ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2007. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. (Ha a vizsgázó nem jelölte ki az értékelendő változatot, a javító tanár a legutolsó megoldási próbálkozást értékelje!)
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

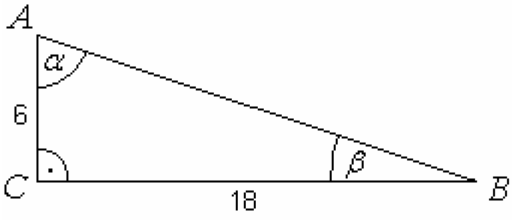
I.

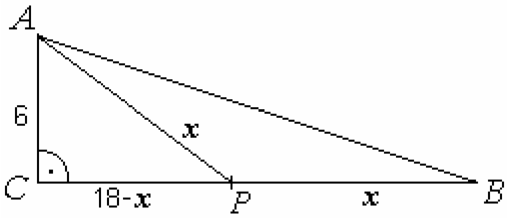
1.

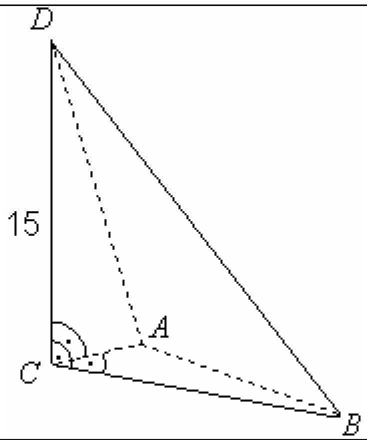
1. megoldás		
$\sin\frac{\pi}{2}=1$.	1 pont	
lg1 = 0.	1 pont	
$2^{\log_2 9}=9$.	1 pont	
Így az $\frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6}=10$ egyenletet kell megoldani. Ebből: $x^2=4$.	4 pont	
$x_1=2$.	1 pont	
$x_2=-2$.	1 pont	
Ellenőrzés: $x = 2$ megoldás.	1 pont	
$x = –2$ nem megoldás.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

Ha vizsgálja az értelmezési tartományt, és ennek alapján az x = –2-t kizárja, az x = 2-t pedig az ÉT alapján elfogadja (se nem ellenőrzi, se nem hivatkozik ekvivalens átalakításokra), akkor maximum 10 pont jár.
Ha a feladat megoldása során a tanuló csak az értelmezési tartományt vizsgálja (x ≠ -2 és x ≠ 3), és más értékelhető elemet nem tartalmaz a megoldása, akkor a helyes értelmezési tartomány megállapításáért 2 pont jár.

2. megoldás		
$x^2-10x-24=(x+2)(x-12)$.	1 pont	
$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$.	1 pont	
$x \neq -2$.	1 pont	
$\frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6}=\frac{x-12}{x-3}$.	1 pont	*Az átalakítások után az egyszerűsített egyenletért 4 pont jár.*
$\sin\frac{\pi}{2}=1$.	1 pont	
lg1 = 0.	1 pont	
$2^{\log_2 9}=9$.	1 pont	
Behelyettesítve az egyszerűsített egyenletbe: $\frac{x-12}{x-3}=10$.	1 pont	
$x = 2$.	2 pont	
Ellenőrzés: $x = 2$ megoldás.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

2.		
a)		
 A szokásos jelölésekkel: $\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.	1 pont	
$\beta \approx 18{,}43°$.	1 pont	
Ekkor $\alpha = 90° - \beta \approx 71{,}57°$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*A fok jelölése nélkül legfeljebb 2 pont adható.*
Minden helyesen (egészre, tizedre) kerekített érték elfogadható.		

b)		
 Jelöljük a derékszögű háromszögben a *PB* szakasz hosszát *x*-szel.	2 pont	*Ezt a pontot akkor is megkapja, ha a magyarázó szöveg helyett megfelelő ábrát készít.*
A *PCA* derékszögű háromszögben: $6^2 + (18 - x)^2 = x^2$.	2 pont	
$36 + 324 - 36x + x^2 = x^2$. $x = 10$. Tehát *PB* = 10 cm.	2 pont	*Ha a négyzetre emelést rosszul végzi el, akkor ez a 2 pont nem jár.*
Összesen:	**6 pont**	
Más megoldás esetén az adatok helyes rögzítésért (szövegben vagy ábrán) 1 pont; az AB szakasz kiszámolásáért 1 pont; a PB kiszámításáért (koszinusztétel vagy szinusztétel vagy szögfüggvény segítségével) 4 pont jár a helyesen kerekített értékkel számolva is.		

c)		
		
Tekintsük a tetraéder alapjának az *ABC* háromszöget, ekkor a testmagasság *CD* lesz: m = 15 cm.	2 pont	*Ezt elegendő az ábrán is jelölni.*
Az *ABC* háromszög területe: 54 cm^2. $V = \frac{Tm}{3}$. $V = \frac{54 \cdot 15}{3}$. Így a keresett térfogat: 270 cm^3.	2 pont	*A mértékegység nélküli válasz 1 pont*
Összesen:	**4 pont**	
Ha a vizsgázó érdemben nem foglalkozik a feladattal, de a derékszögű tetraéder ábrája helyes (de nincs rajta a DC=15), akkor 1 pontot kap.		

3.		
1. megoldás		
A mértani sorozat tagjai: $a; aq; aq^2$. (1) $a + aq + aq^2 = 26$.	1 pont	
A számtani sorozat tagjai: $a + 1$; $aq + 6$; $aq^2 + 3$.	1 pont	
Ezért: $aq + 6 = \dfrac{a + 1 + aq^2 + 3}{2}$.	1 pont	
Rendezve: (2) $a - 2aq + aq^2 = 8$.	1 pont	
A két egyenlet különbsége: $3aq = 18$, ahonnan $q = \dfrac{6}{a}$.	2 pont	
Behelyettesítve az (1)-be: $a + a \cdot \dfrac{6}{a} + a \cdot \left(\dfrac{6}{a}\right)^2 = 26$.	1 pont	
Ebből: $a^2 - 20a + 36 = 0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei: $a = 2$ és $a = 18$.	1 pont	
Visszahelyettesítés után: $q_1 = 3$,	1 pont	
$q_2 = \dfrac{1}{3}$.	1 pont	
Tehát a keresett számtani sorozat első három tagja: 3; 12; 21,	1 pont	
illetve: 19; 12; 5.	1 pont	
Ezek megfelelnek a feladat feltételeinek.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

2. megoldás		
A számtani sorozat első három tagjának összege: $26 + (1 + 6 + 3) = 36$,	1 pont	
Ezért a második tagja 12.	2 pont	
Jelöljül a számtani sorozat különbségét d-vel, ekkor a sorozat első három tagja: 12-d; 12; 12+d.	1 pont	
A mértani sorozat tagjai: 11-d; 6; 9+d.	2 pont	
Ezért $6^2 = (11 - d) \cdot (9 + d)$;	2 pont	
ahonnan $d^2 - 2d - 63 = 0$.	1 pont	
$d = 9$ vagy $d = -7$.	1 pont	

Tehát a keresett számtani sorozat első három tagja: 3; 12; 21,	1 pont	
illetve: 19; 12; 5.	1 pont	
Ezek megfelelnek a feladat feltételeinek: a mértani sorozat megfelelő tagjai: 2; 6; 18 illetve 18; 6; 2.	2 pont	
Összesen:	**14 pont**	

3. megoldás		
A mértani sorozat tagjai: $\frac{a}{q}$; *a; aq*. $\frac{a}{q}+a+aq=26$.	1 pont	
A feladat szerint az egyes tagok értékét megnövelve kapjuk: $\left(\frac{a}{q}+1\right)+(a+6)+(aq+3)=36$.	3 pont	
A számtani sorozat tulajdonságai miatt $a + 6 = 12$.	2 pont	
Tehát $a = 6$.	1 pont	
$6\cdot\left(\frac{1}{q}+q+1\right)=26$ $3q^2-10q+3=0$	2 pont	
$q_1=\frac{1}{3}$	1 pont	
$q_2=3$	1 pont	
Tehát a keresett számtani sorozat első három tagja: 3; 12; 21,	1 pont	
illetve: 19; 12; 5.	1 pont	
Ezek megfelelnek a feladat feltételeinek.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

4.		
a)		
A helyes parabola ábrázolása az adott intervallumban.	3 pont	*Ha nem a megadott intervallumon ábrázol, akkor 2 pont.*
Összesen:	**3 pont**	*Helyes ábra esetén magyarázat hiánya miatt ne vonjunk le pontot!*

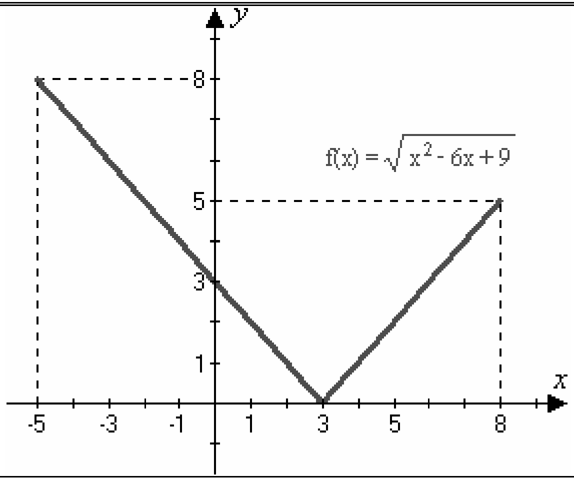
b)		
1. megoldás		
A parabola egy adott pontjában húzott érintő meredekségét itt az első derivált segítségével kaphatjuk meg. $y' = 2x - 8$.	4 pont	*Az első derivált helyes megadásáért indoklás nélkül is jár a 4 pont.*
Az érintési pont első koordinátájának behelyettesítésével: $y'(5) = 2 = m$.	2 pont	
$y = mx + b$ $P(5; -4)$, $-4 = 10 + b$, $b = -14$.	2 pont	*Az $y + 4 = 2(x - 5)$ alakkal is dolgozhat.*
Az érintő egyenlete: $y = 2x - 14$.	2 pont	
Összesen:	**10 pont**	

2. megoldás		
Az érintő nem párhuzamos az y-tengellyel, ezért egyenletét $y = mx + b$ alakban keressük.	1 pont	*A gondolat ábrán való megjelenítése is elfogadható.*
A $P(5; -4)$ koordinátáit behelyettesítve: $-4 = 5m + b$, $b = -4 - 5m$. Visszahelyettesítve: $y = mx - 4 - 5m$.	1 pont	
Ha a következő egyenletrendszernek egy megoldása van, akkor a keresett egyenes érintő lesz: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 8x + 11 \\ y = mx - 4 - 5m \end{array}\right\}$.	1 pont	
$mx - 4 - 5m = x^2 - 8x + 11$ $x^2 - 8x - mx + 15 + 5m = 0$	1 pont	
$D = (-8 - m)^2 - 4(15 + 5m) = 0$	2 pont	
$m^2 - 4m + 4 = 0$	1 pont	
$m = 2$	1 pont	
$b = -14$	1 pont	
Az érintő egyenlete: $y = 2x - 14$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	
Ha a vizsgázó az érintő egyenletét olyan tétel (ismeret) alapján írja fel, amely nem tartozik a vizsgakövetelményekhez, akkor a felhasznált tételre pontosan kell hivatkoznia. Ennek elmaradása esetén legfeljebb 8 pont adható.		

II.

Az 5–9. feladatok közül a tanuló által megjelölt feladatot nem kell értékelni.

5.		
a)		
$x^2-6x+9=(x-3)^2$.	1 pont	
Mivel ez minden valós x értékre nemnegatív, ezért a legbővebb részhalmaz az **R**.	1 pont	*Magyarázó szöveg nélkül is jár az 1 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

b)		
$\sqrt{(x-3)^2}=\lvert x-3\rvert$.	2 pont	*Ha nem jelöli az abszolútértéket, de esetszétválasztással indokol, akkor is jár a 2 pont.*
	3 pont	*Ha elsőfokú függvényt ábrázol, legfeljebb 1 pontot kap.* *Ha a grafikon jó, de az intervallum nem, akkor 2 pont jár.*
Összesen:	**5 pont**	

c)		
A: Hamis.	1 pont	*Az állítások igazságtartalmát a tanuló által felrajzolt függvény alapján kell eldönteni.*
B: Hamis.	1 pont	
C: Igaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

d)		
1. megoldás		
$\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{-3}^{3}=$	3 pont	
$=(9-27+27)-(-9-27-27)=$	2 pont	*A jó eredményért, a számítás részletezése nélkül is 3 pont adható.*
$=9-(-63)=72$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. megoldás		
$\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\int_{-3}^{3}(x-3)^2\,dx\ =$	1 pont	
$=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{-3}^{3}=$	3 pont	
= 0 – (–72) = 72.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6.		
a)		
10 kg leszedett szilvából kimagozás után 9,5 kg szilva lesz.	1 pont	
A 9,5 kg kimagozott szilvában 90% víz, míg 10%, azaz 0,95 kg a szárazanyag-tartalom.	1 pont	
A 10 kg nyers szilvából készült aszalt szilvában ez a 0,95 kg a feltétel szerint a tömeg 95%-a, hiszen csak 5%-a víz.	2 pont	*Ha kiderül, hogy a szárazanyag-tartalom állandóságát felismerte, akkor jár a 2 pont.*
Tehát keressük, hogy hány kg-nak a 95%-a lesz 0,95 kg. Így adódik a 100%-ra 1 kg.	1 pont	
Azaz 10 kg szilvából valóban mindössze 1 kg aszalt szilva lesz.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
A pontok akkor is járnak, ha a számolásból világosan kiderül a gondolatmenet.		

b)		
Ha x kg volt a termése, akkor a feltétel szerint: $\frac{x}{2}\cdot 120+\frac{x}{2}\cdot 0{,}1\cdot 1400=286\,000$.	2 pont	*Hibás egyenlet felírása elvi hibának minősül.*
$x = 2200$ kg volt a termése.	1 pont	*Mértékegység nélkül ez a pont nem jár.*
Összesen:	**3 pont**	

c)		
A: 150° $\frac{150°}{360°}=\frac{5}{12}$ rész; (300 kg) **B:** 90° $\frac{90°}{360°}=\frac{1}{4}$ rész; (180 kg) **C:** 18° $\frac{18°}{360°}=\frac{1}{20}$ rész; (36 kg) **D:** 102° $\frac{102°}{360°}=\frac{17}{60}$ rész. (204 kg)	4 pont	*Az arányok megállapításáért vagy a mennyiségek kiszámításáért jár az 1-1 pont.*
Az átlagár a súlyozott közép: $\frac{120\cdot\frac{5\cdot 720}{12}+200\cdot\frac{720}{4}+230\cdot\frac{720}{20}+260\cdot\frac{17\cdot 720}{60}}{720}=$ $=\frac{1111}{6}\approx 185{,}17.$	2 pont	*Ha a megadott négy ár számtani közepét számolja, akkor nem kaphat pontot.*
Tehát az átlagár kb. 185 Ft.	1 pont	*Mértékegység nélkül ez a pont nem jár.*
Összesen:	**7 pont**	
Minden helyesen (egészre, tizedre) kerekített érték elfogadható.		

7.		
a)		
$\binom{6}{3}$.	2 pont	*Ha szisztematikusan felsorolja az összes háromelemű halmazt, akkor is teljes pontszám jár. Ha kihagy 1–3 esetet, akkor 1 pont, ha ennél többet, akkor 0 pont jár.*
A háromelemű részhalmazok száma: 20.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

b)		
Egy szám 5-tel osztható, ha nullára vagy ötre végződik.	1 pont	*Ha ezt nem írja le, de a megoldásban felhasználja, akkor is jár ez a pont.*
Nullára végződő hatjegyű számból 5! van.	1 pont	
Ötre végződő hatjegyű számból $4 \cdot 4!$ van.	2 pont	*Ha nem veszi figyelembe, hogy nullával nem kezdődhet a szám, akkor 0 pont jár.*
Összesen: 5! + $4 \cdot 4!$ =	1 pont	
= 120 + 96 = 216.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

c)		
1. megoldás		
Komplementer halmaz segítségével számolható ki.	1 pont	*Ha ezt nem írja le, de a megoldásban felhasználja, akkor is jár ez a pont.*
Az összes hatjegyű szám: $5 \cdot 6^5$.	2 pont	*Ha nem veszi figyelembe, hogy nullával nem kezdődhet a szám, akkor 1 pont jár.*
Azok a hatjegyű számok, amelyekben nincs egyes: $4 \cdot 5^5$.	2 pont	*Ha nem veszi figyelembe, hogy nullával nem kezdődhet a szám, akkor 1 pont jár.*
Tehát: $5 \cdot 6^5 - 4 \cdot 5^5 =$	1 pont	
= 38 880 – 12 500 = 26 380 ilyen hatjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. megoldás		
Az egyes lehetőségek felsorolása: a szám 6 db egyest, 5 db egyest, … 1 db egyest tartalmaz.	1 pont	*Ha ezt nem írja le, de a megoldásban felhasználja, akkor is jár ez a pont.*
Azoknak a számoknak a darabszáma, amelyekben 6 db egyes van: 1; 5 db egyes van: 29; 4 db egyes van: 350; 3 db egyes van: 2250; 2 db egyes van: 8125; 1 db egyes van: 15 625.	4 pont	*Ha csak három lehetőséget számol ki jól, akkor 1 pontot kap, minden további eset jó kiszámolásáért újabb 1 pont jár.*
Ezek összege adja meg az eredményt.	1 pont	
26 380 ilyen hatjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

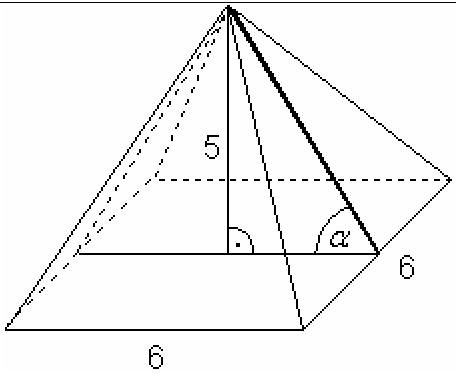
8.		
a)		
A dohányosok relatív gyakorisága az első cégnél $\frac{255}{800}$ $(\approx 0{,}32)$,	2 pont	
második cégnél: $\frac{680}{2000}$ $(= 0{,}34)$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

b)		
Bármelyik 3 személy kiválasztása a 2000-es mintából egyformán lehetséges, ezért az összes esetek száma: $\binom{2000}{3}$ (=1331334000).	1* pont	
680 dohányosból kell kiválasztani egy személyt, ami 680-féleképpen tehető meg.	1* pont	
1320 nem dohányzóból kell kettőt kiválasztani, ez összesen $\binom{1320}{2}$-féleképpen tehető meg (ami =870540-vel).	1* pont	
A kedvező esetek száma: $680\cdot\binom{1320}{2}$.	1* pont	
A keresett valószínűség: $\dfrac{680\cdot\binom{1320}{2}}{\binom{2000}{3}}$.	2 pont	*A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó nem részletezi az indoklást.*
Ennek közelítő értéke: 0,44.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

c)		
1 nem dohányos kiválasztásának a valószínűsége: 1 – 0,34 = 0,66.	2 pont	
10 nem dohányos kiválasztásának a valószínűsége: $0{,}66^{10} \approx$	2 pont	*A binomiális eloszlás megfelelő tagjának felírása is 2 pont.*
$\approx$ 0,016 vagy 1,6%.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
Ha a vizsgázó megad egy konkrét lakosságszámot (pl. 100 fő), és azzal helyesen dolgozik, megoldására legfeljebb 3 pontot kapjon.		

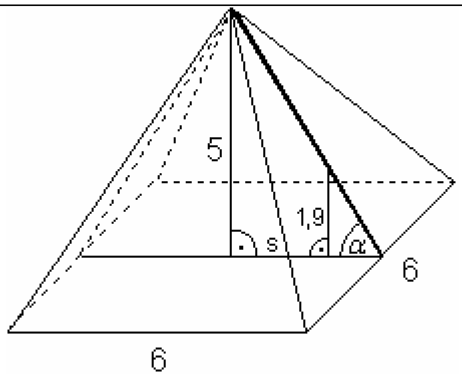
9.

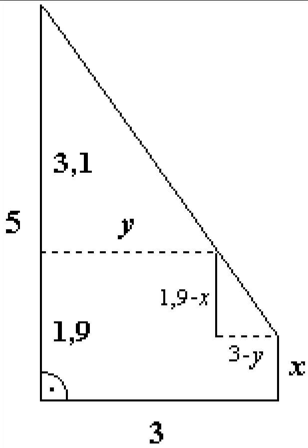
a)

 A padlássíkra és a tetősíkra egyaránt merőleges síkmetszetből lehet a keresett szöget meghatározni.	2 pont	*Világos ábra esetén magyarázó szöveg nélkül is megadható a 2 pont.*
A keresztmetszeti ábrán a keresett szöget α-val jelölve, felírható, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$,	1 pont	
ahonnan $\alpha \approx 59^\circ$.	1 pont	*Mértékegység nélkül ez a pont nem jár.*
Összesen:	**4 pont**	

Ha nem a két sík hajlásszögét számítja ki, akkor nem kaphat pontot.

b)

 Keressük az ábrán *s*-sel jelölt szakasz hosszát.	2 pont	
Hasonlóság alapján: $\frac{1{,}9}{3-s} = \frac{5}{3}$.	2 pont	
Ebből $s = 1{,}86$.	1 pont	
A hasznos alapterület: $4s^2 \approx 13{,}84\ \text{m}^2$.	1 pont	*Mértékegység nélkül ez a pont nem jár.*
Összesen:	**6 pont**	

c)		
 Az ábra jelöléseit használjuk, ahol $0 \le x \le 1{,}9$. Az ábra alapján $T = 4y^2$-et (ami a hasznos alapterület) kell kifejeznünk x segítségével.	1 pont	
A két kisebb háromszög megfelelő szögei egyenlők, tehát hasonlóak. Így: $\frac{3{,}1}{y} = \frac{1{,}9 - x}{3 - y}$.	1 pont	*Magyarázó szöveg nélkül, jó rajz esetén is jár a 1 pont.*
Innen $y = \frac{9{,}3}{5 - x}$.	1 pont	
Tehát a keresett összefüggés: $4y^2 = \left(\frac{18{,}6}{5 - x}\right)^2$.	1 pont	
Ha $x \ge 1{,}9$, akkor 36 m^2 a hasznos alapterület.	1 pont	
Összefoglalva: $T(x) = \begin{cases} \left(\frac{18{,}6}{5 - x}\right)^2, & \text{ha } 0 \le x < 1{,}9 \\ 36, & \text{ha } 1{,}9 \le x \le 5 \end{cases}$.	1 pont	*Megjegyzés: ha az első feltételnél $x \le 1{,}9$ szerepel és/vagy a második feltételnél $1{,}9 \le x$, akkor is 1 pont jár.*
Összesen:	**6 pont**	
Megjegyzés: ha a vizsgázó helyes összefüggéseket alkalmaz, de ábrát nem készít, akkor az ábráknál feltüntetett pontszámok értelemszerűen járnak.		