ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2006. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

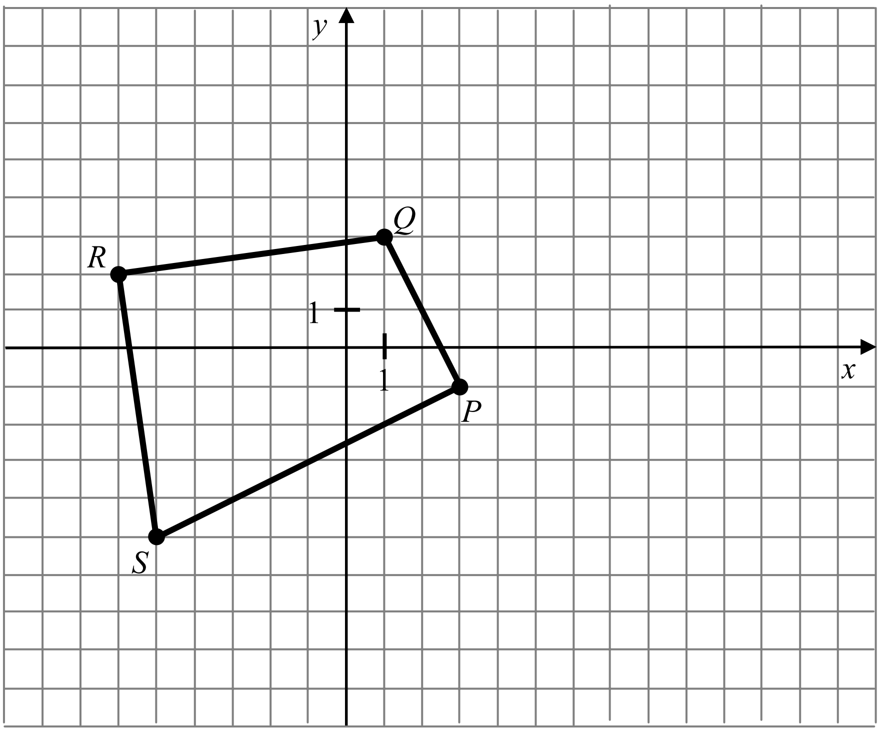
- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.



	igaz	hamis
A		*
B	*	
C	*	

Ha a vizsgázó egy állítás betűjele mellé mindkét mezőbe tesz jelet, akkor arra nem jár pont, hacsak a szöveges magyarázatban nem fogalmazza meg a helyes választ.

1. a)

Az **A** állítás **hamis,**	1 pont	*A táblázatban jelölt jó válaszért jár az 1 pont.*
mert van a négyszögnek derékszöge. **Például** az SRQ szög,	1 pont	
mert $\overrightarrow{RQ}(7;\ 1)$ és $\overrightarrow{RS}(1;\ -7)$,	1 pont	
ezért $\overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$, és így a négyszög R-nél lévő szöge derékszög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
A **B** állítás **igaz**,	1 pont	*A táblázatban jelölt jó válaszért jár az 1 pont.*
mert a $PQRS$ négyszögben az R csúccsal szemközti P csúcsnál lévő szög is derékszög,	1 pont	
ugyanis $\overrightarrow{PQ}(-2; 4)$ és $\overrightarrow{PS}(-8; -4)$, ezért $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$.	1 pont	
Így a $PQRS$ négyszög szemközti szögeinek összege 180° (a húrnégyszög tételének megfordítása miatt), tehát a négyszög húrnégyszög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. c)		
A **C** állítás **igaz**,	1 pont	*A táblázatban jelölt jó válaszért jár az 1 pont.*
Mert ha lenne a négyszögnek szimmetriacentruma, akkor a $PQRS$ négyszög paralelogramma lenne. Ehhez **például** az kellene, hogy az $\overrightarrow{RQ}(7; 1)$ és a $\overrightarrow{PS}(-8; -4)$ vektorok ellentett vektorok legyenek.	2 pont	
Ez csakis úgy teljesülne, ha az egyik oldalvektor koordinátái –1-szeresei a másik vektor koordinátáinak. Ez viszont nem teljesül.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. a)		
Mivel $x^3 - 3x = \left(x+\sqrt{3}\right)x\left(x-\sqrt{3}\right)$, ezért f zérushelyei lehetnek: $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{3}$.	3 pont	*Zérushelyenként 1 pont.*
Az egyenlet mindhárom gyöke eleme az f értelmezési tartományának, ezért mindegyik zérushely.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b)		
Az f a teljes értelmezési tartományának belső pontjaiban differenciálható függvény, ezért a monotonitás megállapítása és a szélsőértékek megkeresése az első derivált előjelvizsgálatával történhet.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás menetéből derülnek ki, akkor is jár az 1 pont.*
$f'(x) = 3x^2 - 3$.	1 pont	
Az első derivált értéke nulla, ha $x = -1$ vagy $x = 1$.	1 pont	*Csak mindkét érték megadása esetén jár az 1 pont.*

Ezek az x értékek az értelmezési tartomány elemei. Készítsünk táblázatot az f' előjel-viszonyai alapján az f menetének meghatározásához:

x	$-2{,}5 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2{,}5$
f'	pozitív	0	negatív	0	pozitív
f	növekvő	$f(-1) = 2$	csökkenő	$f(1) = -2$	növekvő

A monotonitás megállapítása a táblázat helyes kitöltése alapján.	3 pont	*Megadható a 3 pont akkor is,* *– ha hibás, de két zérushellyel rendelkező deriváltfüggvénnyel dolgozik helyesen;* *– ha a szűkített értelmezési tartományt nem veszi figyelembe.*
Összesen:	**6 pont**	

Ha a vizsgázó pontonkénti ábrázolás után a grafikonról jól leolvassa a függvény menetét, a táblázatért járó 3 pontból 1 pontot kapjon.
Ha az ábrázolásnál hivatkozik a függvény folytonosságára, további 1 pont jár.

2. c)		
Az f helyi maximumot vesz fel az $x = -1$ helyen, a helyi maximum értéke $f(-1) = 2$.	1 pont	*A vizsgázó a közölt megoldás utolsó 4 pontját akkor is megkaphatja, ha az f szélsőértékeinek minőségét a helyesen (és* ***indoklással****) elkészített grafikon alapján állapítja meg.*
Az f helyi minimumot vesz fel az $x = 1$ helyen, a helyi minimum értéke $f(1) = -2$.	1 pont	
Mivel $f(-2{,}5) = -8{,}125$, a legkisebb függvényérték $-8{,}125$.	1 pont	
Mivel $f(2{,}5) = 8{,}125$, ezért a legnagyobb függvényérték $8{,}125$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. első megoldás		
Az első egyenlet alapján y tetszőleges és $x > 3$.	1 pont*	
A második alapján y tetszőleges és $x > 3$ vagy $x < 1$.	1 pont*	
Az egyenletrendszer gyökeit tehát az $y \in \mathbf{R}$ és $x > 3$ feltétel mellett keressük.		
Ekkor az első egyenletből $y = \lg(x-3)$.	1 pont	
Amit a második egyenlet jobb oldalán y helyére írva $\lg(x^2-4x+3) = 2\lg(x-3) + \lg 10$,	1 pont	
azaz $\lg(x^2-4x+3) = \lg 10(x-3)^2$.	1 pont	
A logaritmusfüggvény monotonitása miatt $(x^2-4x+3) = 10(x-3)^2$.	1 pont	*A monotonitásra való hivatkozás nélkül is jár az 1 pont. A másodfokú egyenlet felírásáért összesen 4 pont jár.*
A bal oldal szorzattá alakítva $(x-3)(x-1) = 10(x-3)^2$,	1 pont	
Mivel $x > 3$, ezért $-9x + 29 = 0$,	1 pont	
innen $x = \frac{29}{9}$ $(= 3,\dot{2})$	1 pont	*A kerekített érték felírása esetén is jár a pont.*
és $y = \lg\frac{2}{9} (\approx -0,653)$.	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{29}{9}$ és $y = \lg\frac{2}{9}$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	
Ha csak mechanikusan oszt mindkét oldalon x–3-mal, s azért kapja meg a jó megoldást, mert a másik az nem lehet, akkor legfeljebb 8 pontot kapjon.		

3. második megoldás		
Ha a második egyenletből indulunk, akkor felhasználva, hogy csak pozitív számnak van logaritmusa, a másodfokú kifejezés pozitív. Ez a két gyök között nem teljesül, így a feltétel: $x > 3$ vagy $x < 1$, és y tetszőleges valós szám.	2 pont*	
Az egyenlet pedig $x^2 - 4x + 3 = 10 \cdot 10^{2y}$.	1 pont	
Az első egyenlet négyzete $10^{2y} = (x-3)^2$.	1 pont	
A kettőt egybevetve kapjuk, hogy: $10(x-3)^2 = x^2 - 4x + 3$,	1 pont	*A másodfokú egyenlet felírásáért összesen 3 pont jár.*
rendezve: $9x^2 - 56x + 87 = 0$.	1 pont	
Ennek gyökei: 3 és $\frac{29}{9}$.	2 pont	
A 3 nem ad megoldást.	1 pont	
Az $x = \frac{29}{9}$ értékét az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y = \lg\frac{2}{9}$.	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{29}{9}$ és $y = \lg\frac{2}{9}$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

*1. A *-gal jelölt pontok járnak akkor is mindkét megoldásban, ha a vizsgázó az egyenletekbe történő behelyettesítéssel ellenőriz (egyenletenként az ellenőrzésért 1-1 pont jár).*
2. Nem adható az ellenőrzésért pont, ha a hamis vagy a rossz gyököt nem szűri ki a behelyettesítéssel.

4. a) **első megoldás**		
Az első sorozatban az első tagtól kezdve felírjuk a tagok 11-gyel való osztás maradékát: 5; 4; 1; 3; 9; 5; …	1 pont	
A maradékok ciklikusan ismétlődnek (hiszen mindig 3-mal szorzunk).	1 pont	
Tehát minden ötös ciklusban az 1-es maradék egyszer fordul elő.	1 pont	
A 110. tagig 22 ciklus van.	1 pont	
Tehát $\frac{22}{110}$ (= 0,2) a kérdezett valószínűség.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. a) **második megoldás**		
Az első sorozatban az első tagtól kezdve felírjuk a tagok 11-gyel való osztás maradékát: 5; 4; 1; 3; 9; 5; …	1 pont	
A maradékok ciklikusan ismétlődnek (hiszen mindig 3-mal szorzunk).	1 pont	
Minden ötödik tag 1-es maradékot ad,	2 pont	
tehát a valószínűség $\frac{1}{5}$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. b)		
A számtani sorozatban az első tagtól kezdve felírjuk a tagok 11-gyel való osztás maradékát: 5; 8; 0; 3; 6; 9; 1; 4; 7; 10; 2;	1 pont	*Ezúttal a ciklus hosszabb lesz, mivel a 3 relatív prím a 11-hez, ennek többszörösei minden lehetőséget lefednek, azaz 11 hosszú lesz a ciklus.*
Ettől kezdve ismétlődik: 5; 8; 0,…	1 pont	
tehát 11 a ciklushossz.	1 pont	
Egy ciklusban egy kedvező eset van.	1 pont	
Mivel 10 ciklus van a 110. tagig, és mindegyikben egy darab 1-es van,	1 pont	
így a keresett valószínűség: $\frac{10}{110} = \frac{1}{11}$.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II.

5. a)

Jelölje x azt az időt (órában), amennyi idő alatt Panni egyedül begépelte volna a kéziratot, y pedig azt, amennyi alatt Kati végezte volna el ugyanezt a munkát egyedül.
Panni szerdán t órát fordított a gépelésre.
Foglaljuk táblázatba a szövegből kiolvasható adatokat:

	a teljes munka elvégzése (h)	1 óra alatti teljesítmény	gépelésre fordított idő (h)
			kedden
Panni	x	$\frac{1}{x}$	6
Kati	y	$\frac{1}{y}$	4
együtt	12	$\frac{1}{12}$	

A táblázat helyes kitöltése.	3 pont*	*Oszloponként 1-1 pont.*
Mindezekből tudhatjuk a munka elvállalásakor: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{12}$;	1 pont	*Ha a táblázatos kitöltés helyett a vizsgázó az egyenleteket írja fel, a *-gal jelölt 3 pontot 2+1 bontásban akkor adjuk hozzá az 1+2 pontokhoz. Maximum 5 pont adható, ha nem világosan rögzített jelölésekkel dolgozik.*
a keddi nap végén: $\frac{6}{x}+\frac{4}{y} = \frac{2}{5}$;	2 pont	
A két egyenletből $x = 30$ (óra) $y = 20$ (óra).	2 pont	
A feladat feltételeinek megfelelően Panni 30 óra, Kati 20 óra alatt végzett volna egyedül a munkával.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

5. b)		
Szerdán Panni t, Kati $t-\frac{1}{2}$ órát gépelt.	1 pont	
Szerda délután, a munka befejezésekor $\frac{t}{30}+\frac{t-\frac{1}{2}}{20}=\frac{3}{5}$.	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
$t = 7{,}5$ (óra).	1 pont	
Panni fél óráig ebédelt, ezért a gépelésre fordított 7,5 óra 8 óra „munkaidőre” változik. Kati szerdán 7,5 – 0,5 = 7 órát gépelt, és egy órával több (vagyis 8 óra) volt a „munkaideje”.	2 pont	
Szerdán 9 órakor kezdtek, és mindketten 8 óra „munkaidő” után fejezték be a gépelést, vagyis 17 órára lettek készen a kézirattal.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. a)		
Annak a valószínűsége, hogy a 8 vizsgált személy közül pontosan kettő színtévesztő (binomiális modell): $p=\binom{8}{2}\cdot 0{,}04^2\cdot 0{,}96^6$,	2 pont	
$p\approx 0{,}035$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
Ha a vizsgázó a 6. a) feladatot a hipergeometrikus modellt alkalmazva oldja meg, a következő a pontozás:		
N elemszám esetén a pontosan két színtévesztő kiválasztásának a valószínűsége: $p=\frac{\binom{0{,}04N}{2}\cdot\binom{0{,}96N}{6}}{\binom{N}{8}}$	2 pont	
Ha a vizsgázó választ konkrét N értékeket (N = 100, 1000) és p-t jól kiszámolja	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. b) első megoldás		
Az az eset, hogy a 8 vizsgált személy közül legalább 2 színtévesztő van, azt jelenti, hogy 2 vagy több a színtévesztők száma.	1 pont	*A részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletezők, de a leírásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.*
Egyszerűbb a kérdezett esemény komplementerével számolni, vagyis azt vizsgálni, mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 1 színtévesztő van a 8 ember között. Ezt két kizáró esemény valószínűségének összegeként számíthatjuk.	1 pont	
A pontosan 0 színtévesztő valószínűsége: $p_0 = 0{,}96^8 (\approx 0{,}7214)$.	1 pont	
A pontosan 1 színtévesztő valószínűsége: $p_1 = \binom{8}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^7 (\approx 0{,}2405)$.	1 pont	
Tehát a P(színtévesztők száma ≤ 1) = $= p_0 + p_1 \approx 0{,}962$.	2 pont	
Ekkor a komplementer esemény valószínűsége 0,038.	1 pont	
Tehát 0,038 a valószínűsége annak, hogy legalább két személy színtévesztő.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	
A közbülső számítások során végzett kerekítésekből eredő pontatlanságért ne vonjunk le pontot! Ha a végeredményt nem három tizedes jegyre kerekítve adja meg, az utolsó pont nem jár!		

6. b) második megoldás		
A legalább két fő azt jelenti, hogy: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lehet köztük színtévesztő.	1 pont	
Az egyes esetek valószínűségei binomiális eloszlással számíthatók: $p(k) = \binom{8}{k} \cdot 0{,}04^k \cdot 0{,}96^{8-k}$.	1 pont	*Szöveges indoklás nélkül is jár az 1 pont.*
A valószínűségek értékei: (lásd az alábbi táblázatot)	4 pont	*A binomiális eloszlás tagjainak kiszámításakor hibás számolásért legfeljebb 2 pontot veszítsen. Ha említést tesz arról, hogy k=5-től elhanyagolhatóak a tagok, akkor is jár a 4 pont.*
(és mivel ezek az események diszjunktak, ezért) ezek a valószínűségek összeadódnak.	1 pont	
A keresett valószínűség 0,038.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2 színtévesztő	0,0351
3 színtévesztő	0,0029
4 színtévesztő	0,0001522
5 színtévesztő	0,000005073
6 színtévesztő	0,0000001057
7 színtévesztő	0,00000000126
8 színtévesztő	0,00000000000655

A hipergeometrikus modell alkalmazásával:		
Vagy a komplementer eseménnyel dolgozik, vagy n = 2-től 8-ig összegzi a felírható valószínűségeket	5 pont	
Konkrét N-re kiszámolja a kért valószínűségeket	2 pont	
Indokolja valamilyen formában N konkrét választását	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

A közbülső számítások során végzett kerekítésekből eredő pontatlanságért ne vonjunk le pontot! Ha a végeredményt nem három tizedes jegyre kerekítve adja meg, az utolsó pont nem jár!

6. c)		
Ha lehetséges lenne, akkor összesen 6 férfival fogtak volna kezet a nők.	1 pont	
Ezeket a „férfi ötösöket” $\binom{6}{5}$ = 6-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
Mivel 9 nő van, ezért a feltétel szerint kellene legalább 9 különböző férfi ötös.	2 pont	
Nem lehetséges, hogy volt két olyan férfi is, aki senkivel sem fogott kezet, mert ellentmondásra jutottunk.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7.

Közöljük a feladatlapon szereplő táblázatot, a hiányzó adatok beírásával:

város	**fizető nézők száma**	**egy jegy ára (Ft)**	**bevétel a jegyeladásból (ezer Ft)**
Debrecen	12350	**(1200)**	14820
Győr	8760	**(1400)**	12264
Kecskemét	**13920**	1600	22272
Miskolc	9970	1500	**14955**
Pécs	**11850**	1300	15405

A táblázatban szereplő zárójeles számok kiszámítása nem szükséges a feltett kérdések megválaszolásához.

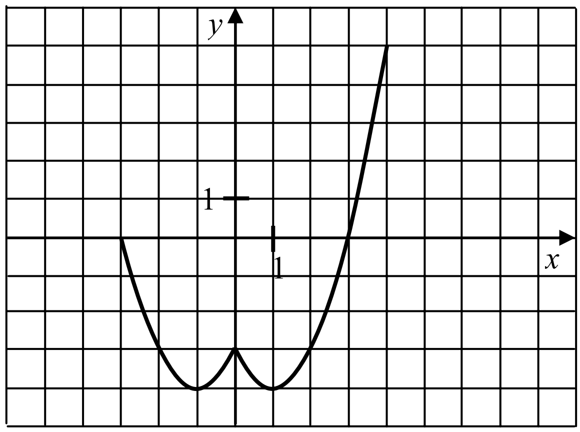
7. a)		
Kecskeméten 13920, Pécsett 11850 fizető néző volt.	2 pont	*Ha csak a táblázatban szerepel, akkor is jár a 2 pont.*
A legtöbb fizető néző Kecskeméten volt.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b)		
Az öt városban összesen 56850 fizető néző volt.	1 pont	
Miskolcon a jegyeladásból 14955 ezer Ft bevétel származott.	1 pont	
Az öt városban az összes bevétel 79716 ezer Ft volt.	1 pont	
Az átlagos jegyár $\frac{79716000}{56850}$, azaz 1402 Ft volt.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. c)		
Bea becslése: 50000 fő, ennek 10%-a 5000 fő. Ha a tényleges nézőszám Budapesten b, ekkor (1) $45000 \le b \le 55000$.	1 pont	
Peti becslése 60000 fő, ha a tényleges nézőszám Prágában p, ennek 10%-a $0{,}1p$, ekkor (2) $0{,}9p \le 60000 \le 1{,}1p$.	2 pont	*Ha itt a becslés százalékával írja fel az egyenlőtlenséget, legfeljebb 1 pont adható.*
Innen (3) $54546 \le p \le 66666$.	1 pont	
A legnagyobb eltérés akkor van a két nézőszám között, ha $b = 45000$ és $p = 66666$. Ekkor az eltérés $p - b = 21666$ fő.	1 pont	
A nézőszámok közötti lehetséges legnagyobb eltérés ezresekre kerekített értéke 22 ezer fő.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Ha nyílt intervallumokkal dolgozik, akkor csak 1 pontot veszítsen.*

7. d)		
A b-re kapott (1) és a p-re kapott (3) reláció miatt az azonos b és p értékeket a [45000; 55000] és az [54546; 66666] intervallumok közös egész elemei adják.	1 pont	*A részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletező a gondolatmenet.* *Egy számpéldával megmutathatja állítása helyességét.* *Ha az ezresekre kerekített nézőszámmal felírt intervallumokat hasonlítja össze ([45 000; 55 000] és [55 000; 67 000]), akkor 2 pontot kap.*
Tehát $b = p$, ha mindkét nézőszám ugyanazon eleme az [54546; 55000] intervallumnak.	1 pont	
Mindezekből következik, hogy lehetséges, hogy a két fővárosban azonos számú néző hallgatta a GAMMA együttest.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. a)

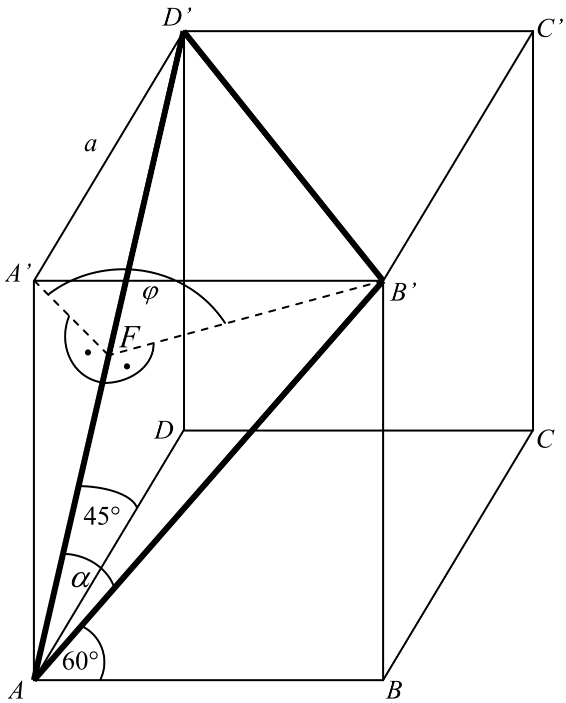


$x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$	1 pont	
$x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 - 4, & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ (x+1)^2 - 4, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$	1 pont	
A grafikon két összetevőjének ábrázolása transzformációval.	2 pont	*Ez a 2 pont nem jár, ha pontonként ábrázol.*
A függvény képe a megadott intervallumon	2 pont	*1 pont az összetevők helyes összefésülése, 1 pont az értelmezési tartomány*
Összesen:	**6 pont**	

8. b)

Összetett függvényhez a 3 függvény közül 2-t kell kiválasztani a sorrendre való tekintettel, ezt 6-féleképpen lehet megtenni.	1 pont	*Az 1 pont akkor is adható, ha csak a későbbiek során derül ki, hogy ezt a gondolatot helyesen használja a vizsgázó.*
Soroljuk fel a 2 különböző függvényből képezhetőket! A $(g \circ f)$-et megadtuk. A továbbiak: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x-3)^2 - 2(x-3) - 3 =$ $= x^2 - 8x + 12.$	1 pont	
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \left\| x^2 - 2x - 3 \right\|.$	1 pont	
$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \|x\|^2 - 2\|x\| - 3 = x^2 - 2\|x\| - 3.$	1 pont	
$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \|x\| - 3.$	1 pont	
$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \|x - 3\|.$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. c)		
Egy egyszerű példa: $p(x) = x + c$ és $t(x) = x - c$ (ahol c nullától különböző konstans)	1 pont	
$(p \circ t)(x) = (x + c) - c = x$	1 pont	
$(t \circ p)(x) = (x - c) + c = x$	1 pont	
Tehát $(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha a függvénykonstrukció helyes, de értelmezési tartományokra nem gondol, legfeljebb 3 pont adható.*

9. a)		
		
Áttekinthető ábra az adatok feltüntetésével.	2 pont	*Ha a feladatot helyesen, de hiányos ábrával oldja meg, akkor is jár a 2 pont.*
Jelöljük a téglatest AD élének hosszát a -val! Mivel a $D'DA$ háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög: $DA = DD' = a$ és $AD' = a\sqrt{2}$.	1 pont	
A téglatestnek tehát 8 db éle a hosszúságú (négyzetes oszlop). Az ABB' derékszögű háromszög oldalai rendre: $BB' = a$; $AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $AB' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
A téglatest $A'B'$ élére illeszkedő két lapja egybevágó, ezért $AB' = B'D' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Az $AB'D'$ háromszög egyenlő szárú.	1 pont	
A keresett $B'AD' \sphericalangle = \alpha$ az alapon fekvő egyik szög, ennek koszinuszát például a koszinusz függvénnyel a $B'FA$ derékszögű háromszögből (F pont az AD' alap felezőpontja), vagy az $AB'D'$ háromszögből koszinusz-tétellel számíthatjuk ki: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ($\approx 0{,}6124$).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. b)		
Mivel az *AB'A'D'* tetraédert úgy kaptuk, hogy a téglatest *A'* csúcsába befutó három (egymásra merőleges) élének végpontjait összekötöttük ezzel az *A'* csúccsal, a tetraéder térfogatát megkaphatjuk, ha az *AA'D'* lapot tekintjük a tetraéder alaplapjának és az erre a lapra merőleges *A'B'* élt a tetraéder magasságának.	1 pont	*Helyes számolás által tükrözött jó gondolatmenet esetén is jár az 1 pont.*
$T_{AA'D'} = \frac{AA' \cdot A'D'}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$; $m = A'B' = \frac{a}{\sqrt{3}}$; innen $V = \frac{T_{AA'D'} \cdot A'B'}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{18}$.	1 pont	
A téglatest (négyzetes oszlop) legrövidebb éle *AB* (=*A'B'*) = $\frac{a}{\sqrt{3}} = 10$, innen $a = 10\sqrt{3}$.	1 pont	
Ezt az értéket a térfogat képletében az *a* helyére írva V = 500 adódik. Az *AB'A'D'* tetraéder térfogata 500 (térfogategység).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c)		
Az *AA'D'* és az *AB'D'* síkok hajlásszögét (φ-t) az *AD'* metszésvonaluk egy pontjában állított merőlegesek szöge adja meg. *Az AB'A'D'* tetraéder *AD'* élére illeszkedő két lapja egyenlő szárú háromszög a közös *AD'* alapon, ezért a metszésvonalon az *F* pont legyen az *AD'* él felezőpontja. Ekkor $\varphi = A'FB'\sphericalangle$.	1 pont	*Két sík hajlásszögének jó értelmezéséért (akár ábrán is) 1 pont jár.*
A *B'A'F* háromszög *A'*-ben derékszögű, mert az *A'B'* él a tetraéder magassága, ezért merőleges az *AA'D'* alaplap minden egyenesére, így az *A'F*-re is.	1 pont	
$A'B' = \frac{a}{\sqrt{3}}$; Az *AA'D'* egyenlő szárú derékszögű háromszögben az *A'F* magasság az *AD'* átfogó felével egyenlő, vagyis $A'F = \frac{AD'}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$ $(= \frac{a}{\sqrt{2}})$.	1 pont	
$\text{tg}\, \varphi = \frac{A'B'}{A'F} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (≈ 0,8165).	1 pont	
Innen $\varphi \approx 39{,}23°$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	