Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. október 25.

# MATEMATIKA

## EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

## 2006. október 25. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

| Pótlapok száma | |
|---|---|
| Tisztázati | |
| Piszkozati | |

**OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM**

# Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

# I.

**1.** Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

**a)** $\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2$

**b)** $2^x=3^{2x+1}$

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 5 pont | |
| **b)** | 6 pont | |
| **Ö.:** | 11 pont | |

**2.** Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-át, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.

**a)** Hányféle számötöst jegyezhetünk fel?

**b)** Hányféle számötös esetében lehet a dobott pontok összege 10?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 2 pont | |
| **b)** | 10 pont | |
| **Ö.:** | 12 pont | |

**3.** Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű!

| Ö.: | 14 pont | |
|---|---|---|

**4.** Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobtunk, és feljegyeztük a fejek és írások számát.

**a)** Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobtunk, mint írást?

**b)** Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 7 pont | |
| **b)** | 7 pont | |
| **Ö.:** | 14 pont | |

# II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

**5.** Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

**a)** A kész talapzatnak
- hány éle;
- hány csúcsa;
- hány lapja van?

**b)** A kész talapzatnak mekkora a felszíne?

**c)** Egy ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb, a hét zöld jade tárgy mindegyike 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél.
A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 3 pont | |
| **b)** | 6 pont | |
| **c)** | 7 pont | |
| **Ö.:** | 16 pont | |

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

**6.** Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az

$m(t)=12-\dfrac{10}{t+1}$ képlet;

a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula:

$h(t)=5\cdot\sqrt{0{,}4t+1}+0{,}4$.

Mindkét formulában $t$ az 1969 óta eltelt időt jelöli években $(t\geq 1)$, és a magasságot méterben számolják.

**a)** Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagramon, amely a magasság értékeket az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket!

**b)** A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot?

**c)** Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amelynek magasságát a $g(t)=t^3-16{,}5t^2+72t+60$ képlet írja le! (A magasságot centiméterben számolják, $t$ az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és $t\leq 21$.)

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 6 pont | |
| **b)** | 4 pont | |
| **c)** | 6 pont | |
| **Ö.:** | 16 pont | |

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

**7.** Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya 7 : 6 : 8.

**a)** Mekkorák a húrnégyszög szögei?

Matematika órán, miután minden diák megoldotta a feladatot, három tanuló a következőket állította:

Zsófi: A húrnégyszög minden szöge egész szám.
Peti: A húrnégyszögnek van derékszöge.
Kata: A húrnégyszög egyik szöge 110°-nál is nagyobb.

**b)** A három tanuló állítása közül melyik igaz a feltételnek megfelelő húrnégyszögre?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 13 pont | |
| **b)** | 3 pont | |
| **Ö.:** | 16 pont | |

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

**8.** Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer ($S$) síkjában.
Az $A$ halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $4x-3y\geq 18$,
azaz $A:=\{\,P(x;y)\in S \mid 4x-3y\geq 18\,\}$;
a $B$ halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0$,
azaz $B:=\{\,P(x;y)\in S \mid x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0\,\}$;
a $C$ halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2=4$,
azaz $C:=\{\,P(x;y)\in S \mid y^2=4\,\}$.

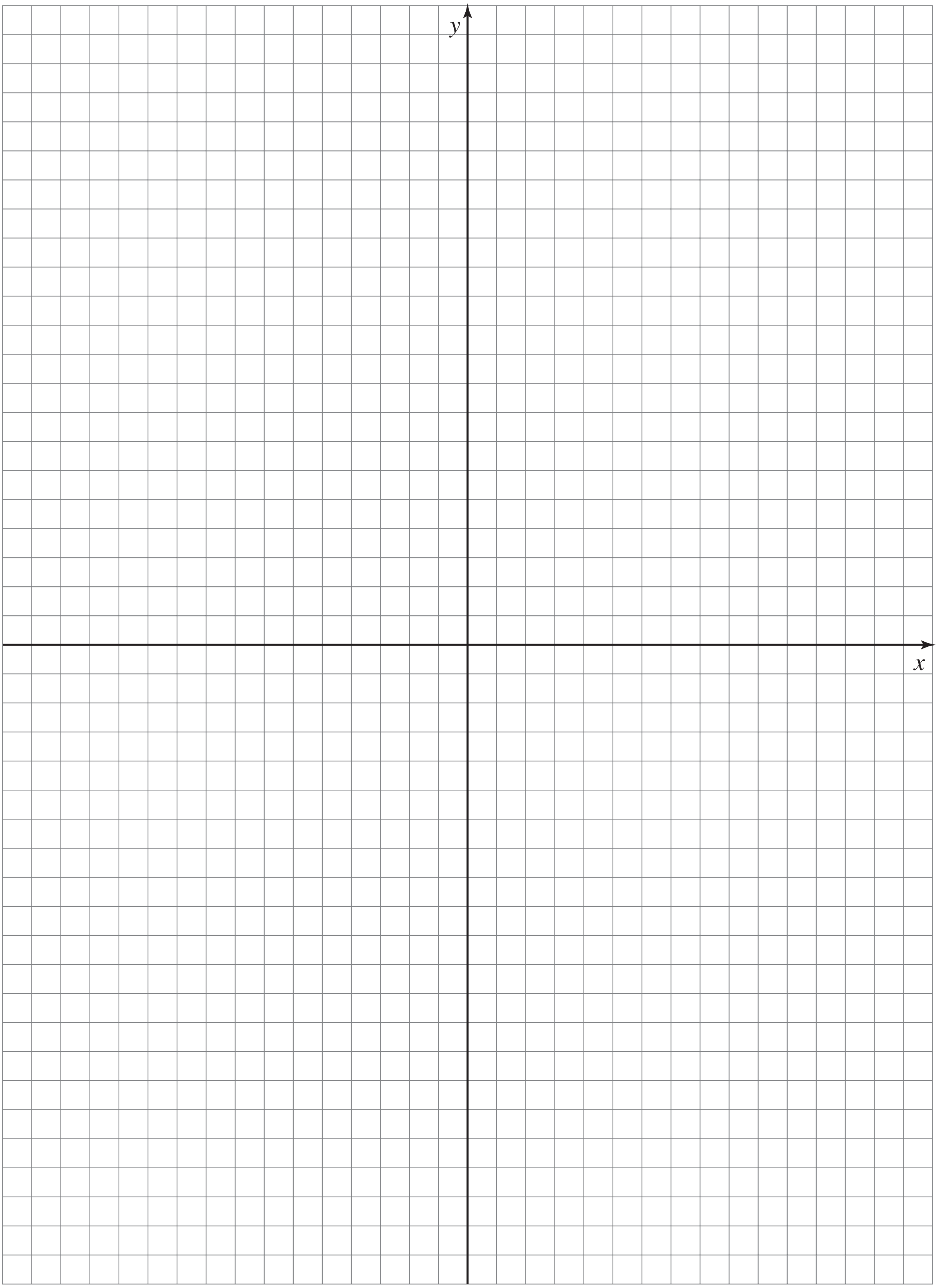
**a)** Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatot alkotnak az $A$, a $B$ és a $C$ halmaz pontjai!

**b)** Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B\setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz?

**c)** Ábrázolja a $B\cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | 8 pont | |
| **b)** | 4 pont | |
| **c)** | 4 pont | |
| **Ö.:** | 16 pont | |

a)



b)

c)

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

**9.** Egy $(a_n)$ számsorozatról a következőket tudjuk:

- a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$;
- az $a_1$, $a_2$ és $a_3 - 9a_1$ ebben a sorrendben egy számtani sorozat 3 egymást követő tagja;
- az $(a_n)$ sorozat első öt tagjának összege 682.

Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja?

| Ö.: | 16 pont | |
|---|---|---|

| | a feladat sorszáma | elért pontszám | összesen | maximális pontszám |
|---|---|---|---|---|
| I. rész | 1. | | | 11 |
| | 2. | | | 12 |
| | 3. | | | 14 |
| | 4. | | | 14 |
| II. rész | | | | 16 |
| | | | | 16 |
| | | | | 16 |
| | | | | 16 |
| | | ← nem választott feladat | | |
| | **MINDÖSSZESEN** | | | **115** |

dátum

javító tanár

| | a feladat sorszáma | elért pontszám | programba beírt pontszám |
|---|---|---|---|
| I. rész | 1. | | |
| | 2. | | |
| | 3. | | |
| | 4. | | |
| II. rész | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

dátum

dátum

javító tanár

jegyző