ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. október 25.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS
MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
- **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **csak egy** (a magasabb pontszámú) **értékelhető**.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)

A logaritmus azonosságait és a 10-es alapú logaritmus-függvény szigorú monotonitását felhasználva, megoldandó az $(x+7)(3x+1)=100$ másodfokú egyenlet.	1 pont	*A monotonitásra való hivatkozás nélkül is jár az 1 pont.*
Ennek gyökei: $x_1=-\frac{31}{3}$; $x_2=3$.	2 pont	
Mivel a bal oldal értelmezése alapján $x>-\frac{1}{3}$, ezért az $x_1=-\frac{31}{3}$ nem gyöke az egyenletnek.	1 pont	*Az 1 pont indoklással együtt adható. A hamis gyök kizárása történhet behelyettesítéssel is.*
Az $x=3$ kielégíti az eredeti egyenletet.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b) első megoldás

A jobb oldalon alkalmazva a hatványozás azonosságait, megoldandó az alábbi egyenlet: $2^x=3\cdot 9^x$.	2 pont	
Ebből rendezéssel kapjuk, hogy: $(4{,}5)^x=\frac{1}{3}$.	2 pont	
Innen $x=\log_{4{,}5}\left(\frac{1}{3}\right)$ $(=\frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg 4{,}5}\approx-0{,}7304)$.	1 pont	*Az exponenciális egyenlet gyökeként fogadjuk el a helyes közelítő értéket.*
A kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.	1 pont	*Az ellenőrzést fogadjuk el közelítő értékkel is.*
Összesen:	**6 pont**	

1. b) második megoldás

Mivel $3=2^{\log_2 3}$, a hatványozás azonosságait alkalmazva $2^x=3^{2x+1}=2^{(2x+1)\log_2 3}$.	2 pont	
A 2-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x=(2x+1)\log_2 3$.	1 pont	*A monotonitásra való hivatkozás nélkül is jár az 1 pont.*
Az egyenlet megoldása $x=-\frac{\log_2 3}{\log_2 9-1}=-\frac{\log_2 3}{\log_2 4{,}5}$ $(=-\frac{\lg 3}{\lg 4{,}5}\approx-0{,}7304)$	2 pont	*Az exponenciális egyenlet gyökeként fogadjuk el a helyes közelítő értéket.*
A kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.	1 pont	*Az ellenőrzést fogadjuk el közelítő értékkel is.*
Összesen:	**6 pont**	

2. a)		
Mivel a dobások során bármelyik helyen háromféle számot (0; 2; 4) dobhatunk, a rendezett számötösök száma $3^5 = 243$.	2 pont*	
Összesen:	**2 pont**	

2. b)		
Ha a dobott pontok összegét tekintjük csak, és a dobások sorrendjét nem, akkor 10-et összegként háromféleképpen dobhattunk:	1 pont*	
1. eset: $4+4+2+0+0=10$;	1 pont	
2. eset: $4+2+2+2+0=10$;	1 pont	
3. eset: $2+2+2+2+2=10$.	1 pont	
Az 1. esetben ezt az 5 számot $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$-féle sorrendben dobhattuk.	2 pont	
A 2. esetben ezt az 5 számot $\frac{5!}{3!}=20$-féle sorrendben dobhattuk.	2 pont	
A 3. esetben ezt az 5 számot csak egyféle sorrendben dobhattuk. A 10-es összeg tehát összesen 51-féleképpen állhatott elő.	2 pont*	
Összesen:	**10 pont**	

*A *-gal jelölt részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletezők, de a leírásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.*

3.		
Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, $\alpha + \gamma = 180° - \beta$, valamint $\beta + \gamma = 180° - \alpha$,	1 pont	*A részpontszámok akkor is adhatók, ha csak a későbbiek során derül ki, hogy ezeket az összefüggéseket helyesen használja a vizsgázó.*
és $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$, valamint $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.	1 pont	
A megadott egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sin\alpha : \sin\beta = \cos\beta : \cos\alpha$.	1 pont	
Ebből a $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\beta$ egyenlőség következik.	1 pont	
A kétszeres szög szinuszára vonatkozó azonosságot használva kapjuk, hogy $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$.	3 pont	
Egy háromszögben bármely szög kétszeresének értéke 0° és 360° közé esik, ezért a fenti egyenlőség két esetben állhat fenn:	3 pont	
$2\alpha = 2\beta$ vagy $2\alpha + 2\beta = 180°$.	2 pont	
Az első esetben $\alpha = \beta$, a háromszög két szöge egyenlő, a háromszög egyenlő szárú.	1 pont	
A második esetben $\alpha + \beta = 90°$, a háromszögben $\gamma = 90°$, a háromszög derékszögű.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

4. a) első megoldás		
Mivel hét pénzt dobtunk fel, akkor lesz több fej, mint írás, ha 4; 5; 6 vagy 7 fejet dobtunk.	2 pont	*A részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletezők, de a leírásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.*
Ekkor éppen 3; 2; 1 vagy 0 írás lesz.	1 pont	
Szimmetria okokból ennek ugyanannyi az esélye, mint ha 3; 2; 1 vagy 0 fejet dobtunk volna.	2 pont	
Tehát a keresett valószínűség: 0,5	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a) második megoldás

A hét elemű fej-írás jelsorozat minden helyén előfordulhat a fej és írás is, ezért az egyenlő esélyű jelsorozatok száma: $2^7 = 128$.	2 pont	*A részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletezők, de a leírásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.*
Több fejet dobtunk, mint írást, tehát a fejek száma 4; 5; 6 vagy 7.	2 pont	
A kedvező jelsorozatok száma tehát: $\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=35+21+7+1=64$.	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{64}{128}=0{,}5$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. b)

Akkor nagyobb a különbség 3-nál, ha 6 fej és 1 írás vagy 7 fej és 0 írás van.	3 pont	*A pontszám akkor is adható, ha nem ennyire részletező, de a leírásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.* *Ha a fordított esetet is tekintetbe veszi a kedvező eseteknél, 2 pontot kaphat.*
A kedvező esetek száma a szimmetria okok miatt: $\binom{7}{1}+\cdot\binom{7}{0}$.	2 pont	
$7+1=8$.	1 pont	
A keresett valószínűség: 0,0625 $(=\frac{8}{128}=\frac{1}{16})$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II.

5. a)

A lecsiszolt testnek 24 csúcsa van, mert a 8 kockacsúcs helyett minden csúcsnál 3-3 új csúcs keletkezik (a negyedelő pontoknál).	1 pont	*1. A részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletezők, de a leírásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.* *2. A végeredmények puszta közléséért legfeljebb 2 pont adható.*
A lecsiszolt testnek 36 éle van, mert a 12 kocka élen maradnak élek, és a lemetszett háromszögek oldalai is élek: $8 \cdot 3 = 24$, és $12 + 24 = 36$.	1 pont	
A lapok száma 14, mert a kockalapokból marad egy-egy nyolcszög, és a lemetszett háromszögek száma 8, $6 + 8 = 14$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b)

A talapzat felszínét kiszámíthatjuk, ha a 6 db nyolcszög területéhez hozzáadjuk a 8 db szabályos háromszög területét.	1 pont	*A részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletezők, de a számolásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.*
A nyolcszög területe: a 12 dm oldalú négyzet területéből kivonjuk a 4 db egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, vagyis 2 db 3 dm oldalú négyzet területét: $T_{nyolcszög} = 12^2 - 2\cdot 3^2 = 126$ (dm^2).	2 pont	
A szabályos háromszög oldala $3\cdot\sqrt{2}$, ezért $T_{háromszög} = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}$ (dm^2).	2 pont	
$A = 6\cdot T_{nyolcszög} + 8\cdot T_{háromszög} = 756 + 36\cdot\sqrt{3}$ ($\approx 818{,}35$ dm^2).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. c)

<table>
<tr><td>Legyen m az ajándéktárgy megrendelt tömege. Az összes tömeg $20m$.
Foglaljuk táblázatba a csiszolt ajándéktárgyakról tudott információkat.
<table>
<tr><td>anyag</td><td>achát</td><td>hematit</td><td>zöld jade</td><td>gránát</td></tr>
<tr><td>gyakoriság</td><td>3 db</td><td>6 db</td><td>7db</td><td>4db</td></tr>
<tr><td>tömeg</td><td>0,99 m</td><td>0,995 m</td><td>1,015 m</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>2 pont</td><td rowspan="2"><i>A 2+2 pont akkor is jár, ha a helyes egyenletet világosan rögzített jelölésekkel írja fel a vizsgázó.</i></td></tr>
<tr><td>Jelöljük $(x\cdot m)$-mel a gránátból készített ajándéktárgy valódi tömegét.
Tudjuk, hogy a tényleges össztömeg $20m$, innen
$20\cdot m = 3\cdot 0{,}99m + 6\cdot 0{,}995m + 7\cdot 1{,}015m + 4\cdot xm$.</td><td>2 pont</td></tr>
<tr><td>Ebből következik, hogy $x = 0{,}98875$.</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A gránát ajándéktárgyak tömege 1,125%-kal kisebb a megrendeltnél.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>7 pont</td><td></td></tr>
</table>

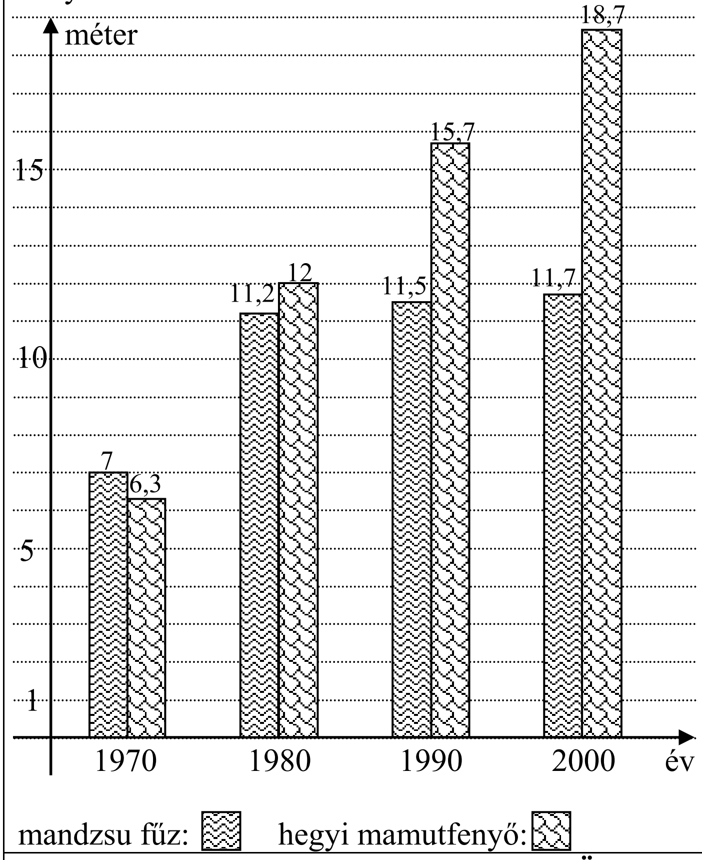
6. a)

Táblázatba foglaljuk a képletek által kiszámított magasságokat az eltelt évek függvényében:

	1970	1980	1990	2000
t	1	11	21	31
$m(t)$	7	11,2	11,5	11,7
$h(t)$	6,3	12,0	15,7	18,7

2 pont

Helyes ábrázolások:



2+2 pont

Összesen: 6 pont

Ha a vizsgázó függvénytranszformáció lépéseire támaszkodva vagy bármely más függvényábrázolási módszerrel jó megoldást ad, m(t) ábrájára 3 pontot, h(t) grafikonjára 3 pontot kaphat. A helyettesítési értékeket ekkor is fel kell tüntetnie.

6. b)

Megoldandó a $10{,}5 = 5 \cdot \sqrt{0{,}4t + 1} + 0{,}4$ egyenlet.	1 pont	
Rendezés után kapjuk, hogy $t \approx 7{,}7$.	2 pont	
A kívánt magasságot a mamutfenyő a 8. évben, vagyis (1969 + 8 =) 1977-ben érte el.	1 pont	*Az 1 pont bármelyik formában megadott jó válasz esetén jár.*
Összesen:	**4 pont**	

6. c)

A megadott függvény menetét a derivált előjel-vizsgálatával állapítjuk meg.	1 pont	
A derivált: $g'(t) = 3t^2 - 33t + 72$.	1 pont	
A derivált értéke 0, ha $t = 3$ vagy $t = 8$.	1 pont	
A derivált mindkét nullhelyénél előjelet vált, a két nullhely közötti t értékekre a derivált negatív, ezért a *g(t)* függvény ezen a tartományon ($3 < t < 8$) szigorúan monoton csökkenő.	2 pont	
A fa magassága nem csökkenhet az arborétumban, ezért a *g(t)* függvény egyetlen fa növekedését sem írhatja le.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. Minden jó érvelés elfogadható megoldásként. Ha a vizsgázó pl. megfelelő helyettesítési értékek összevetésével utal arra, hogy g(t) függvény értéke nagyobb t értéknél kisebb lett, megoldása teljes értékű lehet.
2. Megadjuk néhány egész t értékénél g(t) értékét:

évek száma	t	1	3	5	8	10	11	15	21
magasság (cm)	g(t)	116,6	154,5	132,5	92	130	186,5	802,5	3556,6

3. Ha a táblázatos módszerrel nem találja meg a csökkenő tartományt, és próbálkozásából nem derül ki, hogy a monotonitást vizsgálja, megoldására legfeljebb 1 pontot kapjon.
4. Ha a táblázatos módszerrel nem találja meg a csökkenő tartományt, de a próbálkozásából kiderül, hogy a monotonitást vizsgálja, megoldására legfeljebb 2 pontot kapjon.

7. a)

A húrnégyszögben a szemközti szögeinek összege 180°.	1 pont	*A részpontszámok akkor is adhatók, ha nem ennyire részletezők, de a leírásból világosan követhető a közölt gondolatmenet.*
A megadott arányszámok nem feltétlenül követik a szögek sorrendjét a négyszögben, ezért három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a három arányszám közül melyik két szög van egymással szemben.	3 pont	
A feltételben szereplő három szög legyen α, β, γ, a negyedik δ. $\alpha + \gamma = 180^\circ$, így a három lehetőség:		

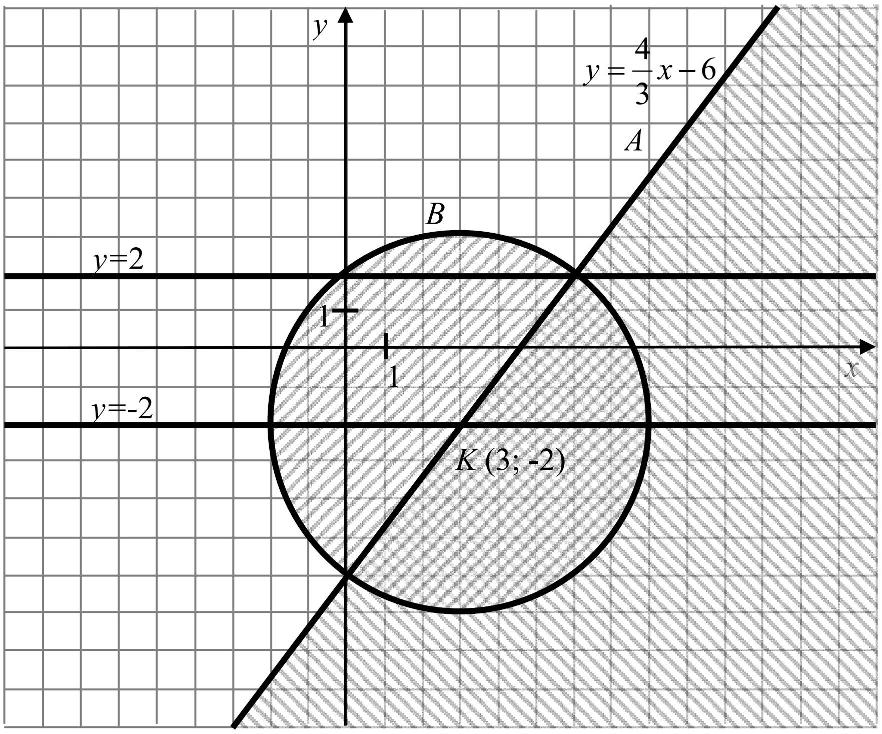
	α	β	γ	egység	δ
1. négyszög	**7e**	**6e**	**8e**	e=12°	
	84°	72°	96°		108°
2. négyszög	**6f**	**7f**	**8f**	$f=\frac{90^\circ}{7}$	
	$\frac{540^\circ}{7}=77{,}14^\circ$	90°	$\frac{720^\circ}{7}=102{,}86^\circ$		90°
3. négyszög	**6g**	**8g**	**7g**	$g=\frac{180^\circ}{13}$	
	$\frac{1080^\circ}{13}=83{,}08^\circ$	$\frac{1440^\circ}{13}=110{,}77^\circ$	$\frac{1260^\circ}{13}=92{,}92^\circ$		$\frac{900^\circ}{13}=69{,}23^\circ$

A helyesen megadott húrnégyszögenként	3-3 pont	*A 3 pont bontása:* *az egység helyes kiszámítása: 1 pont* *a szemközti szögpárok helyes kiszámítása: 1+ 1 pont*
Összesen:	**13 pont**	

7. b)		
Látható tehát, hogy vannak olyan húrnégyszögek, amelyekre rendre igaz a tanórán elhangzott három állítás közül egy-egy: Zsófi állítása az 1., Peti állítása a 2., Kata állítása a 3. négyszögre igaz.	3 pont	
Az elhangzott három állítás viszont nem igaz egyszerre a probléma megoldását jelentő három húrnégyszög mindegyikére.		*Ha a vizsgázó megadja mind a három típusú húrnégyszöget, és közvetlenül arra utal, hogy a három állítás egyszerre nem igaz mindhárom típusra, az utolsó 3 pontot kapja meg.*
Összesen:	**3 pont**	

Ha a vizsgázó egy húrnégyszöget vizsgál csak, és ennek megfelelően választja ki az igaz állítást, megoldására legfeljebb 5 pontot kaphat.

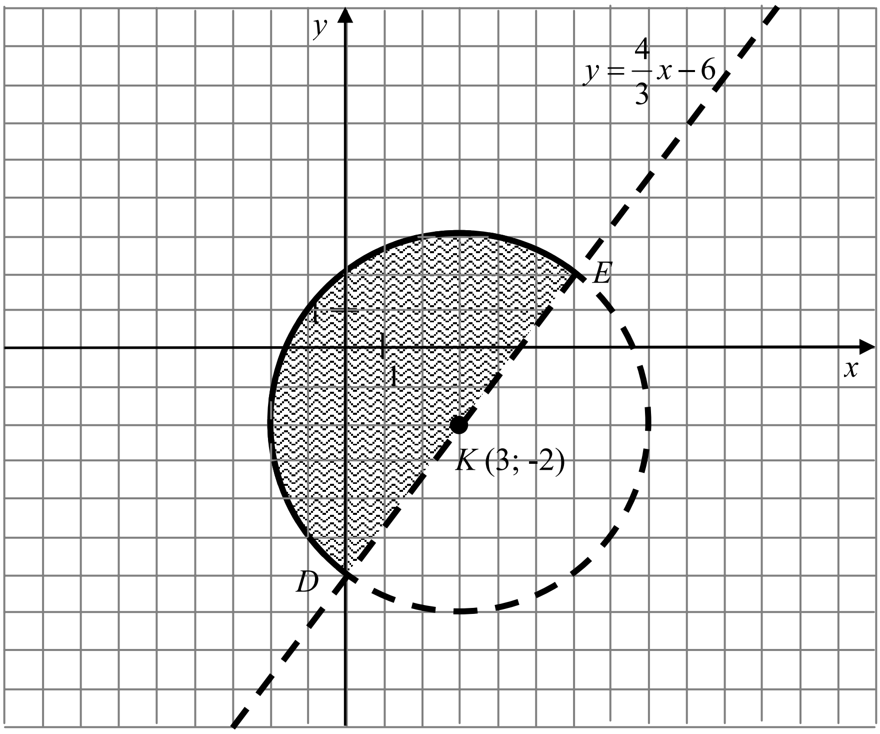
8. a)



Az A halmaz pontjai az $y=\frac{4}{3}x-6$ egyenletű egyenes alatti zárt félsík pontjai.	1 pont	
Az A halmaz ábrájáért.	1 pont	
A B halmaz pontjai az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű kör és a kör belső pontjai.	1 pont	
A kör középpontja $K(3;-2)$, sugara r = 5.	1 pont	
A B halmaz ábrájáért.	2 pont	
A C halmaz pontjai az $y=2$ és az $y=-2$ egyenletű párhuzamos egyenesek pontjai.	1 pont	
A C halmaz ábrájáért.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

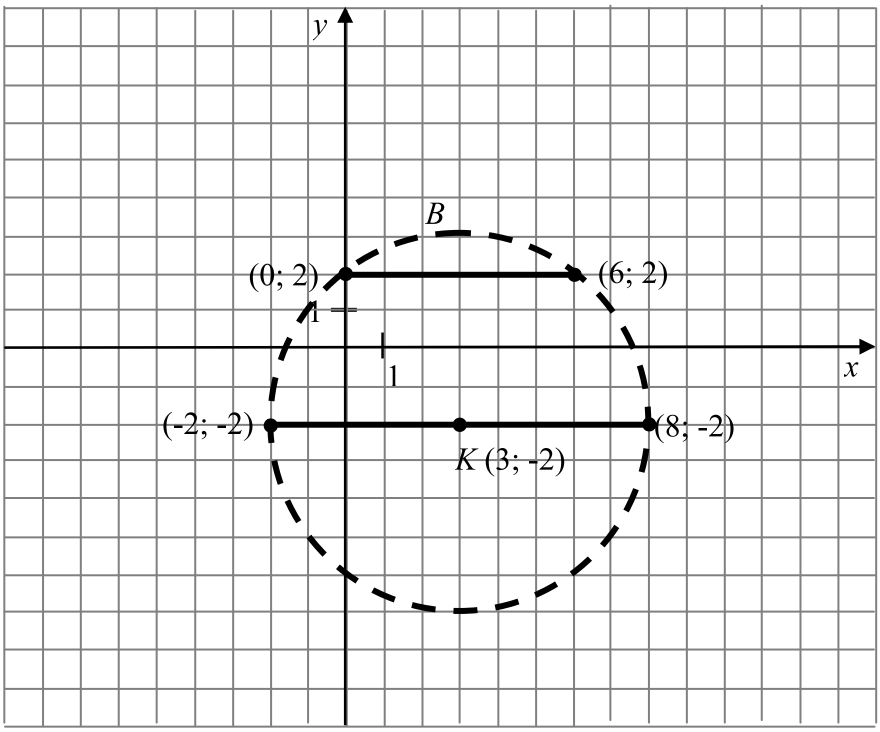
A teljes pontszámot az A és B halmaz leírása esetén akkor kaphatja meg, ha a ponthalmazok határoló vonalaira is világos az utalás.

8. b)



A $B \setminus A$ halmaz ábrázolása:	1 pont	
A $B \setminus A$ halmaz pontjai egy félkörlemez pontjai, amihez a félkörív és a belső pontok hozzá tartoznak, de a kör DE átmérője nem. (Az átmérő végpontjai: $D(0\,;-6)$ és $E(6\,;2)$.)	2 pont	*A teljes pontszámot megkaphatja akkor is, ha nem adja meg a D és E koordinátáit.*
A ponthalmaz pontjai a DE átmérő fölött vannak.	1 pont	*Bármilyen egyértelmű szöveges utalás arra, hogy melyik félkörlemezről van szó, 1 pont.*
Összesen:	**4 pont**	

8. c)



A $B \cap C$ halmaz a B ponthalmaz határoló körének két párhuzamos húrja: A húrok végpontjai: $(0\,;2)$ és $(6\,;2)$, valamint $(-2\,;-2)$ és $(8\,;-2)$. (Ez utóbbi húr egyben átmérő is.) A $B \cap C$ halmaz ábrázolása:	1 pont	
Az origótól a legmesszebb a $(8\,;-2)$ pont,	1 pont	
legközelebb a $(0\,;2)$ és a $(0\,;-2)$ pont van.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. A vonatkozó pontszámokat rendezett és világos ábráért is megkaphatja.
2. A világos és rendezett ábrázolás elfogadható indoklásként is.
3. A nem világos ábra esetén a vonatkozó pontszámok akkor adhatók, ha pl. numerikus behelyettesítéssel meggyőződik arról, hogy a közölt pontja illeszkedik a vizsgált ponthalmazra.

9.		
A megadott feltételeket a következő alakban használjuk: (1) $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$, ha $n \ge 3$ (2) $2a_2 = a_1 + (a_3 - 9a_1)$ (3) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 682$.	2 pont	*A 2 pont a (2) egyenlet helyes felírásáért jár.*
A sorozat harmadik tagja az (1) alapján: $a_3 = a_2 + 12a_1$.	1 pont	
Behelyettesítve a (2) összefüggésbe ezt az a_3 helyére, rendezés után kapjuk, hogy $a_2 = 4a_1$.	2 pont	
Ebből az $a_3 = a_2 + 12a_1 = 4a_1 + 12a_1 = 16a_1$.	1 pont	
A negyedik tagot felírva az (1) alapján: $a_4 = a_3 + 12a_2$. A jobb oldalon behelyettesítve az a_3 és az a_2 az a_1-gyel kifejezett értékét kapjuk, hogy $a_4 = 16a_1 + 12(4a_1) = 64a_1$.	2 pont	
Hasonlóan fejezhetjük ki a_5 értékét a_1 segítségével: $a_5 = a_4 + 12a_3 = 64a_1 + 12(16a_1) = 256a_1$.	2 pont	
A (3) egyenlőség bal oldalán a sorozat tagjait rendre az a_1-gyel kifejezett értékkel helyettesítve kapjuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + 4a_1 + 16a_1 + 64a_1 + 256a_1$.	2 pont	
Összevonás után: 341 a_1 = 682 . Ebből: $a_1 = 2$.	1 pont	
A hatodik tagot felírva az (1) alapján: $a_6 = a_5 + 12a_4$. Az a_5 és az a_4 értékét a_1-gyel kifejezve kapjuk, hogy: $a_6 = 256a_1 + 12 \cdot 64a_1 = 1024a_1 = 1024 \cdot 2 = 2048$.	2 pont	
A kapott 2; 8; 32; 128; 512; 2048,... számsorozat elemei kielégítik az (a_n) sorozat elemeiről megadott összes feltételt.	1 pont	
A sorozat hatodik tagja: 2048.		
Összesen:	**16 pont**	
Ha a vizsgázó csak megsejti (pl. a második és harmadik tag a_1-gyel történő kifejezése után), hogy ez a sorozat egy q = 4 hányadosú mértani sorozat, de ezt nem igazolja, akkor megoldására legfeljebb 8 pontot kaphat.		