \sqrt{pq}; \quad b = \frac{1}{2}(p - q); \quad c = \frac{1}{2}(p + q).$$

Vizsgálja meg, hogy ez a háromszög p és q mely értékei mellett

a) derékszögű; b) egyenlő szárú!

1983. G g 7.

Geometria X.

II. sorozat

1. Egy szimmetrikus trapéz oldalai 20 és 10, területe 180. Mekkora a trapéz magassága, szára, átlója és hegyesszöge?
1976. N 1.
2. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB ; BC ; CD és DA oldalán rendre vegye fel az E ; F ; G ; H pontokat úgy, hogy $AE = \frac{1}{2}$, $BF = \frac{1}{3}$, $CG = \frac{2}{3}$ és $DH = \frac{1}{2}$ legyen. Számítsa ki az $EFGH$ négyszög szögeit, kerületét, területét!
1992. N 2.
3. Két koncentrikus kör középpontjától 15 egységre lévő szelő a kisebb körből akkora húrt metsz ki, amelyik $\frac{2}{5}$ része a nagyobb körből kimetszett húrnak. Mekkora a két kör sugara, ha az egyik 8 egységgel nagyobb, mint a másik?
1993. G 3.
4. Egy háromszög oldalainak hossza 13; 14, illetve 15 egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja a háromszög leghosszabb oldalán van, és a kör érinti a háromszög másik két oldalát?
1983. G 4.
6. Egy téglalapba konvex négyszöget írunk. A téglalap kerületén végighaladva a beírt négyszög csúcsai a téglalap egyes oldalait rendre azonos arányban osztják. Mekkora ez az arány, ha a beírt négyszög területének és a téglalap területének az aránya 5:8?
1968. N 5.
7. Egy 120° -os szög csúcsa köré egységkört rajzolunk. Számítsa ki annak az egységkört belülről érintő körnek a sugarát, amely a szög szarait érinti!
1970. N 6.
8. Jelölje a ; b és c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} < \frac{1}{2}.$$

1991. N 8.

Geometria X.

III. sorozat

1. Egy 9 sugarú körbe írjunk két különböző sugarú kört úgy, hogy egymást kívülről, az adott kört pedig egy átmérőjének két végpontjában belülről érintsék! Mekkora a beírt körök sugara, ha az adott kör belsejének a beírt körökön kívül fekvő része 28π területű?
1979. N 3.
2. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2,4BC$. A téglalapot az A csúcsból mint középpontból úgy nagyítjuk, hogy az új téglalap területe az eredetinek $\frac{9}{4}$ -szerese legyen. A nagyítás következtében a téglalap átlója 13 egységgel hosszabbodik. Mekkora az $ABCD$ téglalap oldalai?
1986. N 4.
3. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 40, szárainak hossza 29. Mekkora a háromszög súlypontjának az oldalaktól mért távolsága?
1981. G 2.
4. Az A csúcsánál derékszögű ABC háromszög egyik szöge 30° -os, az A csúcspon a beírható kör középpontjától $2\sqrt{2}$ távolságra van. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?
1986. G 3.
5. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 8, szárjai 12 egység hosszúak. A szárak metszéspontjától milyen távol kell elmetzeni a háromszöget az alappal párhuzamosan, hogy a keletkezett trapéz kerülete 20 egység legyen?
1983. N 2.
6. Egy 10 egység oldalú $ABCD$ négyzet minden csúcsát kösse össze a csúcsot nem tartalmazó két oldal felezőpontjával. E nyolc szakasz mindegyikén 4-4 belső metszéspont keletkezett. Ezen metszéspontok közül a 2-2 középső (a $P; Q; R; S; T; U; V; X$ pontok) egy nyolcszöget határoznak meg. Mekkora ennek a nyolcszögnek a területe?
1989. N 5.
8. Az R és r sugarú kör a C pontban kívülről érinti egymást. A körök egyik külső érintője az egyik kört az A , a másik kört a B pontban érinti. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög derékszögű! Fejezze ki az ABC háromszög területét a körök sugarával!
1984. N g 6.

Geometria X.

IV. sorozat

1. Egy 10 sugarú körbe olyan egyenlő szárú háromszöget írunk, amelynek szárai 45° -os szöget zárnak be egymással. Mekkora sugarú kör írható a háromszögbe?
1978. N 2.
2. Az $ABCD$ négyzet AB oldalát hosszabbítsuk meg B -n túl 7 egységgel, így egy P pontot kapunk, amely D -től 13 egységre van. Számítsa ki a négyzet oldalainak hosszát, a PC távolságot és a DPA szöget!
1975. N 2.
3. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD , mégpedig AB hosszabb CD -nél és $CD=3$ egység. A trapéz szárai egyenlő hosszúságúak, és az AC átló merőleges a BC szára. Az AB oldalhoz tartozó magasság 2 egység. Számítsa ki az AB oldal hosszát és a trapéz szögeit!
1992. G 3.
4. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldala 16, a hozzá tartozó magasság 12. A háromszögbe olyan egyenlő szárú derékszögű háromszöget írunk, amelynek átfogója párhuzamos AB -vel, derékszögű csúcsa AB -n, másik két csúcsa pedig AC -n, illetve BC -n van. Mekkora a beírt háromszög oldalai?
1987. N 4.
5. Egy $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai: $AB = 10$ és $CD = 6$. Az EF szakasz párhuzamos AB -vel, és a trapézt úgy vágja ketté, hogy az $ABFE$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területének harmada. Milyen hosszú az EF szakasz?
1985. N 5.
6. Egy rombusz átlóinak hossza $2a$, illetve $2b$. A rombuszba írt körnek a rombusz átlóival párhuzamos érintői és a rombusz oldalai egy nyolcszöget határoznak meg. Fejezze ki ennek a területét a -val és b -vel!
1969. N 7.
7. Egy körbe írt trapéz magassága 8, a szára a kör középpontjából 60° -os szögben látszik. Mekkora a trapéz területe?
1986. G sz 6.
8. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges háromszög esetén a háromszög oldalegyeneseit kívülről érintő kör középpontját a háromszögbe írt kör középpontjával összekötő szakasz felezőpontja a háromszög köré írt körön van!
1987. N g 8.

Geometria X.

V. sorozat

2. A P pont az $ABCD$ négyzet síkjában, az AC egyenesnek D -vel megegyező oldalán van; $AP = CP = 10$, $DP = 6\sqrt{2}$. A négyzet oldala nem nagyobb 3-nál. Igazolja, hogy a P pont a négyzeten kívül van, és számítsa ki a négyzet területét!

1982. N g 6.

3. Két kör sugara 5 és 2, közös külsőérintő-szakaszuk másfélszer akkora, mint a közös belsőérintő-szakasz. Milyen távol van egymástól a két kör középpontja?

1977. G 4.

4. Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögben kijelölt P pontnak a befogóktól mért távolsága u , illetve v . Mekkora P távolsága az átfogótól?

1969. N 3.

5. Egy kör középpontjától 10 egység távolságra lévő pontból érintőket húzunk a körhöz. Mekkora a kör sugara, ha az érintési pontokat összekötő húr hossza 9,6 egység?

1974. N 4.

6. Valamelyik kör köré írt egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b ; a nem párhuzamos oldalak a kört az M , illetve N pontban érintik. Fejezze ki az MN távolságot az adatokkal!

1967. N 6.

8. Egy kör két merőleges húrja a és b , illetve c és d hosszúságú darabokra vágja szét egymást. Mekkora a kör sugara, ha

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 20?$$

1983. N g 7.

Geometria X.

VI. sorozat

1. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 36, szárainak hossza 30. Mekkora a háromszög súlypontjának a háromszög köré írt kör középpontjától mért távolsága?
1987. G 3.
2. Egy $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalainak hossza $AB=20$ és $CD=10$; továbbá $BC = AD$ és a trapéz átlói merőlegesek egymásra. Mekkora a trapéz szögei és a másik két oldala?
1994. G 2.
3. Az $ABCD$ négyzet AB oldalegyenesének egy P pontjától a C és D csúcsok távolsága $\sqrt{13}$, illetve $\sqrt{10}$. Mekkora a négyzet oldala?
1982. G g 7.
4. Egy derékszögű szögtartomány belsejében lévő P pontnak a száráktól mért távolsága 4 és 5. Mekkora annak a 40 egységnyi területű derékszögű háromszögnek az oldalai, amelyet egy, a P ponton átmenő szelő metsz le a derékszögű szögtartományból?
1984. G 5.
5. Egy 8 sugarú körbe írjunk $ABCD$ trapézt úgy, hogy a párhuzamos oldalak a kör O középpontjának ugyanazon az oldalán legyenek! A rövidebbik párhuzamos oldal C és D végpontjában a körhöz húzott érintők metszéspontja M , az OC sugár és az AB oldal metszéspontja E . Számítsa ki a párhuzamos oldalak hosszát, ha

$$OM = 10 \quad \text{és} \quad OE : EC = 1 : 3.$$

1985. G 5.

6. Egy trapézt a két átlója négy háromszögre bont. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe T és t területegység. Fejezze ki a trapéz területét T és t segítségével!
1975. N 7.
7. Két, egymást érintő kör sugara 4, illetve 9 egység; egyik közös külső érintőjük a két kört az E , illetve F pontban érinti. Számítsa ki annak a körnek a sugarát, amely érinti a két adott kört és az E és F között a közös érintőt!
1982. N sz 6.
8. Az AB átmérőjű félkörbe egy $ABCD$ négyszöget írunk úgy, hogy a C és D csúcsok a félköríven vannak. Legyen P a CD oldal tetszőleges belső pontja, Q pedig a P merőleges vetülete az AB átmérőn. Bizonyítsa be, hogy

$$AQ \cdot QB - CP \cdot PD = PQ^2!$$

1981. G g 7.

Geometria X.

VII. sorozat

2. Egy rombusz oldalának hossza az átlók hosszának mértani közepe. Hányszorosa a hosszabb átló a rövidebb átlónak?
1976. N 5.
3. Egy kör köré írt szimmetrikus trapéz két csúcsának a kör középpontjától mért távolsága 3, illetve 4. Mekkora a trapéz oldalai?
1982. G sz 7.
5. Egy $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai: $AD = 16$ és $BC = 9$. A BC oldal meghosszabbításán van egy olyan M pont, amelyre $CM = 3,2$. Milyen arányban osztja a trapéz területét az AM egyenes?
1982. G g 6.
6. Az ABC háromszög területe 48. Jelöljük az AB oldal felezőpontját C_1 -gyel, az AC felezőpontját B_1 -gyel, a BB_1 szakasz felezőpontját D -vel, a CC_1 -ét E -vel. Mekkora a $BDEC$ síkidom területe?
1979. G sz 7.
8. A hegyesszögű ABC háromszög mindegyik magasságvonala mint átmérő fölé rajzoljon félkört, s mindegyik félkört messe el a háromszög M magasságpontján átmenő és a félkör átmérőjére merőleges egyenessel; a metszéspontok legyenek P ; Q ; R . Bizonyítsa be, hogy az MP ; MQ ; MR szakaszok egyenlők!
1976. N 8.

Geometria X.

VIII. sorozat

1. Egyenlő szárú háromszögbe négyzetet írunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala a háromszög alapján, egy-egy csúcsa pedig a háromszög szárain legyen. A négyzet területe a háromszög területének $\frac{4}{9}$ része. Számítsa ki a háromszög szögeit!
1980. N sz 7.
2. Egy téglalap oldalai 37 és 23. Mindegyik csúcsánál levágunk belőle egy-egy, egymással egybevágó háromszöget úgy, hogy a megmaradó nyolcszög egyenlő oldalú legyen, és szimmetrikus legyen a téglalap szimmetriatengelyeire. Mekkora a nyolcszög oldala, területe, mekkorák a szögei?
1980. N 4.
3. Az $ABCD$ téglalap AB oldala háromszorosa a BC oldalnak. Egy belső P pont távolsága a B ; A ; D csúcsoktól rendre $PB = 4\sqrt{2}$; $PA = \sqrt{2}$; $PD = 2$. Mekkora a téglalap területe?
1987. N g 7.
4. Legyen a derékszögű háromszög átfogója 10 cm, a derékszög szögfelezője pedig $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ cm hosszúságú. Mekkorák a befogók?
1966. N 6.
5. Az ABC háromszög oldalai: $AB = 9$, $AC = 15$ és $BC = 8$. Mekkora távolságra jelöljük ki a C csúctól az AC oldalon a P , a BC oldalon a Q pontot, ha azt akarjuk, hogy ezeket egy egyenesszakasszal összekötve a keletkezett CPQ háromszögnek és az $ABQP$ négyszögnek egyenlő legyen a kerülete, és a területük is egyenlő legyen?
1981. G sz 6.
6. Jelölje K az ABC háromszög AB oldalának A -hoz közelebbi harmadolópontját, L a BC oldal B -hez közelebbi harmadolópontját, Q pedig az AL és CK szakaszok metszéspontját. Hányadrésze az ABC háromszög területének az AQB és BQC háromszög területe, és milyen arányban osztja a Q pont az AL , illetve a CK szakaszt?
1995. N 8.
7. Az r sugarú AOB negyedkörben az OA és OB sugarak mint átmérők fölé egy-egy félkört rajzolunk. Számítsa ki annak a körnek a sugarát, amely ezt a két félkört és az AOB negyedkört is érinti!
1980. G sz 7.
8. Legyen P és Q az ABC háromszög AB , illetve AC oldalán lévő két belső pont úgy, hogy $BP = CQ$. Jelölje a BC oldal felezőpontját E , a PQ szakasz felezőpontját F . Igazolja, hogy az EF egyenes párhuzamos az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelezőjével!
1992. N 8.

Másodfokú egyenletek...

I. sorozat

1. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{x+3}{x-4} + \frac{22}{x^2-16} = \frac{7x+6}{x+4} - \frac{3}{x-4}.$$

1980. N 1.

2. Oldja meg a valósszám-párok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} xy + y^2 = 55; \\ 2x + y = 17. \end{cases}$$

1984. N 1.

3. Mely valós x, y számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}; \\ x^2 + y^2 = 1? \end{cases}$$

1995. G 1.

4. Melyek azok az x valós számok, amelyekre a

$$\frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$$

kifejezés értéke legalább 1 és legfeljebb 3?

1981. G sz 7.

5. Határozza meg az m paraméter értékét úgy, hogy az

$$(m+2)x^2 + (2m+3)x - 2 = 0$$

egyenletnek két különböző, (-1) -nél kisebb valós gyöke legyen!

1983. G sz 7.

6. Határozza meg az

$$x \mapsto f(x) = |x-1| + |x^2 - 6x + 8| \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény legkisebb helyettesítési értékét!

1995. G 7.

7. A p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - p^2x + pq = 0$ egyenlet gyökei is valósak, mégpedig az utóbbi egyenlet gyökei eggyel nagyobbak az előbbi egyenlet gyökeinél. Számítsa ki p és q értékét!

1982. N g 7.

8. Bizonyítsa be, hogy ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletben a két gyök négyzetének különbsége $\frac{c^2}{a^2}$ -tel egyenlő, akkor $b^4 - c^4 = 4ab^2c$!

1987. N sz 6.

Másodfokú egyenletek...

II. sorozat

1. Mely valós x számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$\frac{x}{3x-1} - \frac{x^2+1}{9x^2-1} = \frac{x+1}{9x+3}?$$

1994. G 1.

2. Mely valósszám-párok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x(x+4) = 3y(x-1); \\ 2y+x = 10? \end{cases}$$

1983. N 1.

3. Oldja meg a valósszám-párok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{2}{y} = \frac{1}{(x-3)y}; \\ y^2 - 4(y-x) = 9. \end{cases}$$

1993. N 1.

4. Az m paraméter mely értékeire lesz az $(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x + 1$ polinom értéke minden x -re pozitív?

1976. G 7.

5. Melyek azok a b valós számok, amelyekre az

$$x^2 + bx + b^2 - 1 = 0$$

egyenletnek van olyan x_0 gyöke, hogy teljesül a $-1 \leq x_0 \leq 1$ feltétel?

1978. N 8.

6. Határozza meg a p paraméternek mindazokat az értékeit, amelyekkel a

$$4x^2 - 4px + (p^2 - 2p + 2)$$

polinom legkisebb értéke a $[0; 2]$ számközben 3.

1983. N g 8.

7. Jelölje x_1 és x_2 az $x^2 - a^2x + ab = 0$ egyenlet gyökeit, x_3 és x_4 pedig az $x^2 + ax + b = 0$ egyenlet gyökeit. Határozza meg az összes olyan a, b valósszám-párt, amelyre egyidejűleg teljesülnek a következő feltételek:

I. $x_1 - x_3 = 1$ és $x_2 - x_4 = 1$;

II. x_1, x_2, x_3, x_4 olyan valós számok, hogy $x_1 \geq x_2$ és $x_3 \geq x_4$.

A feltételeknek megfelelő minden a, b valósszám-párhoz adja meg a hozzá tartozó x_1, x_2, x_3, x_4 gyököket is.

1993. G 8.

8. Az x, y, z valós számok megoldásai az

$$\begin{aligned} x + y + z &= v, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{v} \end{aligned}$$

egyenleteknek. Bizonyítsa be, hogy az x, y, z számok közül az egyik v -vel egyenlő!

1972. N 8.

Másodfokú egyenletek...

III. sorozat

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2 + 3x + |x + 3| = 0.$$

1990. G 1.

2. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x^2 - y = 46; \\ x^2 y = 147. \end{cases}$$

1980. G 2.

3. Mely valósszám-párok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - 2y = 1; \\ -2x + \frac{3}{y} = 3? \end{cases}$$

1996. G 1.

4. Az a valós paraméter mely értékeire lesz a következő egyenlőtlenségrendszernek egy valósszám-pár a megoldása, és ezekre az értékekre mi az egyetlen megoldás?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

1996. G 5.

5. A p valós paraméter mely értékeire van megoldása az

$$1 + \frac{x}{x-p} = \frac{2p}{x+p} + \frac{2x^2 - 4x + 9p^2}{x^2 - p^2}$$

egyenletnek? Milyen p értékekre lesz az egyenlet gyöke p -nél kisebb?

1990. N 7.

6. Állapítsa meg, hogy az m (valós) paraméter mely értékeire lesznek a

$$2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$$

egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre az $x_1 + x_2 + 3x_1x_2$ kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökeit jelentik!

1980. N g 7.

7. Az m paraméter mely értékeire lesznek az alábbi egyenletrendszer valós x és y gyökei ellenkező előjelűek:

$$\begin{cases} 2(m+2)x - (m+1)y = m; \\ m^2(x-y) = 4x - y? \end{cases}$$

1984. N sz 8.

8. Igazolja, hogy a p valós paraméter tetszőleges értékénél pontosan egy valós gyöke van a következő egyenletnek:

$$x|x + 2p| = p.$$

1991. N 7.

Másodfokú egyenletek...

IV. sorozat

1. Mely valós x számok elégítik ki a következő két egyenletet:

$$\text{a) } \frac{9^x}{4^x} + \frac{4^x}{9^x} = \frac{13}{6}; \quad \text{b) } \frac{2x^2 + 4}{3x + 2} + \frac{3x + 2}{2x^2 + 4} = \frac{13}{6}?$$

1996. G 3.

2. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$|x^2 + 3x - 4| + 3x + 9 = 0?$$

1983. G 5.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{5}{2}; \\ xy = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

1987. N 2.

4. Hogyan kell megválasztani az $x^2 + px + q$ polinomban p és q értékét, ha azt akarjuk, hogy ezt a polinomot egy alkalmasan választott másodfokú polinommal szorozva az $x^4 + 1$ polinomot kapjuk?

1986. N g 7.

5. Mely valósszám-hármasok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2xy = z^2 + 4. \end{cases}$$

1991. G 7.

6. Mekkora kell választani az m (valós) paraméter értékét ahhoz, hogy az

$$x^2 - (5m + 3)x + 6m^2 + 5m - 4 = 0$$

egyenlet gyökei a $[-2; 5]$ zárt intervallumba essenek, és a gyökök négyzetének összege

a) minimális,

b) maximális

legyen?

1980. N sz 8.

7. Milyen határok között mozog a $p + q$ összeg értéke, ha p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek valós gyökei vannak, és az egyenlet gyökeire fennáll az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ összefüggés?

1992. G 8.

8. Igazolja, hogy ha $a < b < c$ valós számok, akkor az

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke van!

1982. G g 8.

Gykvons

I. sorozat

1. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{2} = 4.$$

1977. N 1.

2. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok körében:

$$\text{a) } \sqrt{8-x^2} = -x; \quad \text{b) } \sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{c) } \lg(x^2-1) = \lg(x+1) + \lg(x-1).$$

1974. G 3.

3. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } x - 3\sqrt{x} - 4 = 0; \quad \text{b) } \frac{6-x}{x-5} = 6 + \frac{1}{x-5}; \quad \text{c) } 1 + \lg(x+3) = 0; \quad \text{d) } 10^{\sin x} = \frac{1}{10}.$$

1973. G 3.

4. Közelítő értékek használata nélkül állapítsa meg, hogy melyik nagyobb az alábbi két-két szám közül!

$$\text{a) } \sqrt{50} - \sqrt{12} \quad \text{vagy} \quad \frac{20 - \sqrt{96}}{\sqrt{8}}; \quad \text{b) } 100^{2 \lg 2} \quad \text{vagy} \quad \sqrt{10^{2+0,5 \lg 16}}.$$

1977. G 3.

5. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2\sqrt{y-6x} = x+3; \\ \sqrt{y-1} = x+2. \end{cases}$$

1981. N 4.

6. Határozza meg külön-külön a a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

$$\text{a) } \frac{1}{x^3 - x^2 - 2x}; \quad \text{b) } \sqrt{x^3 - x^2 - 2x}; \quad \text{c) } \lg(x^3 - x^2 - 2x).$$

1995. G 3.

7. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\text{a) } (x+2)\sqrt{x^2-2x+3} \geq 0; \quad \text{b) } 2\log_5 \sqrt{x} \geq 2 + \log_x \frac{1}{5}.$$

1992. N 5.

Gykvons

II. sorozat

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2}.$$

1991. N 1.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \sqrt{2x} - \sqrt{18x} = 2; \quad \text{b) } 5^{x+3} \cdot 2^{x-1} = 375; \quad \text{c) } \frac{(\cos x + \sin x + 1)(\cos x + \sin x - 1)}{\sin 2x} = 1.$$

1976. G 4.

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2x - 3\sqrt{x} = 2.$$

1996. N 1.

4. Számítsa ki a következő kifejezés értékét:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}.$$

1970. N 1.

5. Mely valósszám-párokra igaz a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} y - x = 44; \\ \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}? \end{cases}$$

1988. N 4.

6. Állapítsa meg a következő függvények értelmezési tartományát:

$$\text{a) } y = \lg |x+1|; \quad \text{b) } y = \sqrt{15 + 2x - x^2}; \quad \text{c) } y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

1975. N 6.

7. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

1993. G 6.

Gykvons

III. sorozat

1. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok körében:

a) $x^2 + \frac{1}{x-4} = 4x + \frac{1}{x-4}$; b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$; c) $\sin 2x = 2 \sin(x + \pi) \cos(x + \pi)$.

1974. N 3.

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x - 1.$$

1988. G 1.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{4x + 9} = 5 + \sqrt{x - 6}.$$

1992. N 1.

4. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

a) $\sqrt{10^{4-\lg 25}}$; b) $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; c) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

1992. G 1.

5. Melyek azok a pozitív x és y valós számok, amelyek kielégítik az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y - 2} = 14; \\ \frac{x^2 y^2}{5} - xy = 10? \end{cases}$$

1985. N sz 7.

6. Állapítsa meg a következő függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

a) $y = -\sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{-x}$; c) $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$; d) $y = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}$.

1975. G 4.

7. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x - 5} > 2.$$

1989. N 4.

Gykvons

IV. sorozat

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\text{a) } |3\sqrt{x} - 1| = 3; \quad \text{b) } 2x - 11 = \frac{2|\cos x|}{\cos x}, \text{ ha } x \in [\pi; 2\pi]; \quad \text{c) } x^2 - 7 = 3\sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

1993. N 3.

2. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{21}{\sqrt{2x+1}} - 2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = 0.$$

1972. N 3.

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-11}.$$

1989. G 1.

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 5.$$

1986. G sz 8.

5. Mely valósszám-párok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}; \\ x + y = 8? \end{cases}$$

1983. N sz 7.

6. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{x+y}{x-y} \sqrt[3]{\frac{(x^2-y^2)^4}{(x+y)^8}}.$$

1966. N 1.

7. Mely valós x értékekre teljesül, hogy

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9?$$

1985. N g 7.

Trigonometria X.

I. sorozat

1. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

a) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $32(8^{-\frac{5}{3}}) + 81^{0,75}$; c) $\sin 990^\circ + \operatorname{tg}(-225^\circ)$.

1975. G 3.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x^2 = \sqrt{x}$; b) $2^x = -3$; c) $\operatorname{tg} 2x = 1$; d) $\log_x 2x = 2$.

1972. N 2.

3. Mely valós x -ekre értelmezhetők az alábbi kifejezések:

a) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; b) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}$; c) $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}}$; d) $\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$?

1984. G 3.

4. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $0,5^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{32}$; b) $\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{ctg} x$; c) $\lg(0,5+x) = \lg 0,5 - \lg x$.

1982. N 3.

5. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $6 \sin^2 x - 13 \sin x + 6 = 0$; b) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

1989. G 4.

6. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$; b) $\lg x - \frac{1}{\lg x} = \frac{8}{3}$; c) $10^x - 10^{-x} = \frac{8}{3}$; d) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{8}{3}$.

1975. N 4.

7. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\lg(3\sqrt{\frac{x-3}{x-6}} + 1) = 1$; b) $\sin(\pi \cos x) = 0$.

1981. G 4.

8. Igazolja, hogy a

$$\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$$

összeg minden x értékre állandó!

1980. G sz 6.

Trigonometria X.

II. sorozat

1. Számítsa ki az alábbi kifejezések pontos értékét:

$$A = \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} + \sqrt[5]{\sin(-7\pi)}; \quad B = 2^{\log_{\sqrt{2}} 3} \cdot 2^{\log_4 9}; \quad C = \log_{\pi} \left[\left(\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 - \sin \frac{4\pi}{3} \right].$$

1985. N 3.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } 3^{-4x} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{b) } \frac{9-3x}{x-3} - 1 = 0; \quad \text{c) } \frac{\lg 2^x}{x} = \lg 2; \quad \text{d) } \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = 1.$$

1973. N 3.

3. Állapítsa meg a következő függvények értelmezési tartományát:

$$\text{a) } y = \lg |x+1|; \quad \text{b) } y = \sqrt{15+2x-x^2}; \quad \text{c) } y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

1975. N 6.

4. Állapítsa meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők! Adja meg a kifejezések legnagyobb és legkisebb értékét!

$$\text{a) } \log_2 0,5^{\sin x}; \quad \text{b) } \sqrt{1-\sin^2 x}; \quad \text{c) } \log_2 0,5^{\sin x} \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

1992. G 4.

5. Oldja meg a következő egyenletet:

$$3 \sin x = 2 \cos^2 x.$$

1971. N 1.

6. Oldja meg a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 2; \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

1973. G 6.

7. Mely valós x -ekre értelmezhetők a következő kifejezések:

$$\text{a) } \sqrt{1+\sin x}; \quad \text{b) } \sqrt{1+\operatorname{tg} x}; \quad \text{c) } \sqrt{\sin(x+1)}?$$

1978. G 3.

8. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$$

egyenletet!

1985. G sz 6.

Trigonometria X.

III. sorozat

1. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

$$\text{a) } \sqrt{10^{4-\lg 25}}; \quad \text{b) } \sin 75^\circ \cos 75^\circ; \quad \text{c) } \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

1992. G 1.

2. Mely valós x -ekre értelmezhetők a következő kifejezések:

$$\text{a) } \frac{2}{2^x - 4}; \quad \text{b) } \lg(-x^2 + 2x); \quad \text{c) } \sqrt{\lg \frac{x}{4} - 1}.$$

1976. N 6.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\text{a) } |3\sqrt{x} - 1| = 3; \quad \text{b) } 2x - 11 = \frac{2|\cos x|}{\cos x}, \text{ ha } x \in [\pi; 2\pi]; \quad \text{c) } x^2 - 7 = 3\sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

1993. N 3.

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} xy = 1; \\ x + y - \cos^2 z = -2. \end{cases}$$

1977. N 7.

5. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1.$$

1979. G g 7.

6. Mely valós x számokra értelmezhetők a következő kifejezések? Mely valós értékeket vesznek fel?

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{6} \cos(\pi x)\right); \quad \text{b) } \sqrt{\sin(\pi x)}.$$

1986. G 4.

7. Számítsa ki a

$$\cos(\pi x^2) = \cos(\pi(x^2 + 2x + 1))$$

egyenlet legkisebb pozitív gyökét!

1989. N 6.

Trigonometria X.

IV. sorozat

1. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos számértékét (ne használjon szögfüggvénytáblázatot):

$$\frac{1}{(1 - \cos 15^\circ)(1 + \sin 75^\circ)} - 8 \sin 60^\circ.$$

1976. N 3.

2. Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb halmazát, amelyen az

$$\frac{1}{\sqrt{|2 \sin 2x - 1|}}$$

kifejezés értelmezhető! Állapítsa meg az ezen a halmazon az adott kifejezéssel definiálható függvény értékkészletét!

1984. N 5.

3. Számítsuk ki a következő egyenletrendszer 0° és 360° közé eső megoldásait:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0; \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

1968. N 4.

4. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

1988. G B 7.

5. Mekkora $\sin x$ pontos értéke, ha

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4?$$

1983. G g 6.

6. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\pi \sin x = \left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right|.$$

1984. G sz 8.

7. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}.$$

1978. G 7.

Geometria XI.

IX. sorozat

16. Egy paralelogramma rövidebb átlója 8 egység, átlóinak szöge 45° , területe 40 területegység. Számítsa ki a paralelogramma kerületét!
1989. G 3.
36. Az $ABCD$ négyszögben $AB = 3$; $BC = 5$; $CD = 5$ és $DA = 2\sqrt{6}$; a B csúcsnál lévő szög 120° . Számítsa ki az AC átlót, a D csúcsnál lévő szöget és a négyszög területét!
1975. G 2.
40. Sík terepen levő A és B pontok közötti távolság kiszámításához a következő adatokat ismerjük:
Az A ponttól 100 m-re álló gyárkémény az A pontból 45° -os, a B pontból 30° -os emelkedési szögben látszik;
az A pontot a kémény aljával összekötő egyenes 60° -os szöget zár be az AB egyenessel. Mekkora az AB távolság?
1975. N 5.
60. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 120° , a háromszögbe írt kör sugara 8. Számítsa ki a háromszög oldalait és a háromszög köré írható kör sugarát három értékes jegy pontossággal!
1979. G 2.
85. Egy trapéz párhuzamos oldalai a és $3a$, a másik két oldal a és $2a$. Mekkora a trapéz szögei?
1981. N 3.
86. Adott egy $2a$ oldalú szabályos háromszög. Mi a mértani helye a háromszög síkjában elhelyezkedő azon P pontoknak, amelyekre a háromszög csúcsaitól mért távolságok négyzetének összege egy rögzített valós s számmal egyenlő?
1981. N sz 7.
88. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala 16, másik két oldalának aránya 3:2; a háromszög köré írható kör sugara 10. Mekkora a háromszög másik két oldala?
1980. N sz 6.
89. Egy kör 120° -os középponti szögét olyan két részre osztjuk, hogy a rész-szögekhez tartozó húrok aránya 2:5. Mekkora a húrokhoz tartozó középponti szögek?
1977. N 6.
96. Egy háromszög két szöge: $\beta = 50^\circ$ és $\gamma = 100^\circ$; a velük szemköztli oldalak b , illetve c ; a háromszög harmadik oldala a . Bizonyítsa be, hogy $ab = c^2 - b^2$!
1982. N g 8.
103. Egy egyenlő szárú háromszög szára 10 egység; a szárak metszéspontján átmenő és a szárak szögét 1:2 arányban osztó egyenesnek a háromszögbe eső szakasza 9 egység. Mekkora a háromszög területe?
1983. G sz 6.
112. A 12 egységnyi hosszú AB szakaszt a C pont 1:2 arányban osztja. Az AB ; AC és CB szakaszok mint átmérők fölé félköröket rajzolunk az AB egyenesnek ugyanazon a partján. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti mind a három félkört?
1984. G g 7.
119. Egy háromszög két oldala 8 és 15, területe 48. Mekkora a háromszög harmadik oldala?
1985. G 2.
127. Egy háromszög két oldala 8 és 12, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal 9. Mekkora a háromszög területe?
1986. G 5.
145. Egy háromszög szögeinek tangensei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1:2:3. Hogyan aránylanak egymáshoz a háromszög oldalai?
1988. G A 7.
157. Mekkora a területe annak az ABC háromszögnek, amelyben $AB = 3$; $BC = 7$; és a B csúcsból induló súlyvonal hossza 4 egység?

1990. G 3.

160. Egy háromszög AB oldala 10, a hozzá tartozó súlyvonal 6, egy másik súlyvonala pedig 9 egység. Mekkora a háromszög AC és BC oldala?

1990. N 4.

171. Egy egyenlő szárú háromszög súlyvonalainak a hossza 90, 51, 51. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?

1996. G 2.

Koordinátageometria

I. sorozat

1. A koordinátatengelyek mely pontjai vannak egyenlő távol az $A(-1; 6)$ és $B(9; 12)$ pontoktól?
1984. G 1.
2. Az e egyenes áthalad az origón és irányvektora $(4; 3)$; az f egyenes két pontja $A(1; 7)$ és $B(22; -21)$. Számítsa ki az e és f egyenesek metszéspontjának koordinátáit és a metszéspont távolságát A -tól!
1975. N 1.
3. Adott négy pont a koordinátaival: $A(1; -1)$, $B(5; 1)$, $C(7; 7)$, $D(3; 5)$. Igazolja, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma, és számítsa ki a területét!
1977. G 2.
4. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyet a koordinátarendszer x tengelye, továbbá a $2x - y = 0$, illetve a $4x + 7y = 36$ egyenletű egyenesek zárnak közre? Mekkora a háromszög szögei?
1977. N 2.
5. Egy háromszög csúcspontjai: $A(0; 0)$; $B(10; 2)$ és $C(2; 2)$. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi az ABC háromszög területét és párhuzamos az y tengellyel!
1992. G 2.
6. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(6; 4)$ ponton, továbbá az
$$x + y = 4 \quad \text{és az} \quad x + y = 5$$
 egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek abszcisszáinak különbsége 2!
1990. G 6.
7. Állapítsa meg, hány olyan egyenes van, amely áthalad az $A(1; 8)$ ponton, és egyenlő távolságra van a $P(-3; 5)$ és $Q(9; -1)$ pontoktól! Írja fel ezeknek az egyeneseknek az egyenletét!
1980. N g 6.

Koordinátageometria

II. sorozat

1. Határozza meg a $2x - 3y = 2$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amely az $A(0; 3)$ és $B(4; 7)$ pontoktól egyenlő távolságra van!
1973. G 4.
2. Az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsai: $A(1; 4)$ és $B(6; 6)$. A BC oldalegyenes egy pontja $P(10; 18)$, a CD oldalegyenes egy pontja $R(-1; 11)$. Mekkora a paralelogramma kerülete?
1987. G 2.
3. Egy háromszög két csúcsának koordinátái: $A(3; 4)$, $B(7; 4)$; a harmadik csúcson átmenő oldalak párhuzamosak a $\mathbf{v}_1(7; 6)$, illetve a $\mathbf{v}_2(1; 2)$ vektorokkal. Mekkora a háromszög területe?
1982. N 4.
4. Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja: $A(-2; 2)$, másik végpontja a B pont, amelynek ordinátája 4. Az egyik befogó egyenlete $x + y = 10$. Számítsa ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!
1993. G 4.
5. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $2x + y = 20$ egyenesre, és felezi az adott egyenes és a koordinátatengelyek által határolt háromszög területét!
1967. N 7.
6. Az $x + y = 30$ egyenletű egyenesnek az x és az y tengellyel való metszéspontjait jelölje A , illetve B , és legyen az origó O . Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos az $x - 3y = 6$ egyenletű egyenessel, metszi az OB szakaszt a C , az AB szakaszt a D pontban, és amelyre az $OADC$ négyszög területe 234 egység!
1988. N 5.
7. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő feltételt:

$$\text{a) } |x| \leq |y|; \quad \text{b) } |x + 1| + |y + 1| \leq 2.$$

1987. G g 6.

8. Legyen $A(-6; 10)$ és $B(4; 14)$. Számítsa ki annak a $2x - 5y = -4$ egyenletű egyenesen fekvő P pontnak a koordinátáit, amelyre az AP és BP szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb!
1980. G g 7.

Koordinátageometria

III. sorozat

1. Egy háromszög csúcsai: $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(4;8)$. Számítsuk ki a háromszög magasságpontjának a koordinátáit!
1968. N 2.

2. Mekkora a területe annak a négyzetnek, amelynek két oldalegyenese az

$$5x - 12y + 26 = 0 \quad \text{és az} \quad 5x - 12y - 65 = 0$$

egyenletű egyenes?

1985. G 4.

3. Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái: 5; 7, egyik átlójának egyenlete

$$3x + 4y = 18.$$

Írja fel a többi csúcs koordinátáit!

1983. N 3.

4. Az $ABCD$ téglalap AB oldalegyenesének egyenlete: $y = 3x$, átlói az $M(12;6)$ pontban metszik egymást; az AC átló párhuzamos az x tengellyel. Határozza meg a B , C , D csúcsok koordinátáit!

1972. N 4.

5. Egy rombusz két oldalegyenesének egyenlete: $3x - 10y - 54 = 0$, illetve $3x - 10y + 128 = 0$. Az egyik átló az $x - y + 10 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Számítsa ki a rombusz csúcsainak koordinátáit!

1982. G sz 6.

6. Az $ABCD$ rombusz A csúcsának koordinátái: $(-1;3)$, az átlók metszéspontja: $Q(2;1)$. A $P(0;2)$ pont az A csúcsból induló egyik oldalon van. Számítsa ki a rombusz területét!

1979. N 4.

7. Az $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye az AC átló, ahol $A(0;0)$ és $C(8;10)$. A deltoid területe 41 területegység. Az egyik átló az origótól számítva 3:2 arányban osztja a másikat. Határozza meg a hiányzó csúcspontok koordinátáit!

1991. G 6.

Koordinátageometria

IV. sorozat

1. Számítsa ki az ABC háromszög magasságpontjának koordinátáit, ha

$$A(-5; -2), \quad B(-2; 7) \quad \text{és} \quad C(2; -1)$$

1994. N 2.

2. A $P(4; 2)$ ponton átmenő egyenes az x tengelyt $(a; 0)$, az y tengelyt $(0; b)$ pontban metszi. Fejezze ki b -t a függvényeként.

1971. N 3.

3. Egy rombusz csúcsa az $A(5; 8)$ pont, a BD átló egyenesének egyenlete: $x - 2y + 6 = 0$. A rombusz oldala 5 egység. Határozza meg a többi csúcspont koordinátáit és a rombusz területét!

1991. N 4.

4. Egy téglalap két szemközti csúcsa: $A(5; 0)$, $C(2; 4)$; egy további csúcsa az $x - 3y = 0$ egyenletű egyenesen van. Számítsa ki a téglalap ismeretlen csúcsainak koordinátáit!

1979. G 4.

5. Egy téglalap hosszabbik oldala háromszorosa a rövidebb oldalnak. Az egyik hosszabbik oldal végpontjainak koordinátái: $-2; 4$ és $7; 16$. Adja meg a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit!

1984. N 4.

6. Egy rombusz egyik átlója a másik átlójának kétszerese; a rövidebbik átló végpontjai: $A(6; -4)$ és $C(-2; 6)$. Határozza meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

1974. N 5.

7. A koordináta-rendszer O kezdőpontjának tükörképe az $A(5; 5)$ pontra O_1 , az O_1 tükörképe a B pontra O_2 , és O_2 tükörképe a $C(1; 7)$ pontra ismét az O kezdőpont. Számítsa ki B koordinátáit, és bizonyítsa be, hogy az $OABC$ négyszög rombusz!

1987. N 3.

Koordinátageometria

V. sorozat

1. Mely pontokban metszi az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört az $x - 7y + 25 = 0$ egyenletű egyenes? Milyen hosszú hűrt metsz ki a kör az egyenesből? Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?
1976. G 3.
2. Számítsa ki annak az $ABCD$ négyszögnek a területét, amelynek A csúcsa az $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 12$ egyenletű kör középpontja, B és D az előbbi kör és az $x - 2y + 6 = 0$ egyenes két metszéspontja, C pedig a B és D pontban a körhöz húzható érintők metszéspontja!
1978. N 3.
3. Egy k kör középpontjának abszcisszája -1 . Az $A(7; 4)$ pontból induló AB átmérő B végpontja az x tengelyen van. Írja fel a k kör egyenletét! Számítsa ki az AB átmérőre merőleges átmérő végpontjainak koordinátáit!
1992. N 4.
4. Számítsa ki az $x^2 + y^2 = 10$ és az $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ egyenletű körök közös húrja, az x tengely és az y tengely által alkotott háromszög területét!
1974. G 5.
5. A k_1 kör egyenlete $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$, a k_2 kör egyenlete $(x - 7)^2 + (y - 14)^2 = 5$. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a k_1 és k_2 középpontját összekötő egyenesen van, és amelyet a k_1 és k_2 körök belülről érintenek!
1976. N 4.
6. A k kör érinti az x tengelyt és a $3x + 4y = 69$ egyenletű e egyenest; a kör és az egyenes közös pontjának abszcisszája 11 . Írja fel a kör egyenletét!
1989. G 5.
7. Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört érinti a $3x + 4y = k$ egyenletű egyenes. Számítsa ki k értékét! Mekkora az érintőnek a koordinátatengelyek közé eső szakasza?
1973. N 4.
8. Határozza meg az r értékét úgy, hogy a $C(-12; 0)$ középpontú, r sugarú körnek és az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű körnek legyen az $y = x$ egyenletű egyenessel párhuzamos közös érintője!
1992. G 7.

Koordinátageometria

VI. sorozat

1. A k kör áthalad az $A(-1; 15)$; $B(9; 15)$ és $C(16; 8)$ ponton; az e egyenes mindkét koordinátatengely negatív felét metszi, mindkettőt 10 egységre az origótól. Írja fel k és e egyenletét, és számítsa ki közös pontjaik koordinátáit!
1985. N 4.
2. Az $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$ egyenletű kör 10 abszcisszájú pontjaiban húzott érintői mely pontban és mekkora szögben metszik egymást?
1993. N 4.
3. Adott az
$$x^2 + y^2 - 2x - 25 = 0$$
egyenletű kör két pontja: $A(-4; -1)$ és $B(6; 1)$; a kör AC és BC húrjai hosszának aránya 3:2. Határozza meg a C pont koordinátáit!
1990. N 5.
4. Az $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ és az $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 55 = 0$ egyenletű körök középpontja és metszéspontjai egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?
1981. G 5.
5. Egy k kör érinti az $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ egyenletű kört és a koordináta-tengelyeket. Mekkora a k kör sugara?
1994. G 6.
6. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x tengelyt, és a $P(4; 8)$ pontban belülről érinti az $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 100$ egyenletű kört!
1995. G 5.
7. Az $(x - 5)^2 + (y - 10)^2 = 50$ egyenletű körből az origón átmenő g egyenes 10 hosszúságú húrt metsz ki. Írja fel a g egyenes egyenletét, és számítsa ki a kimetszett húr végpontjainak koordinátáit!
1986. G sz 7.
8. Az $x^2 + y^2 = 4$ és az $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 9$ egyenletű kör középpontját összekötő szakasz mely pontjából húzható közös érintő a két körhöz? Írja fel az érintőegyeneseek egyenletét!
1995. N 5.

Koordinátageometria

VII. sorozat

1. Az ABC háromszögben $AB = BC$. Jelölje a BC felezőpontját F , a BC oldalhoz tartozó magasság talppontját T . Számítsa ki a B és C csúcs koordinátáit, ha $A(-2; 1)$, $T(16; 1)$ és F második koordinátája 13.
1988. G 5.

2. Az $ABCD$ rombusz oldala 5 egység. Az A és C csúcs az

$$y = x^2 + 7x + 10$$

egyenletű parabolán van, a B csúcs a parabola fókuszpontja. Mekkora a rombusz területe?

1989. N 7.

3. Írja fel az $y = 4x^2 + 4$ parabola origón áthaladó érintőinek egyenletét! Számítsa ki az érintési pontok koordinátáit!
1970. N 5.

4. Az y tengellyel párhuzamos tengelyű és felfelé nyíló parabola átmegy az $A(5; 4)$ ponton, és érinti az x tengelyt. Az A pontban a parabolához húzható érintő merőleges a $\mathbf{v}(4; -1)$ vektorra. Írja fel a parabola egyenletét!
1986. N sz 6.

5. Mi az

$$y = 4x^2 - 4(a + 1)x + a^2 + 4a - 1$$

egyenletű parabolák csúcspontjainak mértani helye, ha az a paraméter befutja az összes valós számot?

1979. N g 7.

6. Határozza meg azoknak a pontoknak a halmazát a síkon, amelyeknek $(x; y)$ koordinátái kielégítik a következő egyenletet:

$$\frac{x^3y + xy^3}{\sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{4 - y^2}} = \frac{4xy}{\sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4)}}.$$

1995. G 8.

7. A $\mathbf{v}(1; 1)$ vektorral párhuzamos g egyenes az $y = x^2 - 4x + 6$ egyenletű parabolát az A és B pontokban metszi. A két metszéspont közül A van közelebb az y tengelyhez. A g egyenesnek az y tengelyre eső pontját Y -nal jelölve $AB = 3YA$. Állapítsa meg a g egyenes egyenletét, valamint az A és B pontok koordinátáit!
1985. G sz 8.

Hatvány, gyök, logaritmus

I. sorozat

1. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

$$a = \frac{2^{35} + 3 \cdot 2^{33} + 2^{32}}{3 \cdot 2^{33} - 2^{32}}; \quad b = \left(\frac{1}{3^7} - \frac{1}{3^8} \right) : \frac{1}{3^7}; \quad c = 64^{\frac{5}{3}} \cdot 25^{2,5} \cdot 1000^{-\frac{2}{3}} \cdot 400^{-1,5}.$$

1981. N 1.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } x - 3\sqrt{x} - 4 = 0; \quad \text{b) } \frac{6-x}{x-5} = 6 + \frac{1}{x-5}; \quad \text{c) } 1 + \lg(x+3) = 0; \quad \text{d) } 10^{\sin x} = \frac{1}{10}.$$

1973. G 3.

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\lg(4x+2) - \lg(-6x) = \lg(1-2x).$$

1986. G 1.

4. Mely valós x számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$\log_3(x+4) + \log_3(x-1) = 1 + \log_3 2?$$

1995. N 2.

5. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 1; \\ x - y = 3. \end{cases}$$

1967. N 5.

6. Mely valós x számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{x+9}{2x+2}}?$$

1994. N 1.

7. Állapítsa meg a következő függvények értelmezési tartományát:

$$\text{a) } y = \lg|x+1|; \quad \text{b) } y = \sqrt{15+2x-x^2}; \quad \text{c) } y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

1975. N 6.

8. Mely x helyeken vesznek fel pozitív értékeket a következő kifejezések:

$$\text{a) } 2^x + 2^{-x} - \frac{17}{4}; \quad \text{b) } 2 + \log_{\frac{1}{3}}(5x-1)?$$

1987. N g 6.

9. Állapítsa meg, hogy a következő kifejezés mely valós x értékekre értelmezhető! Van-e legnagyobb és legkisebb értéke; ha van, mivel egyenlő, és mely x helyeken veszi fel?

$$\lg(4 - |x-1| + \frac{1}{2}|x+2|)$$

1994. N 6.

10. Oldja meg (a valós számok körében) az $(m-1)10^x + m10^{-x} = 2m$ egyenletet, amelyben m adott valós számot jelent!

1976. N 7.

Hatvány, gyök, logaritmus

II. sorozat

0. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét zsebszámológép, illetve függvénytáblázat használata nélkül:

$$\frac{5 \cdot 8^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{16\pi}{3}\right)^3}{\log_4 2}.$$

1987. G 1.

1. Számítsa ki az A^B kifejezés pontos értékét közelítő értékek használata nélkül, ha

$$A = \left(\frac{\cos\left(\frac{12k+1}{6}\pi\right)}{\operatorname{tg} \frac{8\pi}{3}} \right)^2 \quad \text{és} \quad B = \frac{1 + \log_2 4}{1 + \log_{\frac{1}{3}} 27},$$

ahol k tetszőleges egész számot jelent.

1993. G 2.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } 3^{-4x} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{b) } \frac{9-3x}{x-3} - 1 = 0; \quad \text{c) } \frac{\lg 2^x}{x} = \lg 2; \quad \text{d) } \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = 1.$$

1973. N 3.

3. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } 0,5^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{32}; \quad \text{b) } \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{ctg} x; \quad \text{c) } \lg(0,5+x) = \lg 0,5 - \lg x.$$

1982. N 3.

4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\log_{x-1} x - \log_{x-1} 6 = 2.$$

1966. N 4.

5. Oldja meg a valósszám-párok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}; \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1. \end{cases}$$

1991. N 5.

6. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \sqrt{2x} - \sqrt{18x} = 2; \quad \text{b) } 5^{x+3} \cdot 2^{x-1} = 375; \quad \text{c) } \frac{(\cos x + \sin x + 1)(\cos x + \sin x - 1)}{\sin 2x} = 1.$$

1976. G 4.

7. Határozza meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető az alábbi kifejezés:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{|x+2| - 3}; \quad \text{b) } \lg(1 - \sin(2x)).$$

1987. G 4.

8. Mely valós x -ekre igaz, hogy

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2?$$

1984. N g 7.

9. Számítsa ki az $\frac{1}{3^{2x-2} \cdot 3^{x-1} + 1}$ kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ha $-2 \leq x \leq 0$!

1979. G sz 8.

10. Az m paraméter mely egész értékénél lesz a

$$9^x + 2(m+3) \cdot 3^x + m^2 = 22$$

egyenletnek két különböző gyöke a valós számok halmazán? Adja meg a lehetséges gyökök számértékét is!

1993. N 7.

Hatvány, gyök, logaritmus

III. sorozat

1. Számítsa ki és rendezze növekvő sorrendbe a következő kifejezések értékét:

$$\log_5 0,008; \quad 2 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}; \quad -(0,04)^{-\frac{1}{2}}.$$

1980. N 2.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}; \quad \text{b) } \lg x - \frac{1}{\lg x} = \frac{8}{3}; \quad \text{c) } 10^x - 10^{-x} = \frac{8}{3}; \quad \text{d) } \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{8}{3}.$$

1975. N 4.

3. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok körében:

$$\text{a) } \sqrt{8-x^2} = -x; \quad \text{b) } \sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{c) } \lg(x^2-1) = \lg(x+1) + \lg(x-1).$$

1974. G 3.

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$2(\lg 2 - 1) + \lg(x^3 + 1) = \lg\left(\frac{5}{x^3} + 5\right).$$

1993. N 5.

5. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} xy = 256; \\ 7\left(\log_x y + \frac{1}{\log_x y}\right) = 50. \end{cases}$$

1977. G 5.

6. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}; \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}. \end{cases}$$

1986. N 2.

8. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\text{a) } (x+2)\sqrt{x^2-2x+3} \geq 0; \quad \text{b) } 2\log_5 \sqrt{x} \geq 2 + \log_x \frac{1}{5}.$$

1992. N 5.

9. Fejezze ki $\lg 2$ és $\lg 5$ értékét p függvényeként, ha

$$\lg 2 \cdot \lg 5 = p.$$

1973. N 5.

10. Mely valós x számok elégítik ki a következő egyenleteket:

$$\text{a) } 2^{\sin x \cos x \operatorname{tg} x} = 1; \quad \text{b) } \log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2?$$

1994. G 3.

Hatvány, gyök, logaritmus

IV. sorozat

1. Határozza meg a következő kifejezések pontos értékét (táblázat és számológép használata nélkül):

a) $\log_3 \left(-\operatorname{tg} \frac{1991\pi}{4} \right);$ b) $1991\sqrt{\cos^2(9\pi)-1};$ c) $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}).$

1991. G 2.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x^2 = \sqrt{x};$ b) $2^x = -3;$ c) $\operatorname{tg} 2x = 1;$ d) $\log_x 2x = 2.$

1972. N 2.

4. Oldja meg a következő egyenletet:

$$1 + \lg(3^{x-3} + 15) = \lg 3 + \lg(9^{x-3} - 1).$$

1971. N 6.

5. A p, q, r pozitív számok összege 222; $\lg p$ és $\lg r$ számtani közepe $\lg q$, továbbá $\lg \frac{r}{p} = 2$. Melyek ezek a számok?
1977. N 5.

6. Oldja meg a következő egyenletet:

$$4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}.$$

1982. G 1.

7. Határozza meg külön-külön a a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\frac{1}{x^3 - x^2 - 2x};$ b) $\sqrt{x^3 - x^2 - 2x};$ c) $\lg(x^3 - x^2 - 2x).$

1995. G 3.

8. Az a milyen értékeire van valós megoldása az

$$\log_a x + \log_a(x+1) \leq \log_a(2x+6)$$

egyenlőtlenségnek? Oldja meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

1984. N sz 7.

9. Adja meg az összes olyan x számot, amely egyszerre elégíti ki a következő egyenleteket:

$$\begin{cases} \sin \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = 0; \\ \sin \sqrt{\log_{\sqrt{2}} x} = 0. \end{cases}$$

1975. G 7.

10. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x^{1-\frac{\lg x}{3}} = 1;$ b) $a^{6x} + a^{3x} = a + \sqrt{a} \quad (a > 0).$

1978. N 4.

Hatvány, gyök, logaritmus

V. sorozat

0. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

a) $\sqrt{10^{4-\lg 25}}$; b) $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; c) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

1992. G 1.

1. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

a) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $32(8^{-\frac{5}{3}}) + 81^{0,75}$; c) $\sin 990^\circ + \operatorname{tg}(-225^\circ)$.

1975. G 3.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\lg(3\sqrt{\frac{x-3}{x-6}} + 1) = 1$; b) $\sin(\pi \cos x) = 0$.

1981. G 4.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81; \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$$

1980. N 3.

4. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$\lg(4^{x-2} + 9) - \lg(2^{x-2} + 1) + \lg 2 - 1 = 0?$$

1988. G 3.

5. Mely valósszám-párok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \log_{12} x + \log_{12} y = 1 + \log_{12} 5; \\ \lg(2y - 10) = 1 - \lg 5? \end{cases}$$

1989. N 2.

6. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $6 \sin^2 x - 13 \sin x + 6 = 0$; b) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

1989. G 4.

7. Mely valós x -ekre értelmezhetők a következő kifejezések:

a) $\frac{2}{2^x - 4}$; b) $\lg(-x^2 + 2x)$; c) $\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{4} - 1}$.

1976. N 6.

8. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$2 \log_x \left(\frac{1}{4} \right) + \log_4 \left(\frac{1}{x} \right) \leq -3.$$

1987. G sz 6.

9. Három szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme; összegük 62, tízes alapú logaritmusuk összege 3. Melyik ez a három szám?

1981. N 5.

10. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12; \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

1982. N sz 7.

Hatvány, gyök, logaritmus

VI. sorozat

0. Közelítő értékek használata nélkül állapítsa meg, hogy melyik nagyobb az alábbi két-két szám közül!

a) $\sqrt{50} - \sqrt{12}$ vagy $\frac{20 - \sqrt{96}}{\sqrt{8}}$; b) $100^{2 \lg 2}$ vagy $\sqrt{10^{2+0,5 \lg 16}}$.

1977. G 3.

1. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$(\pi^{\sin \pi}) \cdot (\log_{\sqrt{3}} 9) \cdot (64^{-\frac{1}{3}}) \cdot \sqrt{0,0004}.$$

1979. N 2.

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$4^{|2x+6|-|x-9|} = 8.$$

1992. G 6.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \log_2 \log_3(x+y) = 1; \\ \lg x + \lg y = 3 \lg 2. \end{cases}$$

1969. N 5.

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\lg 2 + \lg(4^{-x-1} + 9) = 1 + \lg(2^{-x-1} + 1).$$

1984. G 4.

5. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50; \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

1979. G 3.

6. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\frac{2}{7} \lg x = 1 + \frac{7}{\lg x}$; b) $6^{2x+1} \cdot 2^{x^2} = 9^x \cdot 48$.

1985. G 3.

7. Mely valós x -ekre értelmezhetők és mely valós értékeket vesznek fel a következő kifejezések:

a) $3\sqrt{-1+\sin^2 x}$; b) $\lg(25(-x^2 + 20x - 96))$?

1983. N 5.

8. Közelítő értékek használata nélkül bizonyítsa be, hogy

$$2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \sqrt{2} + 1.$$

1989. G 8.

9. Az x és y olyan valós számot jelölnek, amelyekre az $x^2 - 1$, y , $\frac{16}{x^2-1}$ számok egy mértani sorozat, a $\log_{x+3} y$, $\log_{x+3}(x^4 - 5x^2 + 20)$, $\log_{x+3} y^3$ számok pedig egy számtani sorozat egymást követő elemei. Számítsa ki az összes ilyen mértani sorozat hányadosát és számtani sorozat különbségét!

1979. G g 6.

10. Oldja meg a valósszám-párok halmazán a következő egyenletet:

$$2 \cos^2 \frac{x^2 + 3y}{6} = 3^x + 3^{-x}.$$

1988. N B 7.

Hatvány, gyök, logaritmus

VII. sorozat

1. Számítsa ki az alábbi kifejezések pontos értékét:

$$A = \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} + \sqrt[5]{\sin(-7\pi)}; \quad B = 2^{\log_{\sqrt{2}} 3} \cdot 2^{\log_4 9}; \quad C = \log_{\pi} \left[\left(\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 - \sin \frac{4\pi}{3} \right].$$

1985. N 3.

2. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\log_3 \log_8 \log_2(x+9) = -1 + \log_3 2.$$

1982. G 3.

3. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30.$$

1973. G 5.

4. Oldja meg a következő egyenletet:

$$x + \lg(5^x + 1) = x \lg 2 + \lg 30.$$

1970. N 7.

5. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valósszám-párok halmazán:

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = x + y; \\ (2 + \lg y) \lg x = 1. \end{cases}$$

1990. G 4.

6. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_5(x-4) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-4) = 4.$$

1990. G 7.

7. Állapítsa meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők! Adja meg a kifejezések legnagyobb és legkisebb értékét!

$$\text{a) } \log_2 0,5^{\sin x}; \quad \text{b) } \sqrt{1 - \sin^2 x}; \quad \text{c) } \log_2 0,5^{\sin x} \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

1992. G 4.

8. Állapítsa meg, hogy mely x -ekre pozitív a következő kifejezés:

$$1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\log_{2-x}(x^2-4x+3)}.$$

1980. G g 8.

9. Melyik az a legkisebb pozitív páratlan n szám, amelyre a

$$2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{2n+1}{7}}$$

szorzat nagyobb 1000-nél?

1982. G sz 8.

10. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$(x^2 - x + 1)^{x-2} > 1.$$

1986. G g 6.

Hatvány, gyök, logaritmus

VIII. sorozat

1. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

$$A = 10^{1-\lg 2} + 3^{\log_9 36}; \quad B = 125^{-\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1000} \log_{\sin \frac{\pi}{6}} \sqrt{2}; \quad C = \sqrt{\lg \operatorname{tg} 36^\circ + \lg \operatorname{tg} 54^\circ}.$$

1988. N 1.

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \log_{\sin x} \cos x = 1; \quad \text{b) } \log_{\sin x} \cos x = 0; \quad \text{c) } \log_{\sin x} \cos x = -1.$$

1980. G 5.

3. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{2} \lg 2x = \lg(3-x) - \lg \sqrt{x+1}.$$

1978. G 4.

4. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok körében:

$$\lg(4 \cdot 5^x + 20) - \lg 4 = -2 + \lg[125(25^{x-1} - 1)].$$

1974. N 6.

5. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4; \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$$

1987. G g 7.

6. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{1991}(x-3) + \log_{1992}(x-3) = 3 - \lg(x^5 - 24).$$

1991. G 8.

7. Mely valós számokra értelmezhetők a következő kifejezések:

$$\text{a) } \lg \lg \sqrt{x}; \quad \text{b) } \lg \sqrt{\lg x}; \quad \text{c) } \sqrt{\lg \lg x}?$$

1986. N 3.

8. Melyek azok az x valós számok, amelyekre az

$$\log_x(x^2 + x - 4) - 1$$

kifejezés értéke negatív?

1981. N sz 8.

9. Adott egy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ számtani sorozat és egy pozitív elemekből álló $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ mértani sorozat. Van-e olyan valós c szám, hogy az $a_n - \log_c b_n$ kifejezés értéke minden n -re ugyanannyi?

1978. G 8.

10. A p és q mely értékei mellett teljesül minden valós x -re a $p \cdot 3^x + q = 3^{px+q}$ egyenlőség? (p pozitív, q valós számot jelöl.)

1979. G g 8.

Sorozatok

I. sorozat

1. Egy számtani sorozatban $a_1 + a_2 + a_3 = -12$; $a_1 a_2 a_3 = 80$. Számítsa ki a sorozat első három elemét!
1980. G 1.
2. Három könyvért összesen 76 forintot fizettünk. A legdrágább könyv 4 forinttal volt olcsóbb, mint a másik kettő együttvéve. Mennyibe került egy-egy könyv, ha az árak egy mértani sorozat három egymást követő elemével egyenlő?
1984. N 3.
3. A 3 és 18 számok közé tegyen két számot úgy, hogy az első három szám egy mértani, az utolsó három szám pedig egy számtani sorozat egymást követő három eleme legyen. Melyek ezek a számok?
1985. N 1.
4. Egy kereskedő 39 Ft-ért adott el egy árut. Mennyiért vette, ha annyi %-kal drágábban adta, mint ahány forintért vette az árut?
1985. G 1.
5. Egy üzem kétféle minőségű alkatrészt gyárt. Az I. osztályú termék gyártásából származik a bevétel 73%-a. Hány százalékkal emelkedik az üzem bevétele, ha az I. osztályú termék termelését 27%-kal, a II. osztályú termék termelését pedig 22%-kal növelik?
1991. G 1.
6. Egy téglalap két oldalának és átlójának hossza egy számtani sorozat három szomszédos eleme. A téglalap területe 108 területegység. Mekkora az oldalai?
1984. G 2.
7. Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első, harmadik és ötödik elemének összege 52, ugyanezen három elem reciprokának összege $\frac{13}{36}$. Számítsa ki a sorozat első három elemét!
1992. G 5.
8. Egy számtani sorozat első n elemének összege egyenlő az első n elemének az összegével ($n \neq m$). Bizonyítsa be, hogy az első $n + m$ elem összege nulla!
1973. G 8.

Sorozatok

II. sorozat

1. Egy számtani sorozat harmadik eleme az első elem négyzete; az első három elem összege 30. Írja fel a sorozat első három elemét!
1991. N 2.
2. Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjának összege 63, a harmadik és az első különbsége 9. Írja fel a sorozat első öt tagját!
1967. N 4.
3. Egy számtani sorozat első három elemének összege 105. Ha az első két számot változatlanul hagyjuk és a harmadik számhoz 180-at adunk, akkor egy mértani sorozat első három eleméhez jutunk. Számítsa ki a sorozat első három elemét!
1988. G 2.
4. Egy termék árát először 10%-kal felemelték, majd 10%-kal csökkentették. Végül ismét felemelték 10%-kal. Számítsa ki, hogy a végső ár az eredetinek hány százaléka!
1990. G 2.
5. András és Béla együtt 1 millió Ft-ot örökölt. András takarékbetétkönyvet nyitott, és egy év múlva 96 ezer Ft kamatot kapott. Béla a takarékbetéténél 2%-kal magasabb kamatozású hitellevelet vásárolt, és egy év múlva 72 ezer Ft kamatot kapott. Mennyi volt külön-külön András és Béla öröksége?
1993. G 5.
6. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos elemei. Számítsa ki a derékszögű háromszög és az azzal egyenlő kerületű szabályos háromszög területének arányát!
1994. N 3.
7. Egy mértani sorozatban az első elem 3, az első n elem összege 93, az első n elem reciprokanak összege $\frac{31}{48}$. Adja meg a sorozat első n elemét!
1985. G g 6.
8. Egy számtani sorozat első n elemének összege b , első $2n$ elemének összege pedig c . Fejezze ki b és c segítségével az első $3n$ elem összegét!
1981. N g 8.

Sorozatok

III. sorozat

1. Bizonyítsa be, hogy az

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}; \quad \sin \frac{19\pi}{3} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}; \quad \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

számok egy számtani sorozat egymást követő elemei!

1989. G 2.

2. Egy mértani sorozat első és kilencedik elemének szorzata 2304, a negyedik és a hatodik elem összege 120. Írja fel a sorozat első elemét és hányadosát!

1982. N 5.

3. Négy testvér életkorukról kérdeznak. A legidősebb ezt mondja: „Születési éveink egy számtani sorozat első négy elemét adják”. A korban utána következő pedig: „15 évvel ezelőtt testvéreim életkora egy mértani sorozat első három elemével volt egyenlő, most pedig életkoruk összege $\frac{11}{4}$ -szerese az enyémnek”. Számítsa ki a testvérek jelenlegi életkorát!

1990. N 3.

4. Egy almatárolóban az almát 6 hónapig tárolják kétféle módszerrel. Az első módszer alkalmazásánál a tárolt alma súlyvesztése havonként 4% (az előző havi súlyhoz képest); a második módszernél az első két hónapban nincs súlyvesztés, utána azonban havi 6%. Melyik módszer alkalmazása jár kevesebb súlyvesztéssel?

1976. G 6.

5. Egy üzemben az év második negyedétől kezdve minden negyedévben 20%-kal többet termeltek, mint az előző negyedévben, és így az egész évben összesen 10736 tonna terméket állítottak elő. Hány tonna terméket termelt az üzem az egyes negyedévekben? Hány százalékkal volt nagyobb a termelés a negyedik negyedévben, mint az első negyedévben?

1975. G 5.

6. Egy háromszög három oldalának hossza megegyezik egy számtani sorozat egymást követő elemeivel. A háromszög egyik szöge 120° , s az ezzel szemkötti oldal hossza 21. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát!

1976. G 5.

7. Ha 101 darab egymást követő páratlan szám összege 12827, akkor mekkora közülük a legkisebb és a legnagyobb?

1987. N 1.

8. Egy mértani sorozat hányadosa 1-gyel kisebb a sorozat első eleménél, és van olyan pozitív egész n , amelyre a következő két feltétel egyidejűleg teljesül:

a) az első n elem összege 21,

b) az első elem és az n -edik elem szorzata 36.

Számítsa ki a sorozat első elemét, hányadosát, valamint az n értékét.

1994. N 7.

Sorozatok

IV. sorozat

1. Öt egymást követő egész szám közül az első három négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő négyzetének összegével. Melyek ezek a számok?
1976. N 2.
2. Hány olyan mértani sorozat van, amelyben az első három elem négyzetének összege 364, továbbá az első és a harmadik elem szorzata 36? Adja meg e sorozatok első három elemét!
1985. G sz 7.
3. Három szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Ha a másodikhoz 8-at adunk, akkor egy számtani sorozat három egymás utáni elemét kapjuk. Ha ennek a számtani sorozatnak a harmadik eleméhez 64-et adunk, akkor egy új mértani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Melyik ez a három szám?
1978. N 5.
4. Egy erdőben a faállomány egy időpontban 10000 m^3 . Ettől kezdve a faállomány 20 éven át évente átlagosan 6%-kal gyarapszik. A 20. év végén ritkítás céljából kivágják az állomány 10%-át. Ettől kezdve az évi gyarapodás 15%-os lesz. A 10%-os ritkítást a 23. és 26. év végén is megismétlik. Az évi gyarapodás 15%-os marad. Mennyi fát termelnek ki összesen a három ritkítás alkalmával?
1977. G 6.
5. Egy üzem termelése az ötéves terv első három évében rendre 12,5%-kal, 25%-kal, illetve 28%-kal nőtt. A negyedik és az ötödik évben a növekedés üteme azonos volt. Az ötödik évben a gyár elérte a tervidőszakot megelőző év termelésének 3,2-szeresét. Hány százalékkal növekedett a termelés az ötödik évben?
1981. G 3.
6. Egy háromszög egyik szöge 120° -os, egyik oldala egyenlő a másik kettő számtani közepével. Hogyan aránylanak egymáshoz az oldalak?
1980. N 5.
7. Mekkora az n , ha az első n pozitív páros szám összegének és az első n pozitív páratlan szám összegének a hányadosa $\frac{21}{20}$?
1986. N 1.
8. Bizonyítsa be, hogy ha $0 < p < 1$, akkor minden pozitív egész n -re

$$1 + 2p + 3p^2 + \dots + np^{n-1} < \frac{1}{(1-p)^2}.$$

1983. G g 8.

Sorozatok

V. sorozat

1. Egy számtani sorozat harmadik eleme 3, tizedik eleme 31. Mekkora a sorozat különbsége, első eleme és az első 25 elem összege?
1975. G 1.
2. Egy mértani sorozat első három elemének összege 2; ötödik, hatodik és hetedik elemének összege pedig 1250. Számítsa ki a mértani sorozat hányadosát és negyedik elemét!
1975. N 3.
3. Négy szám egy számtani sorozat első négy eleme. Ha rendre 5-öt, 6-ot, 9-et, illetve 15-öt adunk hozzájuk, akkor egy mértani sorozat egymás után következő elemeit kapjuk. Melyik ez a négy szám?
1984. G sz 6.
4. Öt éven át minden év elején elhelyezünk a takarékpénztárban 5000 Ft-ot 26%-os kamatláb mellett. Öt év eltelte után legalább hány teljes évet kell még várnunk, hogy a pénzünk 105000 Ft-ra növekedjék?
1994. G 5.
5. Egy mezőgazdasági üzem tíz éven át minden év elején munkába állít egy a Ft értékű munkagépet; ezek értéke évenként p százalékkal csökken. Mekkora a 10 gép együttes értéke a tizedik év végén?
1972. N 7.
6. Egy egyenlő szárú háromszög szárának, alapjának, az alaphoz tartozó magasságnak és a háromszög területének számértéke a megadott sorrendben egy mértani sorozat első négy eleme. Mekkora a háromszög oldalai?
1993. N 6.
7. Egy számtani sorozat első eleme -210 , n -edik eleme 228. A közbülső elemek összege 45. Írja fel a sorozat első n elemét!
1986. G 2.
8. Melyek azok a számtani sorozatok, amelyekben az első n elem összegének és az utánuk következő $5n$ elem összegének hányadosa minden n -re ugyanannyi?
1977. G 8.

Sorozatok

VI. sorozat

1. Egy számtani sorozat első tíz elemének összege 155, az első és a hetedik elemének szorzata egyenlő a második és a harmadik elemének a szorzatával. Számítsa ki a sorozat első tíz elemét!
1989. N 3.
2. Egy mértani sorozat első hat elemének összege 168. A második, negyedik és hatodik elem összege -168 . Írja fel a sorozat első hat elemét!
1994. G 4.
4. Valamilyen termékből két üzem termelése 1970-ben egyaránt 100 egység volt, 1980-ban pedig mindkettőben 1000 egység. Az első üzem termelése évente mindig ugyanannyival növekedett, a másikban viszont a termelésnövekedés minden évben ugyanannyi százalékos volt. Melyik üzem termelt többet 1979-ben, és mennyivel?
1982. G 5.
5. Hat éven át minden év elején elhelyezünk a takarékpénztárban ugyanakkora összeget $p\%$ -os kamatláb mellett, majd a hatodik év letelte után még további négy éven át kamatoztatjuk. Mennyit tettünk a takarékpénztárba évenként, ha pénzünk a tizedik év végére S forintba növekedett?
1973. G 7.
6. Egy téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek összege 14, négyzetük összege 84. Az egyik él mértani közepe a másik kettőnek. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata?
1984. N sz 6.
7. Egy mértani sorozat ötödik és hatodik elemének az összege, valamint hetedik és ötödik elemének különbsége egyaránt 48-cal egyenlő; az első n elem összege 1023. Mekkora az n ?
1995. G 2.
8. Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első n elemének összege S , az első n elem reciprokainak összege R . Fejezze ki az első n elem szorzatát az S -sel, R -rel és n -nel!
1988. N B 8.

Sorozatok

VII. sorozat

1. Legyen $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$ számtani sorozat. Igazolja, hogy a $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ képlettel értelmezett $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n; \dots$ sorozat is számtani sorozat!
1991. G 5.
2. Jelölje $a_1, a_2, \dots, a_n$ egy egész számokból álló mértani sorozat egymás után következő elemeit. Az első három elem összege 21, az utolsó három elem összege pedig 336. Írja fel ezeket a számokat!
1973. N 6.
3. Adja meg az összes olyan számtani sorozatot, amelyre $a_n = 2$, $a_p = 3$, $a_q = 5$ és $n + p + q = 31$ (n , p és q pozitív egészek)!
1980. N g 8.
4. Az 1973. évben a B üzem termelése az A üzem termelésének a másfélszerese volt. Az A üzem termelését minden évben az elmúlt évi termeléshez képest kétszer annyi százalékkal növelik, mint a B üzemét. Hány százalékos ez a növekedés, ha a terv szerint az 1973–75-ig terjedő hároméves időszak alatt a két üzemnek ugyanannyit kell termelnie?
1974. G 6.
5. Egy sorozat első eleme 7, nyolcadik eleme 84, az első három elem összege 30; a szomszédos elemek különbségei számtani sorozatot alkotnak. Számítsa ki a sorozat első öt elemét!
1981. G g 8.
6. Három szakasz hossza egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Milyen értékek között változhatik a mértani sorozat hányadosa, hogy a három szakaszból háromszöget lehessen szerkeszteni?
1979. N sz 8.
7. Adott p és q valós számokhoz határozza meg az összes olyan számtani sorozat első elemét és különbségét, amelyben az első négy elem összege p , a negyedik és az első elem hányadosa pedig q !
1988. N A 6.
8. Bizonyítsa be, hogy az
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$
 sorozat minden eleme nagyobb az előzőnél, de kisebb 1-nél!
1986. N sz 8.

Sorozatok

VIII. sorozat

1. Igazoljuk, hogy ha az egymástól különböző a^2 ; b^2 ; c^2 , illetve az $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{a+c}$; $\frac{1}{b+c}$ számhármask egyike a felírt sorrendben számtani sorozatot alkot, akkor a másik számhármask is az adott sorrendben egy számtani sorozat egymás után következő három tagja!
1968. N 6.
2. Adja meg azokat az a ; b ; c számjegyeket, amelyekre fennáll, hogy az egyjegyű $\widehat{a}$; a kétjegyű $\widehat{ba}$ és a háromjegyű $\widehat{cba}$ szám egy mértani sorozat egymást követő elemei!
1992. N 7.
3. A természetes számok növekvő sorozatából kiválasztunk egy számot, azután a nála 8-cal nagyobbat, és így tovább minden nyolcadikat addig, amíg a kiválasztott számok összege 473 lesz. Hány számot választottunk ki, és mi volt az első szám?
1995. N 6.
4. Egy apa 20000 Ft összegű rendkívüli jutalmát 10 és 12 éves fiai és 13 éves lánya számára OTP-ben akarja elhelyezni évi 5%-os kamatra úgy, hogy mindegyikük 18 éves korában kapja meg a neki szánt pénzt: a két fiú egyenlő összeget, a lány pedig annyit, mint a két fiú együttvéve.
A rendelkezésre álló pénzből kinek a nevére mekkora összeget tegyen takarékbba az apa, ha feltételezzük, hogy a kamatokat évente nem veszik fel, hanem a betétkönyvben lévő pénzhez csatolják; továbbá azt is feltesszük, hogy a betétek kamatozási ideje mindhárom gyermek esetében egész év?
1984. G g 6.
5. Lehetnek-e $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, és $\sqrt{5}$ egy számtani sorozat elemei?
1977. N 8.
6. Egy háromszög oldalainak hossza olyan számtani sorozat egymást követő három eleme, amelynek különbsége 1. A háromszög területének mérőszáma kétszer akkora, mint a kerület mérőszáma. Mekkora az oldalak?
1981. G g 6.
8. A briliáns ára arányos súlyának négyzetével. Bizonyítsa be, hogy
 - a) a briliáns értéke csökken, ha darabokra vágjuk;
 - b) n részre vágva az értéke akkor a legkisebb, ha a darabok súlya egyenlő.**1971. N 8.**

Trigonometria XI.

V. sorozat

0. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

$$\text{a) } \sqrt{10^{4-\lg 25}}; \quad \text{b) } \sin 75^\circ \cos 75^\circ; \quad \text{c) } \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

1992. G 1.

1. Mekkora $\operatorname{tg} 2\alpha$ értéke, ha $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)?

1967. N 3.

2. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$3 \cos 2x = -2 \sin x + 3.$$

1985. N 2.

3. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok körében:

$$\text{a) } x^2 + \frac{1}{x-4} = 4x + \frac{1}{x-4}; \quad \text{b) } \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2; \quad \text{c) } \sin 2x = 2 \sin(x + \pi) \cos(x + \pi).$$

1974. N 3.

4. Mely valós x számok elégítik ki az alábbi egyenletet:

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{4} \sin^2 2x?$$

1994. N 4.

5. Oldja meg az $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$ egyenletet!

1977. G 7.

6. Egy háromszög szögei α, β, γ . Bizonyítsa be, hogy ha

$$2 \cos \alpha = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta},$$

akkor a háromszög egyenlő szárú!

1972. N 6.

7. Mely valós p értékekre van a

$$\sin 3x = p \sin x$$

egyenletnek olyan megoldása, amelyre $0 < x < \pi$?

1979. N g 6.

Trigonometria XI.

VI. sorozat

0. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok körében:

$$\text{a) } \sqrt{8-x^2} = -x; \quad \text{b) } \sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{c) } \lg(x^2-1) = \lg(x+1) + \lg(x-1).$$

1974. G 3.

1. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét közelítő értékek használata nélkül, ha $\operatorname{tg} \alpha = 2$ és $0^\circ < \alpha < 180^\circ$:

$$\text{a) } \frac{1 + \sin(2\alpha)}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}; \quad \text{b) } \frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}.$$

1992. N 3.

2. Oldja meg a következő egyenletet:

$$1 + 2 \cos 2x = 4 \sin x.$$

1970. N 3.

3. Igazolja a következő azonosságot:

$$\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = \cos^2(45^\circ - \alpha).$$

1974. G 4.

4. Oldja meg a következő egyenletet:

$$4 \sin 2x = 3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x.$$

1980. G g 6.

5. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sin x + \cos x = \sin(2x) + \frac{1}{2}.$$

1987. N 5.

6. Igazolja, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha hegyesszögeire fennáll a

$$\sin \alpha + \sin \beta = \cos \alpha + \cos \beta$$

összefüggés!

1986. N sz 7.

7. Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} (3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}) \right) = 1.$$

1986. N g 8.

Trigonometria XI.

VII. sorozat

1. Számítsa ki $\operatorname{tg} \alpha$ értékét, ha $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

1969. N 4.

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\operatorname{ctg} x - \sin(2x) = \operatorname{ctg} x \cos(2x).$$

1990. N 2.

3. Határozza meg mindazokat az x valós számokat, amelyekre teljesül, hogy $0 \leq x \leq 2\pi$ és

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos 2x = 0.$$

1995. N 4.

4. Oldja meg a következő egyenleteket:

$$\text{a) } \sqrt{2x} - \sqrt{18x} = 2; \quad \text{b) } 5^{x+3} \cdot 2^{x-1} = 375; \quad \text{c) } \frac{(\cos x + \sin x + 1)(\cos x + \sin x - 1)}{\sin 2x} = 1.$$

1976. G 4.

5. Oldja meg a $\cos 2x + \sqrt{3} \cos x - 2 \leq 0$ egyenlőtlenséget a $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ feltételt kielégítő valós számok halmazán!

1995. G 6.

6. Jelölje α , β és γ egy háromszög szögeinek mérőszámait! Bizonyítsa be, hogy ha

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2,$$

akkor a háromszög derékszögű!

1978. N 7.

7. Az m valós paraméter mely értékeire van megoldása a

$$\cos 2x - m \cos x + 1 - 3m^2 = 0$$

egyenletnek?

1982. N sz 8.

Trigonometria XI.

VIII. sorozat

1. Számítsuk ki $\sin 4x$ értékét, ha $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

1966. N 5.

2. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

1982. G 4.

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$8 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cos x = 7.$$

1991. G 4.

4. Az ABC háromszög AA_1 súlyvonala merőleges AB -re. Jelöljük a háromszög BC ; AC és AB oldalának hosszát rendre a -val, b -vel és c -vel! Fejezze ki a CAB szög cosinusát b és c , a BCA szög cosinusát pedig a és b függvényeként!

1987. G sz 7.

5. Igazolja, hogy a következő egyenletnek nincs gyöke a valós számok halmazán:

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin(4x) = 2.$$

1989. G 7.

6. Bizonyítsa be, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha α ; β és γ szögeire fennáll:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

1985. N sz 8.

7. Mely pozitív c értékekre van megoldása a valós számok körében a

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + 2c(c+1) = 0$$

egyenletnek? Adja meg az egyenlet megoldását a c lehetséges legnagyobb és legkisebb értéke esetén!

1983. N sz 8.

Trigonometria XI.

IX. sorozat

0. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos számértékét (ne használjon szögfüggvénytáblázatot):

$$\frac{1}{(1 - \cos 15^\circ)(1 + \sin 75^\circ)} - 8 \sin 60^\circ.$$

1976. N 3.

2. Oldja meg a $\sin 4x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} x$ egyenletet!

1977. N 4.

3. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\sin 3x - \cos 2x + \sin x = 1.$$

1981. N g 6.

4. Oldja meg a következő egyenletet:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right).$$

1979. N sz 6.

5. Mely valósszám-párok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y; \\ \cos 2x = 0? \end{cases}$$

1983. N g 6.

6. Határozza meg mindazokat a valós $(a; b)$ számpárokat, amelyekre a

$$\cos(ax + b^2) - (a \cos x + b^2) = 1 - a$$

egyenlőség minden valós x értékre teljesül!

1990. G 8.

7. Bizonyítsa be, hogy ha $\cos(\alpha + \beta) = 0$, akkor $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha$. Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása?

1976. G 8.

Vektorok

IX. sorozat

11. Legyen A , B és C egy egyenes három pontja (B az A és a C között van). Az egyenesnek ugyanarra az oldalára rajzolja meg az ABD és a BCE szabályos háromszögeket! Jelölje a CD szakasz felezőpontját P -vel, az AE szakaszét pedig R -rel! Igazolja, hogy a BPR háromszög szabályos!

1974. G 7.

12. Egy ABC háromszög AB oldalegyenesén B -n túl vegyünk fel egy P pontot, a BC oldalegyenesen C -n túl egy Q pontot, és a CA oldalegyenesen A -n túl egy R pontot úgy, hogy $\frac{PA}{BA} = \frac{QB}{CB} = \frac{RC}{AC}$ legyen! Bizonyítsa be, hogy az ABC és a PQR háromszög súlypontja egybeesik!

1978. G 5.

21. Legyen $ABCD$ egy síkbeli négyszög. Adjon eljárást annak a P pontnak a szerkesztésére, amelyre

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = \mathbf{0}!$$

1986. N g 6.

22. Az $ABCD$ négyszög síkjában tetszőlegesen felvett P pontnak A -ra vonatkozó tükörképe Q , a B -re vonatkozó tükörképe pedig R . Bizonyítsa be, hogy az $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha Q -nak D -re vonatkozó tükörképe egybeesik R -nek C -re vonatkozó tükörképével!

1988. G A 8.

31. Legyenek a és b olyan valós számok, hogy $a > b$ és $ab = 1$. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}.$$

1987. G sz 8.

Térgeometria

I. sorozat

1. Egy C középpontú, 3 egységnyi sugarú körnek CA és CB sugarai 120° -os szöget zárnak be egymással. Egy kúpot úgy helyeztünk a kör síkjára, hogy alapköre érinti az AB körívet, valamint a CA és CB szakaszt. A kúp magassága AB hosszúságú. Határozza meg a kúp térfogatát!
1991. G 3.
2. Az $ABCD$ háromoldalú gúlán $AD = BD = CD = a$, $ADB\angle = 60^\circ$, $ADC\angle = 90^\circ$, $BDC\angle = 120^\circ$. Számítsa ki a gúla felszínét!
1979. N 5.
3. Két egyenes henger térfogatának különbsége 48π , a palástok területének különbsége 24π . A nagyobb térfogatú henger alapkörének sugara 1-gyel nagyobb a másikénál, magassága pedig a másik magasságának $\frac{4}{3}$ -szorosa. Mekkora a hengerek magassága és alapkörüknek sugara?
1988. N B 6.
4. Mekkora az R sugarú gömb köré írt csonkakúp felszíne és térfogata, ha alapkörének sugara kétszerese fedőköré sugarának?
1970. N 4.
5. Egy négyoldalú szabályos gúlába forgáshengert helyezünk el úgy, hogy a henger tengelyének egyenesese egybeesik a gúla magasságának egyenesével. A gúla alapéle és magassága egyaránt 6 egység. Mekkora a hengerpalást felszínének maximuma?
1979. G 5.
6. Az $ABCD A'B'C'D'$ kocka B' csúcsának a C' csúcsra vonatkozó tükörképe legyen M . Az $MA'B$ sík a kockából egy négyszöget vág ki. Mekkora ennek a négyszögnek a területe, ha a kocka éle 10 cm?
1989. G 6.
7. Egy a alapélű négyzetes oszlop magassága az alapél négyszerese. Kössük össze a fedőlap egyik csúcsát az alaplap négy csúcsával! Mekkora a keletkezett gúla felszíne? Mekkora a két legnagyobb területű oldallap által bezárt szög?
1984. G sz 7.
8. Jelöljük az $ABCDEF$ szabályos hatszög alapú egyenes gúla csúcsát G -vel, az AG és az FG oldalélek felezőpontját P -vel, illetve R -rel! Igazolja, hogy a $BERP$ négyszög trapéz! Számítsa ki a $BERP$ trapéz és az AFG háromszög területének arányát!
1978. G 6.

Térgeometria

II. sorozat

1. Egy egyenes hengert a tengelyével párhuzamos síkkal elmeteszünk. A síkmetszet területe 96, a tengelytől való távolsága 3, a hengerpalást területe 120π . Mekkora a henger sugara és magassága?
1996. N 4.
2. Egy nem-egyenlő szárú derékszögű háromszöget a rövidebb befogója körül megforgatva olyan forgástest keletkezik, amelynek a felszíne 300π , a térfogata 240π . Mekkora a háromszög oldalai?
1993. G 7.
3. Egy 6 cm élű kocka minden csúcsát levágjuk egy-egy olyan síkkal, amely a csúcsból kiinduló éleket a csúctól 2 cm távolságra metszi. Állapítsa meg az így keletkezett test csúcsainak, éleinek és lapjainak számát, valamint számítsa ki felszínét és térfogatát!
1985. N sz 6.
4. Egy gömb köré csonkakúpot írunk úgy, hogy a csonkakúp alap- és fedőköre egy-egy pontban, palástja pedig egy körben érinti a gömböt. Mekkora a csonkakúp térfogatának és felszínének a hányadosa, és mekkora az alap- és fedőkör sugarainak a szorzata, ha a gömb sugara 6 egység?
1990. N 6.
5. Egy szabályos négyoldalú gúla minden éle egyenlő. A gúlába írt kocka alaplappja a gúla alaplappján van, fedőlapjának csúcsai pedig a gúla oldalélein. Hányszorosa a gúla térfogata a kocka térfogatának?
1991. N 6.
6. Egy kocka csúcsait az ábrán látható módon jelöltük meg. [PQRS alatt TUVW.] Legyen a $TUVW$ lap középpontja A , az $UVRQ$ lapé pedig B . Az UV él a PAB síkot az X pontban metszi. Mekkora az $\frac{UX}{VX}$ hányados értéke?
1987. N sz 7.
7. Egy egyenes körkúp alapkörének egyik húrja az alapkör középpontjától 1 egység távolságra van, és a hozzá tartozó középponti szög 120° . Az adott húrra és a kúp csúcsára illeszkedő sík 30° -os szöget zár be az alaplappal. Számítsa ki a kúp felszínét!
1983. N 4.
8. Egy hatoldalú szabályos gúla alapéle 12, magassága 18. Mekkora a körülírt és a beírt gömb sugara?
1981. N g 7.

Térgeometria

III. sorozat

1. Egy egyenes hasáb alaplapja olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik hegyesszöge 30° -os, az ezzel szemközti befogója 2 hosszúságú. Tudjuk, hogy a hasábra gömb írható. Számítsa ki a hasáb térfogatát!
1981. N sz 6.
2. Forgassuk meg az ABC háromszöget először az AB , majd a BC oldala körül. Bizonyítsa be, hogy az így kapott forgástestek térfogatának aránya $\frac{BC}{AB}$ -vel egyenlő!
1973. N 7.
5. Egy négyoldalú szabályos gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, az alaplapon kívüli csúcsa O , a gúla valamennyi élének hossza h . Mekkora területű négyszöget metsz ki a gúlából az AB alapélre és az OC oldalél F felezőpontjára illesztett sík? Mekkora szöget zár be a metsző sík a gúla alaplapjával?
1986. G g 7.
6. Egy a élű kockán kiválasztunk két szemközti lapot, és mindkét lap középpontját összekötjük a szemközti lapon lévő csúcspontokkal. Bizonyítsa be, hogy az így nyert két gúla oldalélei páronként metszik egymást, és számítsa ki a két gúla közös részének térfogatát!
1974. N 7.
7. Az $OABC$ háromoldalú gúla ABC alaplapja egyenlő szárú derékszögű háromszög, mégpedig $ABC\angle = 90^\circ$. Az $OC = 3\sqrt{3}$, és ez az oldalél merőleges az alaplap síkjára. Az OAB oldallap az alaplap síkjával 60° -os szöget zár be. Számítsa ki a gúla felszínét és térfogatát!
1986. N 5.
8. Az α és β síkok merőlegesek egymásra; az A pont az α , a B pont a β sík egy-egy tetszőleges pontja. Jelöljük A' -vel, illetve B' -vel az A , illetve B pont merőleges vetületét a két sík metszésvonalán; legyen továbbá F az AB szakasz felezőpontja. Bizonyítsa be, hogy $FA' = FB'$!
1972. N 5.

Térgeometria

IV. sorozat

1. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb valamennyi lapját érinti egy gömb. Határozza meg a gömb A_1 felszínét, ha a hasáb felszíne A_2 !

1994. N 5.

2. Forgasson meg egy egyenlő szárú háromszöget egyik szára, majd az alapja körül. Jelölje V_1 , illetve V_2 az így keletkezett forgástestek térfogatát. Számítsa ki a háromszög szögeit, ha

$$V_1 : V_2 = 3 : 7!$$

1992. N 6.

4. Az r_1 és r_2 sugarú körök egymást kívülről érintik. Egyik közös külső érintőjüknek az érintési pontok közé eső szakaszát megforgatjuk a körök középpontjain áthaladó egyenes körül. Számítsuk ki a keletkező csonkakúp palástjának területét!

1968. N 7.

5. Egy négyzetes gúla alapéle 12 cm, az oldalélek egyenlő hosszúak. A szomszédos oldallapok 120° -os szöget zárnak be egymással. Határozza meg a gúla térfogatát!

1994. G 8.

6. Egy egységnyi oldalú kockának tekintsük azt a négy csúcsát, amelyek közül bármelyik kettő nem esik a kockának ugyanazon élére. A négy pont által meghatározott tetraédert messük el olyan síkkal, amely a tetraéder két szemközti élével párhuzamos. Az összes ilyen síkot figyelembe véve mennyi lesz a keletkezett síkmetszet kerületének és területének maximális értéke?

1988. N A 8.

7. Egy háromoldalú gúla alaplappja szabályos háromszög, oldallapjai egybevágó, egyenlő szárú háromszögek. Az egyik oldalélen átmenő és ezzel szemközti alapélre merőleges síkmetszet területe 150 cm^2 . A gúla térfogata 1500 cm^3 . Mekkora szöget zár be egy-egy oldallap az alaplappal?

1987. G 5.

8. Egy szabályos tetraéder alaplappjának belsejében válasszunk ki egy tetszőleges P pontot, és ebben a pontban állítsunk merőlegest az alaplapp síkjára. Ez a merőleges az oldallapok síkjait rendre az X , Y és Z pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy a $PX + PY + PZ$ összeg független P választásától!

1993. N 8.

Oszthatóság

I. sorozat

1. Keresse meg mindazokat a pozitív egész x és y számokat, amelyek négyzeteinek különbsége 133.
1971. N 7.
2. a) Mutassa meg, hogy nincs olyan n egész szám, amelyre az $\frac{n-6}{15}$ és $\frac{n-5}{24}$ kifejezések értéke egyszerre egész szám lenne!
b) Bizonyítsa be, hogy ha egy négyzetszámot elosztunk 16-tal, akkor maradékul is négyzetszámot kapunk!
1985. G g 7.
3. Határozza meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek kielégítik az $xy^2 + 2xy + x - 243y = 0$ egyenletet!
1974. G 8.
4. Melyik az a négyjegyű szám, amellyel 25707-et osztva 32-t, 37568-at osztva pedig 43-at kapunk maradékul?
1975. G 8.
6. Bizonyítsa be, hogy minden 6-ra végződő négyzetszámban a tízesek helyén páratlan szám áll! (Négyzetszámon egész szám négyzetét értjük.)
1969. N 6.
7. Bizonyítsa be, hogy egymást követő pozitív egész számok összege nem lehet 2-nek pozitív egész kitevős hatványa!
1981. G sz 8.

Oszthatóság

II. sorozat

1. Hány olyan különböző $(x; y)$ számpár elégíti ki az

$$x^2 - y^2 = 1980$$

egyenletet, amelyeknek elemei pozitív egész számok?

1980. G sz 8.

2. Határozza meg azokat az a és b egész számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$a + b + 20 = ab,$$

és az a , b , 21 hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető!

1996. G sz 8.

3. Melyek azok az n egész számok, amelyekre a $2n^2 - n - 36$ egy prímszám négyzetével egyenlő?

1994. G sz 7.

5. Oldja meg a következő egyenletet, ha tudja, hogy p prímszám és n pozitív egész szám:

$$1 + p + p^2 + \dots + p^n = 2801.$$

1988. N A 7.

6. a) Mutassa meg, hogy nincs olyan n egész szám, amelyre az $\frac{n-6}{15}$ és $\frac{n-5}{24}$ kifejezések értéke egyszerre egész szám lenne!

b) Bizonyítsa be, hogy ha egy négyzetszámot elosztunk 16-tal, akkor maradékul is négyzetszámot kapunk!

1985. G sz 7.

7. Bizonyítsa be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor

a) 81 osztója a $10^n(9n - 1) + 1$;

b) 1990 osztója a $(600^n - 3^n)(n^5 - n)$

kifejezésnek!

1990. N sz 8.

Oszthatóság

III. sorozat

1. Egy háromjegyű szám számjegyeit fordított sorrendbe írva olyan, nála kisebb háromjegyű számot kapunk, hogy a két szám négyzetének a különbsége osztható 1980-nal. Hány ilyen háromjegyű szám van és melyek ezek?
1994. N 8.

2. Számítsa ki az összes olyan x valós számot, amelyre a

$$2x - 3; \quad 5x - 14 \quad \text{és} \quad \frac{2x - 3}{5x - 14}$$

számok mindegyike egész szám!

1985. N g 8.

3. Egy táblára felírjuk 1-gyel kezdve az egymás utáni pozitív egész számokat egy bizonyos számig. Majd a felírt számok közül egyet letörlünk. A megmaradt számok számtani közepe $\frac{602}{17}$. Melyik számot töröltük le?

1986. G g 8.

4. Melyek azok az x, y, z pozitív egész számok, amelyekre egyidejűleg teljesül a következő két egyenlőség:

$$\begin{cases} x + y + z = 12; \\ xy + xz + yz = 41? \end{cases}$$

1995. N 7.

5. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Mennyi a maradék, ha az $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ összeget elosztjuk 4-gyel?
1975. N 8.

7. Bizonyítsa be, hogy ha az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény értéke minden egész x -re egész, akkor a $2a$, az $a + b$ és a c is egész! Igaz-e ennek a tételnek a megfordítása?

1974. N 8.