
1973. G 8. Egy számtani sorozat első n elemének összege egyenlő az első m elemének az összegével ($n \neq m$).

Bizonyítsa be, hogy az első $n + m$ elem összege nulla!

Lássunk néhány példát... Vegyünk egy konkrét esetet: legyen $a_1 = 1$, $d = 2$, $m = 15$. Az első 15 elem összegét S_{15} -tel jelölve az első 16 elem összege a_{16} -tal lesz *több* S_{15} -nél, az első 17 elem összegéhez a_{17} -tel kell tovább *növelni*: ha 15-nél több kezdő elem összegét tekintjük, az nyilván *nagyobb* lesz S_{15} -nél.

Az előző gondolat nyilván általánosítható: ha a kezdő tag pozitív és a különbség is pozitív, akkor nemcsak a sorozat növekvő, hanem n növelésével az első n tag összege is egyre nagyobb lesz. Hasonlóképpen negatív kezdő tag és negatív különbség esetén tetszőleges n -re negatív S_n -et kapunk, amit további tagok hozzáadásával tovább *csökkentünk*. Ugyanez a helyzet $a_1 = 0$ esetén is: ha $d > 0$, akkor az első két tag összege pozitív, további tagok hozzáadásával pedig *növeljük* az összeget, ha pedig $d < 0$, akkor az első két tag összege negatív, további tagok hozzáadásával pedig *csökkentjük* az összeget: mindezen esetekben lehetetlen tehát, hogy $S_n = S_m$ legyen (a feladat megkövetelte $n \neq m$ esetén).

Módszeresen tovább vizsgálva a lehetőségeket könnyen belátható, hogy konstans sorozatok sem pozitív, sem negatív kezdő taggal nem felelhetnek meg a feladat feltételének; a (nem túl érdekes) $a_1 = 0$, $d = 0$ sorozatra viszont $S_n = S_m$ (hiszen mindkettő 0), és természetesen S_{n+m} is 0 lesz (hiszen tetszőleges tagok összege nullát ad).

Mindezek után az (előjeleket tekintve) kilenc lehetséges esetből kettővel kell foglalkoznunk: $a_1 > 0$ és $d < 0$ vagy $a_1 < 0$ és $d > 0$.

Ezeket a feltételeket persze hamarabb is felismerhettük. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $n < m$ (ha nem így lenne, akkor a következőkben cseréljük fel az m és n betűket, így a leírtak változatlanul érvényben maradnak). Ezek után S_m előállítható úgy, hogy az első n tag összegéhez hozzáadjuk az $n + 1.$, $n + 2.$, ..., $m.$ tagot, azaz ha $S_n = S_m$, akkor ez azt jelenti, hogy $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m = 0$. (Ha ez túl elvontnak tűnik, első körben gondoljuk végig ezeket az állításokat például $n = 15$, $m = 20$ esetén: az $S_{20} = S_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$ összefüggés, illetve az $S_{15} = S_{20}$ feltételből következő $a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} = 0$ egyenlőség biztosan könnyebben emészthető.)

Ez utóbbi viszont azt jelenti (akár a konkrét, akár az általános esetet nézzük), hogy ha az $n + 1.$ elemtől az $m.$ elemig (a 16. elemtől a 20. elemig) újonnan megjelenő tagok közül a középső nulla ($a_{18} = 0$), akkor az $S_n = S_m$ feltétel biztosan teljesül, hiszen ismeretlenként célszerűen a középső elemet választva és a többi ahhoz képest $\pm d$, $\pm 2d$, ... segítségével felírva az $(S_n$ és S_m különbségét megadó) összeg 0 lesz, mivel a szimmetrikusan elhelyezkedő tagok páronként egymás ellentettjei – legalábbis akkor, ha van középső elem.

Az imént írtakkal megadtunk egy *elégséges* feltételt ahhoz, hogy $S_n = S_m$ legyen – de ez a feltétel vajon szükséges is? És mit mondhatunk arról az esetről, amikor $m - n$ páros, ezért nincs középső elem az új tagok között?

Bizonyítás a példák nyomán Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $n < m$ (ha nem így lenne, akkor betűcserével lesznek igazak a továbbiak). Nevezzük az első n tagot *régi* tagnak, az ezeket követő $n + 1$, $n + 2$, ..., m . tagot *új* tagnak. A régi tagok száma nyilván n , az új tagoké pedig $m - n$.

Ha $m - n$ páratlan, akkor az új elemek között lesz középső (a_{n+1} , a_{n+2} , ..., a_m közül $a_{\frac{n+m+1}{2}}$); jelölje ezt μ (μ , mint medián). Ezzel a jelöléssel a középső tagtól, azaz μ -tól kétfelé indulva $\mu \pm d$, $\mu \pm 2d$, ... adja meg a szomszédos, másodszomszédos s a többi tagokat (és mivel μ a középső elem, ez a felsorolás egyszerre fog véget érni az első, illetve az utolsó új elemnél).

Ha $m - n$ páros, akkor az új elemek között két középső lesz ($a_{\frac{n+m}{2}}$, illetve $a_{\frac{n+m}{2}+1}$), jelölje ezek számtani közepét μ (μ , mint medián). Ezzel a jelöléssel a középső két tag $\mu \pm \frac{d}{2}$, ezektől kétfelé indulva $\mu \pm \frac{3d}{2}$, $\mu \pm \frac{5d}{2}$, ... adja meg a szomszédos, másodszomszédos s a többi tagokat (és mivel μ a középső elem, ez a felsorolás egyszerre fog véget érni az első, illetve az utolsó új elemnél).

Függetlenül azonban $m - n$ paritásától megállapíthatjuk, hogy az új tagok összege $(m - n)\mu$, hiszen a tagok összegét felírva d többszörösei (a középső elemre, illetve a középső két elem közötti tengelyre szimmetrikusan) páronként kiesnek. És mivel a feladat feltétele szerint $S_n = S_m$, a két összeg közötti különbséget pedig az új elemek adják, $\mu = 0$ (ugyancsak a feladat feltétele szerint $m \neq n$: létezik új elem, oszthatunk $(m - n)$ -nel).

Térjünk rá végül az $S_{m+n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+n})$ összeg vizsgálatára.

Ennek az összegnek az első zárójeles csoportját az n régi elem alkotja, ezt követi $m - n$ új elem, végül $(m + n) - m$, azaz n még újabb elem.

Írjuk fel az S_{m+n} összeget is μ segítségével. μ a középső csoport közepén helyezkedik el (vagy a középső elemként, vagy a középső két elem közötti számtani középként), azaz a középső csoportban ugyanannyi elem áll előtte, mint mögötte. És mivel régi elemből éppen úgy n darab van, mint legújabból, μ egyúttal az összes elem között is középen áll. Az imént írtak szerint a feladat feltételéből következően $\mu = 0$, μ -tól kétfelé indulva pedig $0 \pm d$, $0 \pm 2d$, ... vagy $\mu \pm \frac{d}{2}$, $\mu \pm \frac{3d}{2}$, ... ismét megadja a szomszédos, másodszomszédos s a többi tagokat (és mivel μ az összes vizsgált elemre nézve is középen áll, ez a felsorolás egyszerre fog véget érni az első *régi*, illetve az utolsó *legújabb* elemnél). Ismét megállapíthatjuk tehát, hogy a sorozat első $m + n$ tagjának összegét felírva d többszörösei (a középső elemre, illetve a középső két elem közötti tengelyre szimmetrikusan) páronként kiesnek, vagyis $S_{m+n} = 0$, és éppen azt akartuk bizonyítani.

Bizonyítás az összegképletből Azt kell belátnunk, hogy (számtani sorozat esetén a szokásos jelölések mellett) $S_n = S_m \implies S_{n+m} = 0$.

Átrendezve az egyenlőséget és felhasználva a számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képletet

$$n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} - m \cdot \frac{2a_1 + (m-1)d}{2} = 0 \quad | \cdot 2 \quad (1)$$

$$2na_1 + n(n-1)d - (2ma_1 + m(m-1)d) = 0 \quad (2)$$

$$2na_1 + n(n-1)d - 2ma_1 - m(m-1)d = 0 \quad (3)$$

$$2na_1 + n^2d - nd - 2ma_1 - m^2d + md = 0 \quad (4)$$

$$2na_1 - 2ma_1 + n^2d - m^2d - nd + md = 0 \quad (5)$$

$$2(n-m)a_1 + (n^2 - m^2)d - (n-m)d = 0 \quad (6)$$

$$2(n-m)a_1 + (n+m)(n-m)d - (n-m)d = 0 \quad (7)$$

$$(n-m)(2a_1 + (n+m)d - d) = 0 \quad | : (n-m) \quad (8)$$

$$2a_1 + (n+m)d - d = 0 \quad (9)$$

$$2a_1 + (n+m-1)d = 0 \quad | \cdot (n+m) : 2 \quad (10)$$

$$(n+m) \cdot \frac{2a_1 + (n+m-1)d}{2} = 0 \quad (11)$$

Kérdezheti persze bárki: hogy lehet megtalálni a célszerű lépéseket? Ha felírjuk a kiindulási állítást ($S_n = S_m$), valamint az elérendő célt ($S_{n+m} = 0$), akkor indokoltnak látszik az első egyenletet nullára rendezni: (1). A 2-vel való szorzás nem szükségszerű (sőt, mint később látjuk, tulajdonképpen felesleges), de a következő sorokat egyszerűbbé teszi: (2). Ha egy egyenlet jobb oldalán 0 áll, akkor indokolt lehet szorzat alakra törekedni, ehhez célszerűnek látszik a kivonás, illetve szorzás utáni zárójelet felbontani (3), (4). a_1 és d kiemeléséhez átrendezzük a tagok sorrendjét: (5), (6). $n^2 - m^2$ felbontása után már látni lehet a kiemelés, osztás lehetőségét: (7), (8), (9). S ha végül még egyszer ránézünk az elérendő összegképletre, akkor az utolsó két sor természetes módon adódik: (10), (11).

Az előző levezetésben azt látjuk, hogy a 2-vel való szorzást később egy 2-vel való osztás követi; azt látjuk, hogy a d -vel való beszorzást később d kiemelése követi. Ezeket a lépéseket elhagyhatjuk, de a számolás nem feltétlenül egyszerűsödik:

$$n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} - m \cdot \frac{2a_1 + (m-1)d}{2} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{2na_1 + n(n-1)d - 2ma_1 - m(m-1)d}{2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{2na_1 - 2ma_1 + n(n-1)d - m(m-1)d}{2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{2(n-m)a_1 + (n(n-1) - m(m-1))d}{2} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{2(n-m)a_1 + (n^2 - n - m^2 + m)d}{2} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{2(n-m)a_1 + (n^2 - m^2 - n + m)d}{2} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{2(n-m)a_1 + ((n+m)(n-m) - (n-m))d}{2} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{2(n-m)a_1 + (n+m-1)(n-m)d}{2} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{(n-m)(2a_1 + (n+m-1)d)}{2} = 0 \quad | : (n-m) \quad (20)$$

$$\frac{2a_1 + (n+m-1)d}{2} = 0 \quad | \cdot (n+m) \quad (21)$$

$$(n+m) \cdot \frac{2a_1 + (n+m-1)d}{2} = 0 \quad (22)$$