

## MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI  
ÉRETTSÉGI VIZSGA

ERETTSÉGI VIZSGA • 2007. május 8.

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI  
ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS  
MINISZTÉRIUM

## Fontos tudnivalók

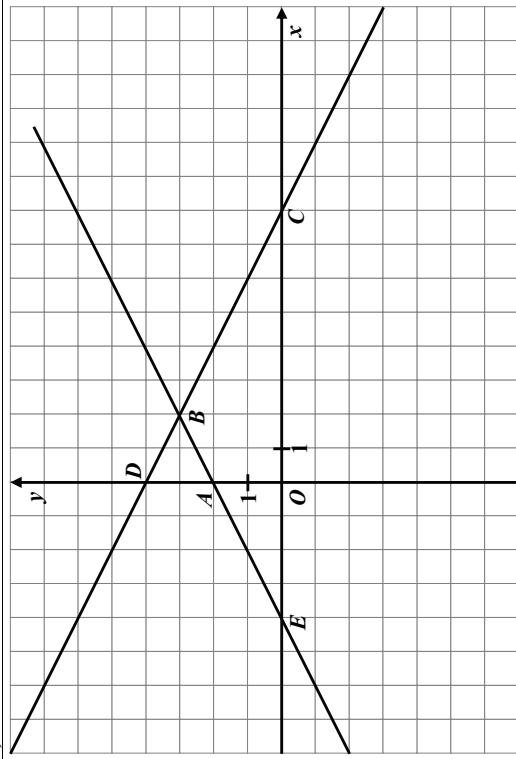
### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színtől elérő színű tollal kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke félalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszam van, a javító által adott pontszám a melléte levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes részpontszámokat is írja rá a dolgozatra.

### Tartalmi kérdések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól eltérő **megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szerzőjönél kevésbé részletezett.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredményhez helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldáson belül lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. Elvi **hibát** követően egyébként minden pontot meg kell adni.
6. Ha a megoldási útmutatóban zártójelben szerepel egy **megjegyzés vagy mertékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többször helyes megoldási próbálkozás közül a **vizsgázó által megijelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokról **jutalompon** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
9. Az olyan részszámításokról, részlépésekéről **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltéhetőleg – megijelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékkelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megijelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékkelést nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

1.



2.3

Helyes ábrázolás.		2 pont	
<b>b)</b>	<b>Összesen:</b> <b>2 pont</b>		
A konvex négyzet csúcsai $A, B, C, O$ , ahol $B$ pont a két egyenes metszéspontja: $B(2; 3)$ .		1 pont	
A négyzög területét kiszámíthatjuk pl. úgy, hogy a $DOC$ háromszög területéből kivonjuk az $ABD$ háromszög területét. A $DOC$ derékszögű háromszög területe: $\frac{OC \cdot OD}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16.$		2 pont	
Az $ABD$ háromszögben az $AD = 2$ , a $B$ csúcsból induló magasság hossza pedig a $B$ pont első koordinátájának értéke: 2, ezért az $ABD$ háromszög területe: 2. Az $ABC$ konvex négyzög területe: $16 - 2 = 14$ (területegyenség).		2 pont	
<b>c)</b>	<b>Összesen:</b> <b>6 pont</b>		
A konkáv négyzet csúcsai: $E, C, D, A$ . Az oldalhosszak: $EC = 12; CD = \sqrt{80}; DA = 2; AE = \sqrt{20},$ $ED = 4\sqrt{2}; CA = \sqrt{68}$		4 pont	<i>Oldalhosszanként 1-1 pont jár.</i>
a kerítelei: $k_1 = EC + CD + DA + AE =$ $= 12 + \sqrt{80} + 2 + \sqrt{20} = 14 + 6\sqrt{5} (\approx 27,42);$ $k_2 = ED + DC + AC + AE = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{17}$ $(\approx 27,32);$ $k_3 = ED + AD + AC + EC = 14 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$ $(\approx 27,91).$		1 pont	
<b>Összesen:</b> <b>5 pont</b>			<i>Az 5 pont jár akkor, ha a lehetséges három konkáv négyzet közül a vizsgázó legalább egynél jöli kiszámolt a keríteleit.</i>

$C \cap D = \{14; 38\}$ ,		1 pont	
ennek elemei közül (a 14 nem felül meg, mert eleme az $A$ -nak); a 38 megfelel, mert sem az $A$ -nak, sem a $B$ -nek nem eleme.		1 pont	
Tehát az alábbi öt szám elégít ki a feladat követelményeit: 29; 38; 49; 70; 77.		1 pont	
<b>Összesen:</b> <b>16 pont</b>			
<u>Megjegyzések:</u> Ha vizsgázó anélküli sorol fel megfelelő számokat, hogy megnutatná, ezek miért felelnek meg (melyik a két ígaz és a két hamis állítás), a felsorolásra 1 és 2 helyes szám esetén 1 pontot, 3 helyes szám esetén 2 pontot, 4 helyes szám esetén 3 pontot, 5 helyes szám esetén 4 pontot kap. Ha a vizsgázó a felsorolt számokról megnutatja, hogy ezek megfelelnek a kikötéseknek, de nem ter ki annak bizonyítására, hogy más számok vajon megfelelnek-e a feladat feltételeinek, megoldására legfeljebb 8 pontot kaphat (az előzőekben felsorolt pontszámok duplájáti).			

**9.**

Először megadjuk elemekkel rendre azt a négy halmazt a kétnyugyú számok közében, amelyek igazzák a következőkötetet:

Az  $N$  osztálohoz 7-tel, ha a szám hetet többszöröse:  $A = \{14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 70; 77; 84; 91; 98\}$

Az  $N$  a 29 többszöröse:  $B = \{29; 58; 87\}$

Az  $N + 11$  négyzetszám, ha  $N = n^2 - 11$ , ahol  $22 < n^2 < 111$ .  
 $C = \{14; 25; 38; 53; 70; 89\}$

Az  $N = 13$  négyzetszám, ha  $N = k^2 + 13$ , ahol  $0 \leq k^2 < 87$ .

$D = \{13; 14; 17; 22; 29; 38; 49; 62; 77; 94\}$

A feladat feltételeit pontosan azok az elemek elégítik ki, amelyek e négy halmaz közül kiválasztott kettő metszetében benne vannak, de nem elemei a másik két halmaz egyikének sem.

A négy halmazból kettőt hatéleképpen választhatunk ki.  
 Vizsgáljuk ezt a hat halmazt!

$A \cap B$  és az  $B \cap C$  halmazok mindegyike üres halmaz.

$A \cap C = \{14; 70\}$ ,

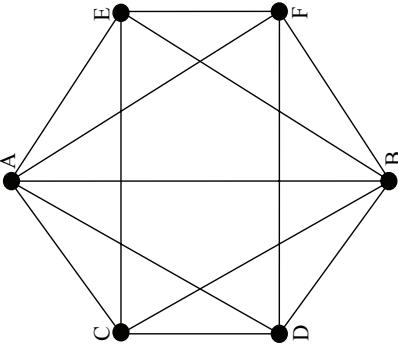
ennek elemei közül a 14 nem fél meg, mert  $D$ -nek eleme; a 70 megfelel, mert sem  $B$ -nek, sem  $D$ -nek nem eleme.

$A \cap D = \{14; 49; 77\}$

ennek elemei közül (a 14 nem fél meg, mert  $C$ -nek eleme); a 49 és a 77 is megfelel, mert egyik sem eleme sem a  $C$ -nek, sem a  $B$ -nek.

$B \cap D = \{29\}$ ,

a 29 megfelel, mert sem az  $A$ -nak, sem a  $C$ -nek nem eleme.

**3. a)**

A helyes ábrán 6 csücs van feltüntetve, amelyen két darab ötödfokú (A és B) és négy darab negyedfokú pont (C, D, E, F) van.

A hatpontról teljes gráfban két él hiányzik. Ez a két él nem összefüggő részgráf a komplementer gráfban.

**b)**

A kézfojtások számának kétszerését kapjuk meg, ha összeadjuk a gráfban a fokszámokat.  
 A fokszámok összege: 26.  
 Az útitársak 13 kézfojtással köszönötték egymást.

Összesen: **4 pont** → A 3 pont megadható akkor is, ha a hélyesen fejrajzolt gráfban megszámolja az éleket.

Összesen: **3 pont** → A 3 pont megadható akkor is, ha a hélyesen fejrajzolt gráfban megszámolja az éleket.

**c) I. megoldás**

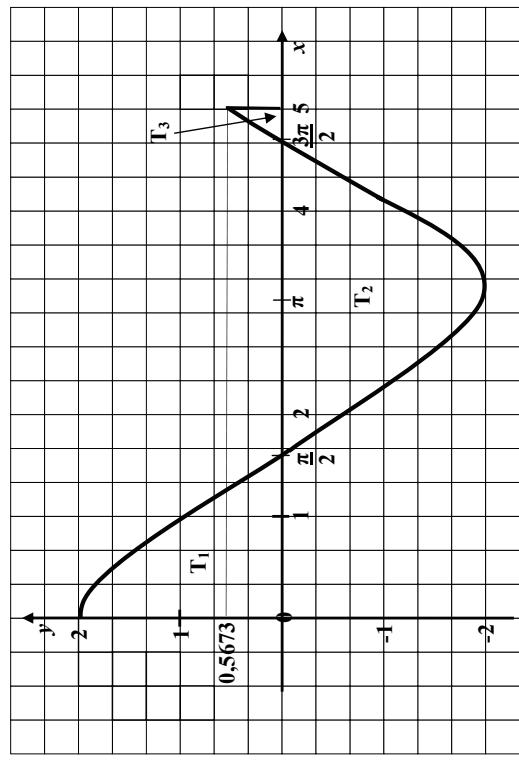
Válasszunk először pl. az A-val jelölt tudósnak szobatársat. Ezt örökre képben tehetjük meg.

Ha már A-hoz kijelöltük a szobatársat, a maradék négy tudósból egyet pl. C-t kiválasztva, neki háromféléképpen oszthatunk szobatársat.

Ha két szobát már kiadtunk, a maradék szobába már csak egyféléképpen lehet a szobába még be nem osztott két tudós.

A szobák között nem teszünk különbséget, tehát összesen  $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ -félle szababeosztás lehetséges.

**Összesen:** **6 pont**  
*Ha vizsgázó rendszerezve felsorolja minden a 15 lehetőséget, akkor is jár a 6 pont.  
 Ha a felsorolás rendszerezett, de hiányos, akkor legfeljebb 4 pont.*

**b)****c) II. megoldás**

Két tudós $\binom{6}{2}$ -féleképpen választható ki.	2 pont
A maradék négyből újabb két tudós $\binom{4}{2}$ -féleképpen választható ki.	1 pont
Így $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$ -féleképpen oszthatók három darab kettés csoportba.	1 pont
A három szobához 3!-féleképpen rendelhetők a csoportok, tehát $\frac{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15$ szababeosztás lehet.	2 pont
<b>Összesen:</b> <b>6 pont</b>	

**c) III. megoldás**

Két tudós  $\binom{6}{2}$ -féleképpen választható ki.

A maradék négyből újabb két tudós  $\binom{4}{2}$ -féleképpen választható ki.

Így  $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$ -féleképpen oszthatók három darab kettés csoportba.

A három szobához 3!-féleképpen rendelhetők a csoportok, tehát  $\frac{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15$  szababeosztás lehet.

**Összesen:** **6 pont**

A grafikon helyes vázolása az egységek és intervallum-végpontok jelölésével.	2 pont
A keresett síkdom három tartományból áll, ezek területét jelöljük rendre $T_1$ , $T_2$ , $T_3$ -mal.	
Mivel az $f$ függvény folytonos, a keresett területeket integrálal (is) számíthatjuk:	
$T_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx = 2 [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$	2 pont
$A \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ intervallon az $f$ értékei nem pozitívak, ezért:	
$T_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2  \cos x  dx = 2 [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4.$	2 pont
$T_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} 2  \cos x  dx = 2 [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} = 2 \sin 5 + 2.$	2 pont
A síkdom területe: $T = T_1 + T_2 + T_3 =$ $= 2 + 4 + 2 \sin 5 + 2 = 8 + 2 \sin 5 \approx 6,082.$	2 pont
<b>Összesen:</b> <b>10 pont</b>	

<b>8. a)</b>	
A $\cos x$ függvény párossága miatt	2 pont
$f(x) = 2 \cos x$	
Az $f$ függvény korlátos,	1 pont
mert $-2 \leq f(x) \leq 2$	1 pont
Nem igaz, hogy az $f$ függvény minimumhelye és legnagyobb értéke 2, és ez nem iracionális szám.	1 pont
mert az $f$ függvény legnagyobb értéke 2, és ez nem iracionális szám.	1 pont
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>

<b>4. a)</b>	
A hét vektor összege:	
$\overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}) + \overrightarrow{AG}$ .	
A jobb oldalon szereplő vektorokat rendre $\mathbf{a}$ , $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ élvektorokkal kifejezve:	
$\overrightarrow{AP} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ .	1 pont
A műveleti azonosságokat alkalmazva kapjuk, hogy:	
$\overrightarrow{AP} = 4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ .	1 pont
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>
<b>b)</b>	
Mivel $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AG}$ , az $\overrightarrow{AP}$ vektor hossza az $AG$ testátló hosszának négyzetere.	1 pont
Pitagorasz tételelt alkalmazva:	
$AG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2 = 10^2 + 8^2 + 6^2 = 200$ ,	1 pont
$AG = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ .	
$AP = 4AG = 40\sqrt{2}$ ( $\approx 56,57$ ).	1 pont
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>
<b>c)</b>	
Mivel $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AG}$ , az $\overrightarrow{AP}$ vektor és az $\overrightarrow{AE}$ vektor szöge megegyezik az $\overrightarrow{AG}$ vektor és az $\overrightarrow{AE}$ vektor szögével. Ez a szög az $\angle AEG$ derékszögű háromszög $A$ -nál levő szöge, jelöljük $\alpha$ - val.	1 pont

Felhasználva, hogy $AE = 6$ és $AG = 10\sqrt{2}$ ,		1 pont	
$\text{így } \cos \alpha = \frac{AE}{AG} = \frac{6}{10\sqrt{2}} \approx 0,4243$ ,			
innen $\alpha \approx 64,9^\circ$ .	1 pont		
<b>Összesen:</b> <b>3 pont</b>			
<b>d)</b> A $HFC$ háromszög $S$ súlypontiába vezető helyvektor ( $\overrightarrow{AS}$ ) a csúcsokba vezető helyvektorok összegének harmada.	2 pont		
$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}}{3} =$ $= \frac{(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{a} + \mathbf{b})}{3} =$ $= \frac{2}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$	1 pont		
vagyis $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ .	1 pont		
$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP} = \left( \frac{2}{3} \overrightarrow{AG} \right) \cdot (4 \overrightarrow{AG}) =$ $= \frac{8}{3} AG^2 = \frac{8}{3} \cdot 200 = \frac{1600}{3} (\approx 533,3)$	2 pont		
<b>Összesen:</b> <b>6 pont</b>			

<b>c)</b> Ha mindenkinek a nettó bérét számítjuk, akkor az a bruttó bérnek $60,6\%$ -a.	1 pont	<i>Mind a c) minden a d) kérdés értékelése esetén maximális pontszámot adjunk annak a vizsgázónak, aki a következőkre illene a szövörásra vonatkozó általános tételekre hivatkozva válaszolt helyesen a kérdésekre. Ha a vizsgázó a kiszámított átlag és/vagy szórás értéke után nem írja ki az egységet (pl.: „ezér Ft”), akkor az egész feladat értékelése索然 csak egyszer vonjunk le 1 pontot.</i>
A 220 dolgozó mindenkinek 0,606-szorosára változik a bér, ezért az átlag is 0,606-szoros lesz, vagyis a nettó bér átlaga $0,606 \cdot 141,8 \approx 85,93$ ezer Ft. <i>Megjegyzés: Helyes válasznak effogadhatjuk a 85,94 ezer Ft-ot is.</i>	2 pont	
<b>Összesen:</b> <b>3 pont</b>		
<b>d)</b> Ha a 220 dolgozó mindegyikének 2500 Ft-tal nő a bruttó bér, akkor a bérök átlaga is ennyivel nő. Mind a 220 adatra nézve egyiknél sem változik meg az új adat és az új átlag eltérése, mert mindenki mennyisége ugyanannyival nőtt, különbségük nem változik. Ezért változatlan különbségek négyzetének átlaga is változatlan: marad az augusztusi érték. A bruttó bérök szórása tehát nem változik.	1 pont	<i>Ha a 220 dolgozó mindenkinek 2500 Ft-tal nő a bruttó bér, akkor a bérök átlaga is ennyivel nő. Mind a 220 adatra nézve egyiknél sem változik meg az új adat és az új átlag eltérése, mert mindenki mennyisége ugyanannyival nőtt, különbségük nem változik. Ezért változatlan különbségek négyzetének átlaga is változatlan: marad az augusztusi érték. A bruttó bérök szórása tehát nem változik.</i>
<b>Összesen:</b> <b>4 pont</b>		

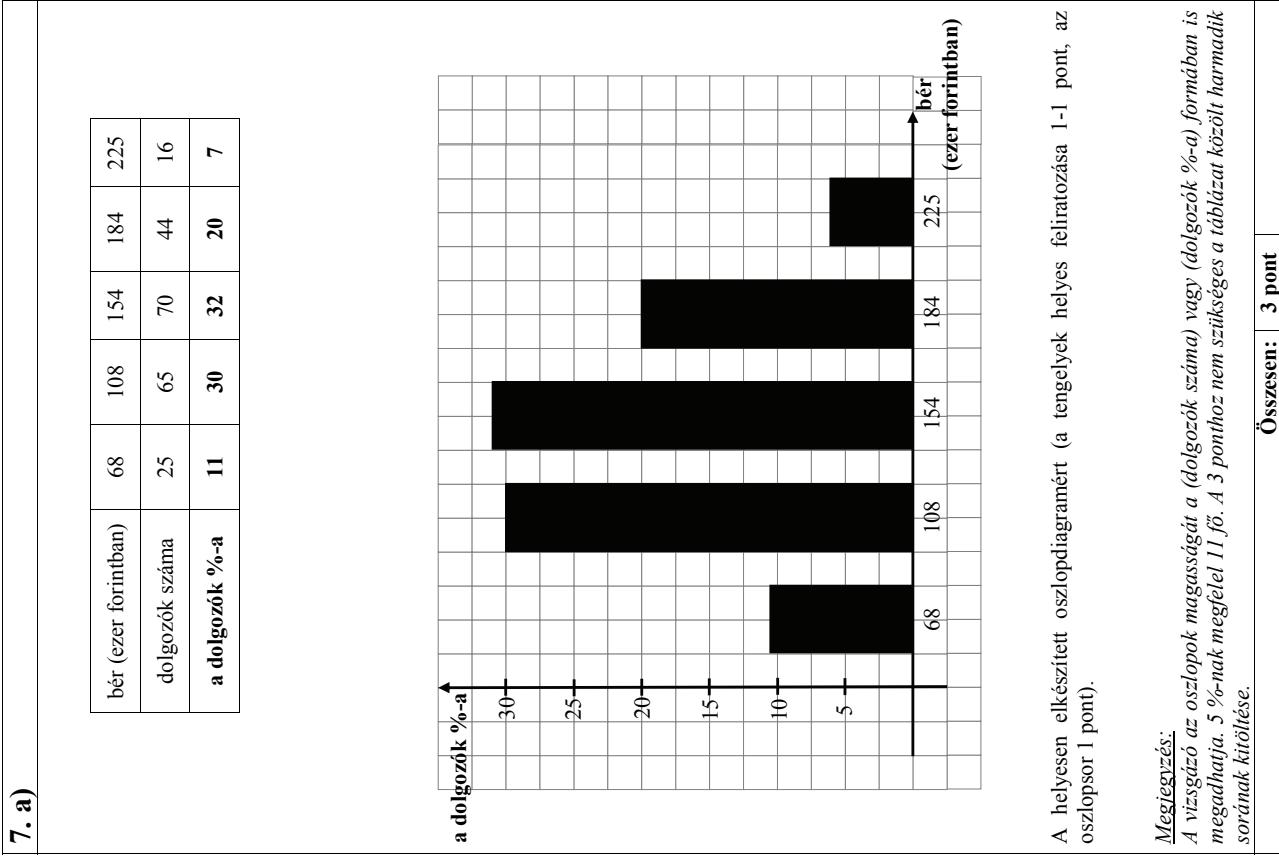
<b>b)</b>	Az augusztusi bruttó bérrek átlaga: $\frac{25 \cdot 68 + 65 \cdot 108 + 70 \cdot 154 + 44 \cdot 184 + 16 \cdot 225}{220} = \frac{31196}{220} = 141,8 \text{ ezer Ft.}$	Az átlag helyes kiszámítása esetén jár a 3 pont akkor is, ha a vizsgázó nem részletezi a számításait, mert behívja az adatokat a kalkulátorba, és akkor azonnal kap eredményt.
		Az augusztusi bruttó bérrek szórása: 43,17 ezer Ft.

<b>5.</b>	Az íjuk a nevezőket szorzat alakba! $\frac{x}{(x-2)(x+2)} + \frac{p}{x(x+2)} + \frac{1}{x(2-x)} = 0$	2 pont
	A nevezők értéke nem lehet 0, ezért x nem lehet -2; 0; 2.	1 pont
	Az $(x-2)x(x+2)$ közös nevezővel szorozva az egyenlet mindenét oldható, és x szerint rendezve kapjuk, hogy: $x^2 + (p-1)x - 2(p+1) = 0$ .	1 pont
	A megoldóképétből	1 pont
	$x_{1,2} = \frac{1-p \pm \sqrt{p^2 + 6p + 9}}{2},$	1 pont
	vagyis $x_{1,2} = \frac{1-p \pm  p+3 }{2}.$	1 pont
	$x_1 = 2$ , illetve $x_2 = -(p+1)$ .	2 pont
	Két különböző gyöke nem lehet az egyenletnek, mert az $x_1 = 2$ az eredeti egyenletnek nem gyöke, tehát legfeljebb az $x_2 = -(p+1)$ lehet gyök.	2 pont
	Egyetlen gyök sincs, ha $x_2$ a kizárt $-2; 0; 2$ értékek valamelyikét veszi fel.	2 pont
	$x_2 = -2$ , ha $p = 1$ ; $x_2 = 0$ , ha $p = -1$ ; $x_2 = 2$ , ha $p = -3$ .	3 pont
	Ha tehát a p paraméter a $-3$ ; $-1$ vagy $1$ értékéket veszi fel, az eredeti egyenletnek nincs valós gyöke.	1 pont
	<b>Összesen:</b> <b>16 pont</b>	

<b>6. a)</b>	A mértani közép tulajdonság alapján: $p^2 = 4c$ .	1 pont
	A számtani közép tulajdonság alapján: $2c = p + 40$ .	1 pont
	A második egyenletből $2c$ értékét az első egyenletbe helyettesítve és rendezve kapjuk, hogy $p^2 - 2p - 80 = 0$ ,	1 pont
	innen $p_1 = 10$ és $p_2 = -8$ .	1 pont
	Mivel a negatív gyök nem ad megoldást, Dani 10 db nagy piros és 25 darab kis csíkos halat számolt meg.	1 pont
	<b>Összesen:</b> <b>5 pont</b>	

<b>b)</b>	A halállomány gyarapodása minden hónapban 20 %-os, azaz havonta 1,2-szeresére nő a darabszám a gyarapodás miatt. Ha $x$ %-ot adott el Kéthavonta Dani, akkor az eladás kéthavonta $\left(1 - \frac{x}{100}\right) = q$ -szorosára változtatja az állományt. Kéthavonta a változás minden $1,2^2 \cdot q = 1,44 \cdot q$ -szoros.	1 pont
Ezekből felírható a 100 $(1,44q)^2 = 252$ egyenlet.	1 pont	
Rendezés után $q = 0,75$ adódik.	2 pont	
Kéthavonta a halállomány 75 %-a maradt meg, vagyis Dani kéthavonta az állomány 25 %-át adta el.	1 pont	
<b>Összesen:</b> 7 pont		

Az összes egyenlően valószínű kiválasztások száma: $\binom{20}{8}$ .	1 pont	A binomiális egyenlítőkhejres értékét fogadjuk el akkor is, ha nem tüneti fel a vizsgázó a kiszámolás módját (vethető az értéket gépből és függetlenülbázathol is). A valószínűség numerikus kiszámolásának elmaradása vagy eltérülése esetén az utolsó 2 pont helyett 1 pont adható.
A kedvező esetek száma: $\binom{5}{3} \cdot \binom{15}{5}$ .	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{15}{5}}{\binom{20}{8}} = \frac{10 \cdot 3003}{125970} = 0,2384.$	2 pont	
<b>Összesen:</b> 4 pont		



A helyesen elkészített oszlopdiagramról (a tengelyek helyes feliratozása 1-1 pont, az oszlopsor 1 pont).

Megjegyzés:  
A vizsgázó az oszlopok magasságát a (dolgozók száma) vagy (dolgozók %-a) formában is megadhatja. 5 %-nak megfelel 11 fő. A 3 ponthoz nem szükséges a táblázat közötti harmadik sorának kitöltése.