ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2008. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

9. a)		
9 szék közül 3 szék kiválasztására $\binom{9}{3}$ lehetőség van.	1 pont	
A 3 kiválasztott székre a professzorok $3!=6$ különböző sorrendben ülhetnek le.	1 pont	
Így az összes lehetőségek száma: $\binom{9}{3}\cdot 6 = 9\cdot 8\cdot 7 = 504$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	*A 4 pont akkor is jár, ha a vizsgázó indoklással együtt variációk számaként írja fel a helyes eredményt. Indoklás nélküli helyes eredményért 2 pont jár.*

9. b)		
A 6 hallgató között 5 hely van, ahová professzor ülhet. A 3 professzori hely $\binom{5}{3}$, azaz 10-féle lehet.	2 pont	
A diákok egymáshoz viszonyítva $6!=720$,	1 pont	
a professzorok $3!=6$ különböző sorrendben ülhetnek.	1 pont	
Így az összes lehetőségek száma: $\binom{5}{3}\cdot 6!\cdot 3! = 43200$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. c)		
A díjak kiosztása 9!-féleképpen történhet.	1 pont	*Ha a vizsgázó a helyes eredményt valószínűségek szorzataként kapja meg ($\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{84}$), a tényezők értelmezése 1-1 pont, a függetlenségre hivatkozás 1 pont.*
Az első és a harmadik díjazott is diák, ez $6\cdot 5 = 30$ különböző módon valósulhat meg.	2 pont	
A tekintett két diák és a biológia professzor kivételével a többi díjazott 6!-féleképpen kaphatja meg a díjat.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség: $P = \frac{30\cdot 6!}{9!} = \frac{5}{84} \approx 0{,}06$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a) második megoldás

Legyen egy lap két szomszédos oldalának hossza x, y.	1 pont	*Ha a felhasznált ismeretlenek jelentése ábra alapján egyértelmű, jár az 1 pont.*
A nyomtatási terület: $A=(x-6)(y-4)$,	1 pont	
ahol $x>6$ és $y>4$.	1 pont*	
$A=xy-4x-6y+24=624-2\cdot(3y+2x)$	1 pont	
Az A értéke pontosan akkor maximális, ha a $3y+2x$ értéke minimális.	1 pont	
A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával: $\frac{3y+2x}{2}\geq\sqrt{3y\cdot 2x}$,	2 pont	*A *-gal jelzett 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó csak itt tisztázza az x és y változó értelmezési tartományát.*
ahol xy=600 felhasználásával $\frac{3y+2x}{2}\geq\sqrt{6xy}=\sqrt{6\cdot 600}=60$.	2 pont	
A jobb oldal minimumértéke 60 akkor, ha $3y=2x$.	1 pont	
Innen xy=600 felhasználásával $x=30$ és $y=20$.	1 pont	
Egy lap két oldala 30 cm és 20 cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

8. b)

A nyomtatott oldalakon 3-122-ig szerepelnek az oldalszámok,	1 pont	*A 2 pont jár, bárhogyan is határozza meg a vizsgázó a 2-est tartalmazó oldalak számát. Helyes válasz 1 pont, indoklás 1 pont.*
ezek közül 23-ban van 2-es számjegy.	1 pont	
A keresett valószínűség: $P=\frac{23}{120}(\approx 0{,}1917)$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

I.

1.

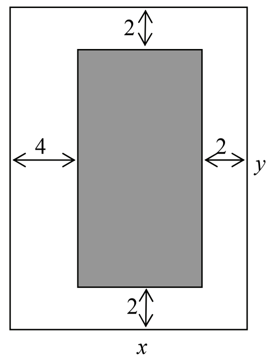
Egy számtani sorozat páros sorszámú, illetve páratlan sorszámú tagjai is számtani sorozatot alkotnak.	1 pont	*Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, akkor ez a pont jár.*
Páratlan sorszámú tag összesen 11 darab van, páros sorszámú pedig 10.	1 pont	
A feladat feltétele szerint: $\frac{a_1+a_{21}}{2}\cdot 11=\frac{a_2+a_{20}}{2}\cdot 10+15$.	2 pont	*A páratlan, illetve páros sorszámú tagok összegének felírása 1 pont, a szöveg szerinti kapcsolat felírása 1 pont.*
Legyen az eredeti sorozat különbsége d, ezzel felírva az egyenletet: $\frac{a_1+a_1+20d}{2}\cdot 11=\frac{a_1+d+a_1+19d}{2}\cdot 10+15$.	1 pont	
Átrendezve: $2a_1+20d=30$.	1 pont	
A feladat másik feltételét hasonlóan átírva: $a_1+19d=3(a_1+8d)$.	2 pont	
Átrendezve: $2a_1+5d=0$.	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $a_1=-5$, $d=2$.	2 pont	
A keresett tag: $a_{15}=-5+14\cdot 2=23$, és ez megfelel a feladat feltételeinek.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

2. a)

Jelölje a a 9-10. évfolyamos tanulók számát, A pedig az átlagpontszámukat. A 11-12. évfolyamos tanulók száma a feltétel alapján $100-a$.	1 pont	
A feltétel alapján $a=1{,}5\cdot(100-a)$, ahonnan $a=60$. A 9-10. évfolyamos tanulók száma tehát 60, a 11-12. évfolyamos tanulóké pedig 40.	2 pont	
Ha B jelöli a 11-12. évfolyamos tanulók átlagpontszámát, akkor $1{,}5A=B$.	1 pont	
Az átlagpontszám az előzőeket felhasználva: $100=\frac{60A+40B}{100}=\frac{80B}{100}=\frac{4B}{5}$.	2 pont	
Innen $B=125$, azaz a 11-12. osztályos tanulók átlagpontszáma 125.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	*Ha A értékét számítja, jó kerekítésekkel dolgozik és úgy válaszol, a 7 pont akkor is jár.*

2. b)

A 100 tanulóból 3 tanuló kiválasztására $\binom{100}{3}$ $(=161700)$ egyenlően valószínű lehetőség van.	1 pont	
A feltételnek megfelelő kiválasztás lehetőségeinek a száma: $\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}$ $(=70800)$,	1 pont	
ugyanis a két és egy tanuló kiválasztása egymástól függetlenül történik.	1 pont	
A keresett valószínűség: $P=\frac{\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$,	1 pont	
azaz $P=\frac{70800}{161700}$ $(\approx 0{,}44)$.	1 pont	*44% megadásáért is 1 pont jár*
Összesen:	**5 pont**	



8. a) első megoldás

Legyen egy lap két szomszédos oldalának hossza x, y.	1 pont	*Ha a felhasznált ismeretlenek jelentése ábra alapján egyértelmű, jár az 1 pont.*
$xy=600$, $y=\frac{600}{x}$. (1)	1 pont	
A nyomtatási terület: $A=(x-6)(y-4)$, (2)	1 pont	
ahol $x>6$ és $y>4$; (azaz $x\in\,]6;150[$)	1 pont*	
Az (1)-et behelyettesítve a (2)-be: $A(x)=(x-6)\left(\frac{600}{x}-4\right)$.	1 pont	
$A(x)=624-4x-\frac{3600}{x}$	1 pont	
Meg kell keresnünk az $A(x)$ függvény maximumát. $A'(x)=-4+\frac{3600}{x^2}$	1 pont	
$-4+\frac{3600}{x^2}=0$.	1 pont	
Ennek az egyenletnek az alaphalmazba eső gyöke: $x=30$.	1 pont	*A *-gal jelzett 1 pont akkor is jár, ha a vizsgázó csak itt tisztázza az x változó értelmezési tartományát.*
A második derivált: $A''(x)=-2\cdot\frac{3600}{x^3}$.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem határozza meg a második deriváltat, hanem az első derivált előjelváltásával indokol, akkor is jár a 2 pont.*
Mivel a második derivált minden pozitív helyen negatív, így $x=30$-nál is, tehát az A függvénynek itt maximuma van.	1 pont	
Egy lap két oldala 30 cm és 20 cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

7. b)		
A *PLT* derékszögű háromszögben $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{TP}$.	2 pont	
Mivel α hegyesszög, és itt a tangens függvény szigorúan monoton növekvő, így elegendő a $\frac{h}{TP}$ törtet vizsgálni.	1 pont	
Mivel a számláló konstans, ezért a tört akkor a maximális, ha *TP* minimális.	1 pont	
Ez akkor következik be, amikor a *TP* merőleges az *AB* egyenesre, vagyis az *ABT* háromszög magassága, így a keresett pont az *ABT* háromszögnek a *T* csúcsába húzható magassága talppontja az *AB* egyenesen.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. c)		
A feltétel szerint: $p_0 e^{Ch} = 0{,}8 p_0$.	1 pont	
$h = \frac{\log_e 0{,}8}{C}\left(= \frac{\lg 0{,}8}{C \lg e}\right)$,	1 pont	
$h \approx 1783\,(\mathrm{m})$ magasan volt a léggömb.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor van egy darab kétszeres valós gyöke, ha a diszkriminánsa 0.	1 pont	*Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, akkor ez a pont jár.*
Az egyenlet diszkriminánsára nézve tehát: $16(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (1 + \sin\alpha) = 0$.	2 pont	
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 - \sin\alpha = 0$	2 pont	
Felhasználva, a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot, kapjuk, hogy $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = 0$.	1 pont	
Első megoldás		
$\sin\alpha(2\cos\alpha - 1) = 0$	2 pont	*Bármely jól befejezhető módszer esetén jár ez a 2 pont.*
Ez akkor teljesülhet, ha a) $\sin\alpha = 0$, tehát $\alpha = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$;	1 pont	*Ha hamis gyököt is kap, és elfogadja, vagy a kapott gyökrendszerek felírása hiányos, az 5 pontból legfeljebb 3-at kaphat.*
b) $2\cos\alpha - 1 = 0$,	1 pont	
tehát $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$,	1 pont	
vagy $\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2m\pi$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.	1 pont	
Ekvivalens átalakítások miatt a kapott gyöksorozatok kielégítik a kiindulási egyenletet.	1 pont	
Második megoldás		
$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$ mindkét oldalt négyzetre emelve, rendezve $3\sin^2\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = 0$	2 pont	
$\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = n\pi, n \in Z$	1 pont	
$\sin^2\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi; k, l \in Z$	2 pont	
Hamis gyökök kiszűrése	2 pont	
Összesen:	**13 pont**	

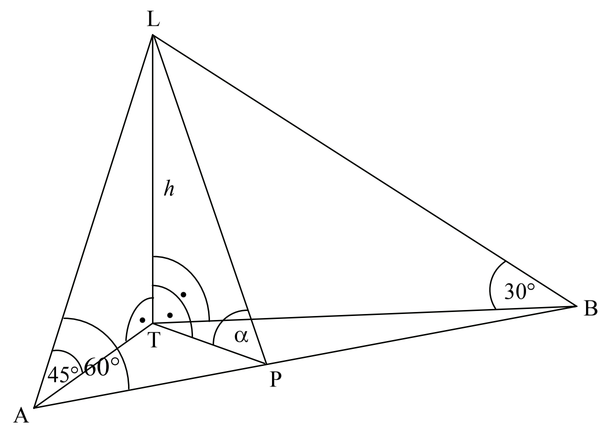
4. a)		
A rádiós tudósításakor összesített szavazatok száma: 10500·0,76·0,9=7182	1 pont	
Az eddig leadott érvénytelen szavazatok száma: 7182–(2014+2229+2805)=134	1 pont	
Ez az eddig leadott szavazatoknak ≈ 1,9%-a	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
$\frac{2014}{7182} \approx 0{,}2804$, azaz Alkimista a szavazatok 28%-ával rendelkezett; $\frac{2229}{7182} \approx 0{,}3104$, azaz Bagoly a szavazatok 31%-át kapta; $\frac{2805}{7182} \approx 0{,}3906$, azaz Flótás az eddig feldolgozott szavazatok 39%-át kapta	1 pont	
A megfelelő középponti szögek: Alkimista—101º; Bagoly—112º; Flótás—140º	1 pont	
Érvénytelen szavazat (1,9%)—7º	1 pont	
A kördiagramm vázlata	1 pont	*Az is megkapja ezt a pontot, aki megfeledkezett az érvénytelen szavazatokról*
Összesen:	**4 pont**	

4. c)		
A még nem összesített szavazatok száma: 7182**:**9=798	1 pont	
Ha ez mind érvényes lenne, és például mindegyiket Alkimista kapná, akkor 2812 szavazattal megnyerhetné a választást	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

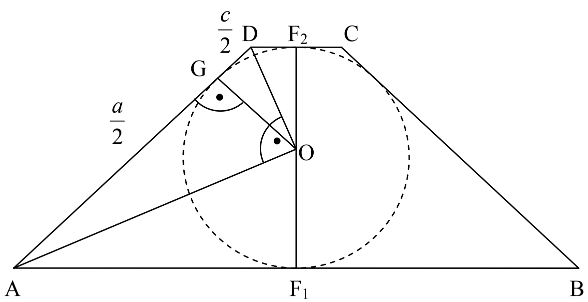
4. d)		
Ha x a keresett százalék, akkor Flótás biztosan nyer, ha $0{,}95 \cdot \frac{x}{100} > 0{,}05$; tehát $x > \frac{5}{0{,}95} \approx 5{,}3$.	3 pont	
Tehát ha Flótás 95%-os feldolgozottságnál legalább 5,3 %-kal vezet az őt követő jelölt előtt, akkor biztosan megnyeri a választást.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7.



7. a)		
Az *ATL* háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög,	1 pont	
így $AL = h\sqrt{2}\ (\approx 1191)$.	1 pont	
A *BLT* derékszögű háromszögben $BL = \frac{h}{\sin 30°} = 2h (\approx 1684)$.	2 pont	
Az *ABL* háromszögben a koszinusztétel alapján $BL^2 = AL^2 + AB^2 - 2 \cdot AL \cdot AB \cdot \cos 60°$,	1 pont*	
$4h^2 = 2h^2 + AB^2 - \sqrt{2} \cdot h \cdot AB$,	1 pont*	*Ez a 2 pont az $AB^2 - 1191AB - 1417375 = 0$ egyenletért is jár.*
$AB^2 - \sqrt{2} \cdot h \cdot AB - 2h^2 = 0$.	1 pont*	
Mivel az *AB* távolság, így pozitív, tehát $AB = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2} h \approx 1927$ méter.	1 pont*	
Összesen:	**8 pont**	

* *Ha az ABL Δ-ben először a hiányzó szögeket számítja ki, az 1-1 pont* $(ABL\angle = 37{,}76°; ALB\angle = 82{,}24°)$*; majd koszinusz tételt ír fel jól, 1 pont; végeredményt ad 1 pont.*

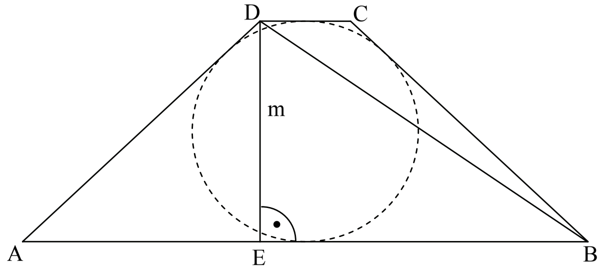
6. c) második megoldás		
		
Jelölje O a beírt kör középpontját, G pedig a beírt körnek az AD oldallal vett érintési pontját. Ekkor a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt az ábra jelöléseit használva $AG = AF_1 = \frac{a}{2}$ és $DG = DF_2 = \frac{c}{2}$.	1 pont	*Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, vagy ábrából látszik akkor ez a pont jár.*
Mivel a trapéz szárán fekvő szögek összege 180°, és O a belső szögfelezők metszéspontja, ezért $DAO\angle + ODA\angle = 90^\circ$, tehát az AOD háromszög O-ban derékszögű,.	1 pont	
és átfogóhoz tartozó magassága a kör sugara (OG),	1 pont	
ami a trapéz magasságának fele.	1 pont	
Felírva a magasságtételt az AOD háromszögre:	1 pont	
$\frac{m}{2} = \sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{c}{2}} \Leftrightarrow m = \sqrt{ac}$, és ezt akartuk bizonyítani.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

II.

5. a)		
András 20 perc, Béla 18,75 perc alatt teszi meg felfelé az utat, ezért a találkozáskor András lefelé, Béla felfelé fut.	3 pont	*A haladási irány grafikonról leolvasva is 3 pontot ér. Ha jól számol, de nem indokolja, hogy a találkozáskor ki merre fut, 2 pontot kaphat.*
A két fiú a csúcstól x km-re találkozik. Ekkor András futási ideje órában: $\frac{1}{3}+\frac{x}{20}$,	2 pont	
Béla futási ideje órában: $\frac{5-x}{16}$.	1 pont	
Mivel András 10 perccel korábban indult, ezért $\frac{1}{3}+\frac{x}{20}=\frac{5-x}{16}+\frac{1}{6}$.	2 pont	
Innen $x=\frac{35}{27}\,\text{km}(\approx 1{,}3\,\text{km})$.(A kapott érték a feladat feltételeinek megfelel.)	2 pont	
Összesen:	**10 pont**	*Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe, hogy a két fiú nem egyszerre indul, akkor a feladat a) részére legfeljebb 5 pont adható. Ha a vizsgázó nem határozza meg a találkozás hegycsúcstól való távolságát, csak az időpontját, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.*

5. b)		
A feltétel csak úgy teljesülhet, hogy a lányok rendre 0, 1, 2, …, 9 fiút ismernek.	2 pont	
A fiúk és a lányok közötti ismeretségek száma összesen $1+2+3+...+9=45$.	2 pont	
Ha a 9 fiú mindegyike 6 lányt ismert volna, az 54 ismeretséget jelentene. Az előbbiek szerint ez nem lehet.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Gráffal vagy számelméleti meggondolással indított, befejezhető jó próbálkozásért legfeljebb 3 pont adható.*

6. a)

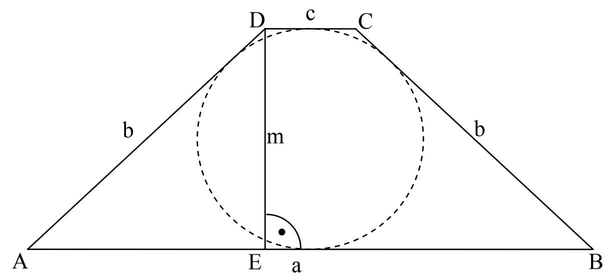


Az $ABCD$ trapézban $AB=20$, $CD=5$, és legyen a D csúcsból induló magasság talppontja az AB oldalon E. Ezekkel a jelölésekkel: $AE=\frac{AB-CD}{2}=\frac{15}{2}$, ezért $EB=\frac{25}{2}$.	1 pont	*Ha m-et a c)-beli tételre helyesen hivatkozva adja meg, akkor is 3 pont jár.*
A trapéz érintőnégyszög, így $AD=\frac{AB+CD}{2}=\frac{25}{2}$.	1 pont	
(Pitagorasz tétele alapján) $m=DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=10$.	1 pont	
$T=\frac{AB+CD}{2}\cdot m=125$.	1 pont	
BED Δ-ből: $BD=\sqrt{DE^2+EB^2}=\frac{5\sqrt{41}}{2}(\approx 16{,}01)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. b)

A kapott forgástest egy hengerből és két egybevágó forgáskúpból tevődik össze.	1 pont	*Ha a gondolat a megoldásban megjelenik, akkor ez a pont jár.*
A henger és a kúpok alapkörének sugara $r=m=10$.	1 pont	
A henger magassága $CD=5$, a kúpok magassága $AE=\frac{15}{2}$.	2 pont	
Így a forgástest térfogata: $V=2\cdot\frac{r^2\pi\cdot AE}{3}+r^2\pi\cdot CD=1000\pi(\approx 3141{,}59)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. c) első megoldás



Ha a tekintett trapéz alapjainak hossza a és c ($a \geq c$), szárának hossza b, magasságának hossza m, akkor azt kell belátni, hogy $m=\sqrt{ac}$, vagy másképpen $m^2=ac$.	1 pont	
A trapéz érintőnégyszög, ezért $b=\frac{a+c}{2}$.	1 pont	
Az ábra jelöléseit használva a szimmetria miatt $AE=\frac{a-c}{2}$.	1 pont	
Pitagorasz tétele alapján $m^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2=$	1 pont	
$=ac$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	