ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2006. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

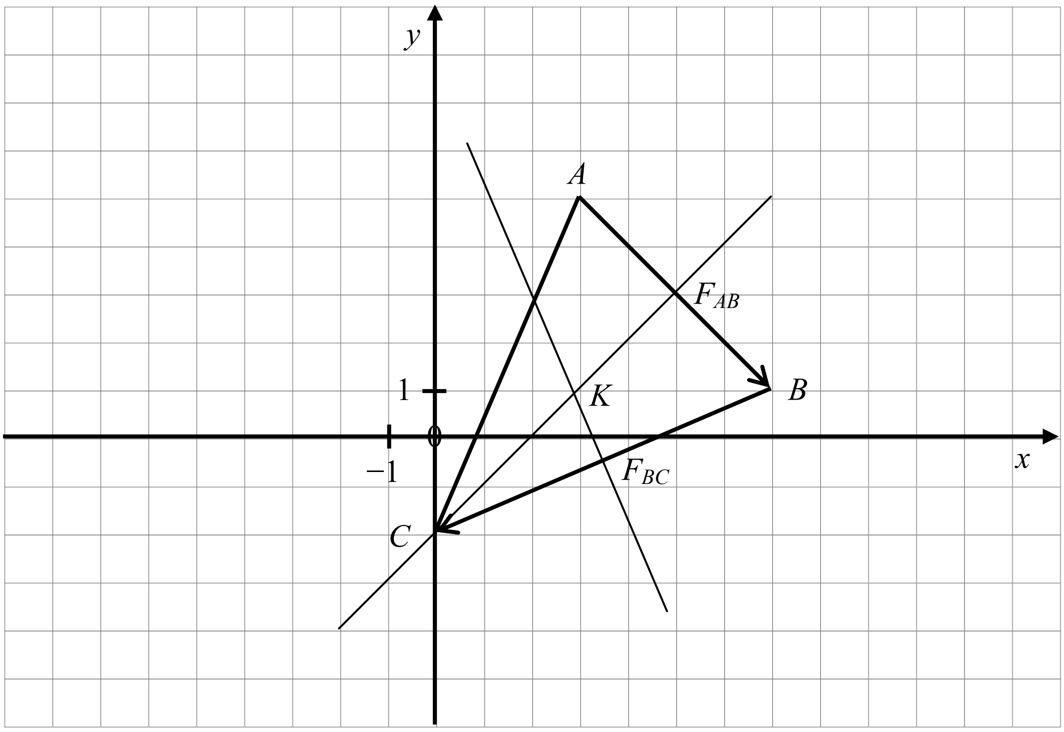
- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)



A háromszög C csúcsát az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az y tengelyből. AB felezőpontja: $F_{AB}(5;3)$.	1 pont	
AB felezőmerőlegesének egyik normálvektora: $\overrightarrow{AB}(4;-4)$.	1 pont	
AB felezőmerőlegesének egyenlete: $x-y=2$.	1pont	
Az AB alappal szemközti csúcs: $C(0;-2)$.	1 pont	*Ha a C csúcs koordinátáit egy jó ábráról olvassa le a vizsgázó számítások nélkül, akkor az előző 4 pontból legfeljebb 2 pont adható.*
Összesen:	**4 pont**	

b)

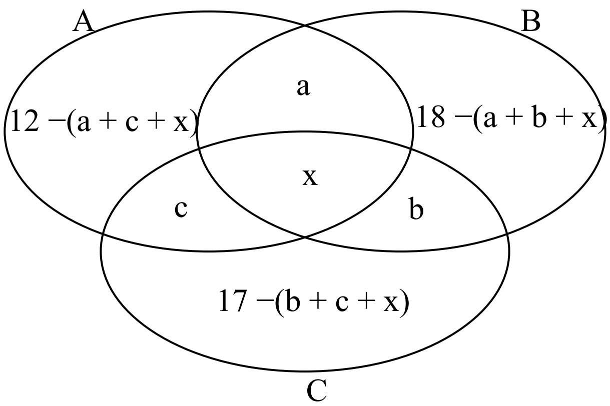
A köré írt kör középpontja az AB alap felezőmerőlegesének és valamelyik szár felezőmerőlegesének a metszéspontja.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a gondolatmenet a számolásból látszik.*
A BC oldal felezőpontja: $F_{BC}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.	1 pont	
BC felezőmerőlegesének egyik normálvektora: $\overrightarrow{CB}(7;3)$.	1 pont	
BC felezőmerőlegesének egyenlete: $7x+3y=23$.	1 pont	

AB felezőmerőlegesének egyenletéből és BC felezőmerőlegesének egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása $x = 2{,}9$; $y = 0{,}9$, így a köré írt kör középpontja: $K(2{,}9;\ 0{,}9)$.	2 pont	
A köré írt kör sugarának négyzete: $r^2 = KC^2 = 2 \cdot 2{,}9^2 = 16{,}82$.	1 pont	
A háromszög köré írt kör egyenlete: $(x-2{,}9)^2 + (y-0{,}9)^2 = 16{,}82$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2.		
A piros kocka élének hossza *a*, a kék kocka élének hossza *b*. A piros kocka felszíne $6a^2$, a kék kockáé $6b^2$.	2 pont	
A feltétel alapján: $6a^2 = \frac{3}{4} \cdot 6b^2$.	3 pont	
Ebből, felhasználva, hogy $a > 0$ és $b > 0$: $a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$.	2 pont	
A piros kocka térfogata a kék kocka térfogatával kifejezve: $a^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} b^3$.	3 pont	
Mivel $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}65$, ezért a piros kocka térfogata a kék kocka térfogatának $\approx 65\%$-a.	1 pont	
Tehát a piros kocka térfogata kb. 35%-kal kisebb, mint a kék kocka térfogata.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

3. a)		
Ha x_1, x_2 az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet gyökei, akkor $x_1 + 1, x_2 + 1$ az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet gyökei.	2 pont	*Ez a pontszám akkor is jár, ha a gyököket paraméteresen a megoldóképlettel írja fel a vizsgázó.*
Mindkét egyenlet esetén a gyökök összegére vonatkozó Viète-formulák: $x_1 + x_2 = 1$ és $(x_1+1)+(x_2+1) = -p$.	3 pont	*Ez a 3 pont a megoldóképlettel kapott gyökök megfelelő párosításáért is adható.*
Ezekből adódik, hogy $p = -3$ lehet.	3 pont	
$p = -3$ esetén mindkét egyenletnek valós gyökei vannak.	1 pont	*Ez az 1 pont a diszkrimináns vizsgálatáért is adható.*
Összesen:	**9 pont**	

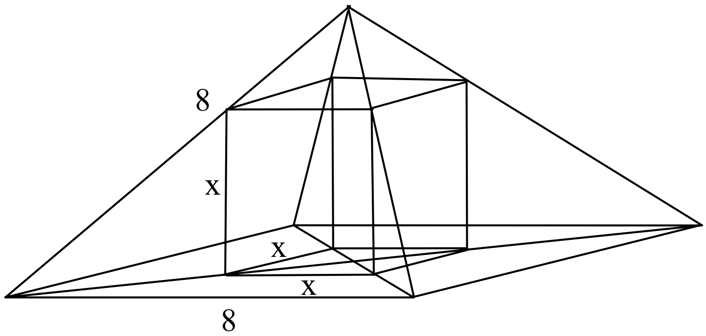
b)		
Az $x^2 - x + 5 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért nincsenek valós gyökei.	2 pont	
Az $x^2 + 5x - 1 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{-5+\sqrt{29}}{2} (\approx 0{,}19)$; $x_2 = \frac{-5-\sqrt{29}}{2} (\approx -5{,}19)$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

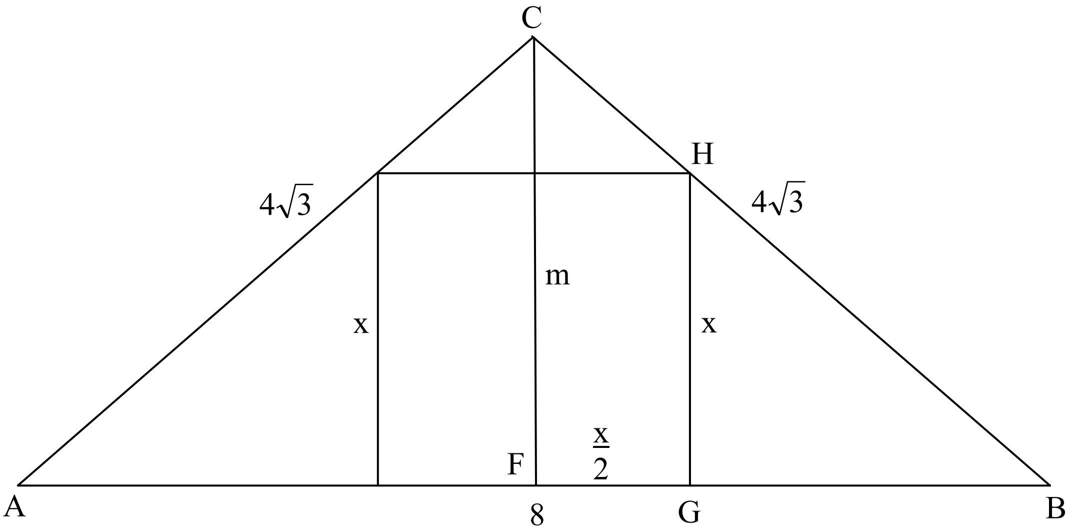
4. a) (1. megoldás)		
Jelölje rendre A, B és C a számítógép kutatásban, oktatásban és kommunikációban betöltött szerepéről publikáló tudósok halmazát. A feladat feltételei ezzel a jelöléssel: $\lvert A\rvert = 12,\quad \lvert B\rvert = 18,\quad \lvert C\rvert = 17,\quad \lvert A \cup B \cup C\rvert = 30.$	1 pont	
$\lvert A \cap B\rvert + \lvert B \cap C\rvert + \lvert C \cap A\rvert - 3 \cdot \lvert A \cap B \cap C\rvert = 7.$	2 pont	
A logikai szita formulát alkalmazva: $30 = \lvert A \cup B \cup C\rvert =$ $= \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert A \cap B\rvert - \lvert B \cap C\rvert - \lvert C \cap A\rvert + \lvert A \cap B \cap C\rvert =$ $= 12 + 18 + 17 - 7 - 2 \cdot \lvert A \cap B \cap C\rvert.$	3 pont	
Ebből adódik, hogy $\lvert A \cap B \cap C\rvert = 5$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.	2 pont	
Összesen:	**10 pont**	
a) (2. megoldás)		
	3 pont	
A feltételek alapján: (1) $a + b + c = 7$.	1 pont	
(2) $x + a + b + c + 12 - (a + c + x) + 18 - (a + b + x) + 17 - (b + c + x) = 30$	2 pont	

A (2) bal oldalán elvégezve az összevonásokat: $47-2x-(a+b+c)=30$.	1 pont	
(1) behelyettesítése és rendezés után adódik, hogy $x=5$.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $P=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.	2 pont	
Összesen:	**10 pont**	
b)		
5 tudós publikált mindhárom témában, 7 tudós pontosan két témában, így 12 olyan tudós van, akik legalább két témában publikáltak.	2 pont	
A specialisták száma így $30-12=18$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II.

5. a)



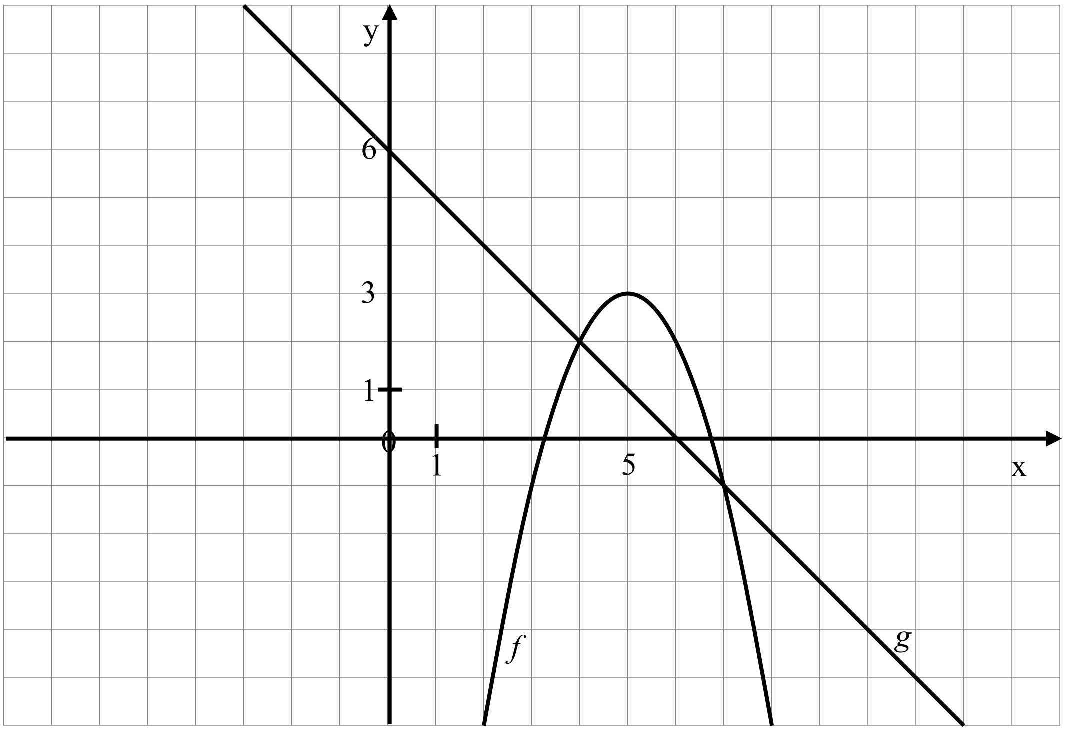


A tetőtéri helyiség oldalélének meghatározásához vegyük a gúla csúcsára és két szemközti alapél felezőpontjára illeszkedő síkmetszetét.	2 pont	*Ez a 2 pont a térbeli viszonyok helyes elképzelését tükröző ábra esetén is jár.*
Ez egy egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 8, szára $4\sqrt{3}$ méter hosszú.	1 pont	
Ennek a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tétele alapján $m = 4\sqrt{2}$ (m).	1 pont	
A síkmetszet ábrájának jelöléseit használva a *CFB* derékszögű háromszög hasonló a *HGB* derékszögű háromszöghöz,	1 pont	
ugyanis az *FBC* szög közös hegyesszög.	1 pont	

Ha x jelöli a kocka élének hosszát (síkmetszetben a háromszögbe beírt négyzet oldalát), akkor a hasonlóság alapján $\dfrac{x}{4-\dfrac{x}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$,	1 pont	
ahonnan $x=\dfrac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\approx 3{,}3\,(\mathrm{m})$.	1 pont	
A helyiség alapterülete: $T=x^2=\dfrac{64}{3+2\sqrt{2}}\approx 11\,\mathrm{m}^2$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	
b)		
A gúla magassága az előzőek alapján $m=4\sqrt{2}$.	1 pont	
A tetőtér (gúla) térfogata így: $V_t=\dfrac{8^2\cdot 4\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3=\dfrac{256\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3\approx 120{,}68\,\mathrm{m}^3$.	2 pont	*A megfelelő pontszámok a közelítő értékek feltüntetése nélkül is járnak.*
A kocka térfogata: $V_k=\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3\mathrm{m}^3=\dfrac{1024\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\,\mathrm{m}^3\approx 36{,}38\,\mathrm{m}^3$.	2 pont	
A térfogatok aránya: $\dfrac{V_k}{V_t}=\dfrac{12}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\approx 0{,}3015$.	1 pont	
A helyiség közelítőleg 30%-át foglalja el a légtérnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. a)		
A megoldandó egyenlet: $-x^2+10x-22=-x+6$. Átalakítva: $x^2-11x+28=0$.	1 pont	
A megoldások: $x_1=4, x_2=7$.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	
b)		
A metszéspontokba húzható érintők meredeksége: $m_1=f'(x_1)$, illetve $m_2=f'(x_2)$, $f'(x)=-2x+10$.	1 pont	
Így $m_1=f'(4)=2$ és $m_2=f'(7)=-4$.	2 pont	
A két grafikon metszéspontjai: $M_1(4;2)$, illetve $M_2(7;-1)$.	2 pont	
A két érintő egyenlete: $e_1:\ y-2=2(x-4)$, vagy más alakban $y=2x-6$,	1 pont	*Az érintők egyenletének bármelyik jól felírt alakjáért járnak a megfelelő pontszámok.*
$e_2:\ y+1=-4(x-7)$, vagy más alakban $y=-4x+27$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

c)



f és *g* grafikonjának ábrázolása.	1 pont	*Legfeljebb 4 pont adható, ha a vizsgázó hibásan ábrázolja a függvényeket, és a hibás adatokkal (rossz intervallumon) számol. A megfelelő pontszám akkor is jár, ha a vizsgázó külön számolja ki a megfelelő integrálokat és kivonja őket egymásból, vagy ha a g függvény integrálját nem határozza meg, hanem az ábra alapján számolja ki a megfelelő egyenlő szárú derékszögű háromszög területét , és ezt vonja ki az f integráljából.*
A kérdéses síkidom területe: $T=\int_4^6 f(x)dx-\int_4^6 g(x)dx=\int_4^6 (f(x)-g(x))dx$.	1 pont	
Mivel $f(x)-g(x)=-x^2+11x-28$, ezért $T=\int_4^6 (-x^2+11x-28)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+11\frac{x^2}{2}-28x\right]_4^6=$	2 pont	
$=\left(-\frac{6^3}{3}+11\cdot\frac{6^2}{2}-28\cdot 6\right)-\left(-\frac{4^3}{3}+11\cdot\frac{4^2}{2}-28\cdot 4\right)=\frac{10}{3}$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a)

Legyen s_1 a Szeged-Cegléd útvonal hossza km-ben, s_2 a Cegléd-Budapest távolság km-ben, valamint legyen v a vonat eredeti átlagsebessége km/h-ban. A vonat hétfői menetideje órában: $\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}$.	2 pont	*Teljes megoldásnak tekinthető a képlet nélküli tömör indoklás is: A menetidőtől való 30 perces eltérést a 19 km-es szakaszon a hétvégi sebesség kétszeresével nagyobb sebesség okozta. Így a vonat sebessége a 19/0,5 kétszerese, azaz 76 km/h.*
A hétvégi menetidő órában: $\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}$.	3 pont	
A két menetidő közötti különbségre vonatkozó feltétel alapján: $\left(\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}\right)-\left(\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}\right)=\frac{1}{2}$.	3pont	
Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy a vonat eredeti átlagsebessége $v=76\,\text{km/h}$.	2 pont	
Összesen:	**10 pont**	

b)

Menetjegy jellege	Teljes árú	20%-os mérséklésű	33%-os mérséklésű	50%-os mérséklésű	67,5%-os mérséklésű	75%-os mérséklésű	90%-os mérséklésű	95%-os mérséklésű	Ingyenes
Utasok száma	84	18	44	110	11	35	31	29	38
Tényleges jegyár (Ft)	**2000**	**1600**	**1340**	**1000**	**650**	**500**	**200**	**100**	**0**

A táblázat adatainak kitöltése.	2 pont	*Ha a tényleges jegyárak között van hibás, de a számuk legfeljebb négy, akkor 1 pont adható. Ha négynél több hibás adat van, akkor nem jár pont.*

Az átlagos jegyár forintban:

$$\frac{84\cdot2000+18\cdot1600+44\cdot1340+110\cdot1000+11\cdot650+35\cdot500+31\cdot200+29\cdot100+38\cdot0}{400}=$$

$=\frac{399510}{400}=998{,}775(\approx 999\text{ Ft, illetve }1000\text{ Ft})$.	2 pont	*Ha a tényleges jegyárak között van hibás adat, de az átlagot elvileg jól számolja ki a vizsgázó, akkor is jár a 2 pont.*
Ez a teljes árnak közelítőleg 50%-a, így az átlagos jegyár közelítőleg 50%-os mérséklésű lenne.	2 pont	*Jár a 2 pont akkor is, ha hibás adatok alapján, de elvileg jól számol a vizsgázó, vagy ha eredménye másféle kerekítésből adódott.*
Összesen:	**6 pont**	

8. a)		
$\overline{a}$, $\overline{ab}$, $\overline{bba}$ pontosan akkor egymást követő tagjai egy számtani sorozatnak, ha $\overline{bba}-\overline{ab}=\overline{ab}-\overline{a}$.	1 pont	
Helyiértékesen felírva: $(110b+a)-(10a+b)=(10a+b)-a$,	1 pont	
ahonnan átalakítások után adódik, hogy $a=6b$.	1 pont	
Mivel a és b tízes számrendszerbeli számjegyek, ezért $a=6, b=1$.	2 pont	
Így a három szám 6; 61; 116, a differencia 55.	1 pont	
Az első száz elem összege: $S_{100}=\frac{100}{2}(2\cdot 6+99\cdot 55)=272850$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	
b)		
A mértani sorozat első eleme *a*, hányadosa *q*. Ha $q=1$, akkor a sorozat állandó, így a megfelelő összegek egyenlők. A három azonos szám egy mértani sorozat egymást követő tagjai.	1 pont	
Ha $q\neq 1$, akkor az első *n* elem összege: $S_n^{(1)}=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	1 pont	
A második *n* elem összege: $S_n^{(2)}=aq^n\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	2 pont	
A harmadik *n* elem összege: $S_n^{(3)}=aq^{2n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	2 pont	
Ezek az összegek ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő elemei, ha $\left(S_n^{(2)}\right)^2=S_n^{(1)}\cdot S_n^{(3)}$.	1 pont	
Ez viszont teljesül, ugyanis $S_n^{(1)}\cdot S_n^{(3)}=a^2q^{2n}\cdot\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)^2=\left(aq^n\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\right)^2=\left(S_n^{(2)}\right)^2$.	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	*Az utolsó 3 pont bármilyen helyes indoklásért jár.*

9. a)		
Ha az első két szám *a* és *b* ($a<b$), akkor a harmadik szám $a+b$, a negyedik $2(a+b)$.	1 pont	
A feltétel alapján $2(a+b)\le 40$, vagyis $a+b\le 20$.	1 pont	
Mivel $a<b$, ezért $a\le 9$, azaz a legkisebb szám legfeljebb 9 lehet.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

b)		
Két lehetséges számnégyes van:	2 pont	
9, 10, 19, 38;	1 pont	
9, 11, 20, 40.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
c)		
András szabálya szerint kitölthető lottószelvények számát az első szám választása alapján összegezhetjük. Első szám: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.	1 pont	
Szelvények száma rendre: 18 16 14 12 10 8 6 4 2.	2 pont	
A különböző szelvények száma így: $2+4+...+18=90$.	1 pont	
Az első 40 pozitív egész számból kiválasztható számnégyesek száma: $\binom{40}{4}=91390$.	2 pont	
A telitalálat valószínűsége: $P=\frac{90}{91390}\approx 9{,}85\cdot 10^{-4}$.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	