ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2008. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

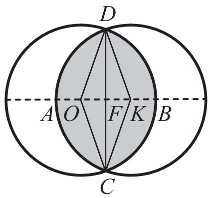
1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

9. b)		
Minden körlapból lett egy holdacska és egy 2 cm sugarú körlap formájú sütemény. ($AB = 4\ cm$)	1 pont	
Klári az eredeti 30×60-as téglalapból kivágott 50 darab holdacskát és 50 db 2 cm sugarú kört. A kivágott sütemények alapterülete (közelítő értékekkel számolva): $50 \cdot 11{,}78 + 50 \cdot 2^2 \cdot \pi = 50 \cdot (11{,}78 + 12{,}56) = 1217\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A maradék alapterület ekkor $30 \cdot 60 - 1217 = 1800 - 1217 = 583\,\text{cm}^2$.	1 pont	
Ebből négyzet alapú formát kellett készíteni azonos vastagsággal. A négyzet alakúra kinyújtott tészta alapterülete a maradék alapterület, vagyis $583\,\text{cm}^2$.	1 pont	
Ennek a négyzetnek az oldala: $\sqrt{583}$, azaz (kerekítve) 24 cm.	1 pont	*A pont a közbülső adatokból kapott eredmény egészre kerekített értékéért jár.*
Összesen:	**5 pont**	*A részeredmények tetszőleges (legalább egész) pontosságú helyes kerekítéssel elfogadhatók.*

9. a)

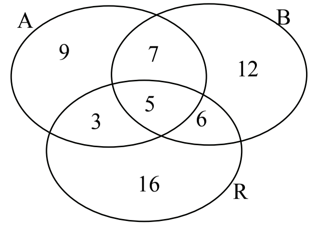


Használjuk az ábra jelöléseit!

A 3 cm sugarú k körlapba belevágni ugyanazzal a köralakú formával azt jelenti, hogy az O középpontú 3 cm sugarú kört eltoljuk 2 cm-rel az $\overrightarrow{OK}$ vektorral. A k körlapból kivágunk egy T tartományt. (A rajzon ez szürkén szerepel.) T-nek szimmetriatengelye a DC és az OK egyenes. A T-t határoló két körív sugara egyaránt 3 cm, középpontjuk az O illetve a K pont. A T tartomány két egybevágó körszeletből áll.	2 pont	*Ez a 2 pont a gondolatok követhető megjelenítéséért jár.*
Egy ilyen körszelet (pl. a DCB) területét számítjuk ki. $t_{körszelet} = t_{körcikk} - t_{háromszög}$.	1 pont	
Az $ODBC$ körcikk középponti szöge és az ODC háromszög szárszöge is a DOC szög. Legyen $DOC\angle = 2\alpha$. Az α nagyságát az FOC derékszögű háromszögből számítjuk ki. $OC = 3$ és $OF = 1$, innen $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.	1 pont	*A továbbiakban a szükséges mennyiségeket két tizedesjegyre kiszámítva adjuk meg,*
$\alpha = 1{,}23$ ($\alpha = 70{,}53^\circ$).	1 pont	
$ív_{DBC} = r\cdot 2\alpha\,(rad) = 7{,}39$,	1 pont	
ahonnan $t_{körcikk} = \frac{ív\cdot r}{2} = 11{,}07$ (cm^2).	1 pont	*Fokban mért szöggel számolva:* $t_{körcikk} = \frac{9\pi\cdot 141{,}06}{360} = 11{,}07$.
$t_{háromszög} = \frac{r^2\cdot\sin(2\alpha)}{2} = 2{,}83$ (cm^2); (vagy $t_{háromszög} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ (cm^2)).	1 pont	
$t_{körszelet} = 8{,}25$ (cm^2);	1 pont	
$t_{holdacska} = t_{kör} - 2\cdot t_{körszelet} = 11{,}78$ (cm^2).	1 pont	
Egy holdacska felülről látható felületének területe 11,8 cm^2.	1 pont	*A pont a közbülső adatokból kapott eredmény egy tizedesjegyre kerekített értékéért jár.*
Összesen:	**11 pont**	
A részeredmények tetszőleges (legalább egy tizedesjegy) pontosságú helyes kerekítéssel elfogadhatók.		

I.

1. a) első megoldás



(A halmazokat a lányok nevének kezdőbetűjével jelöltük.)

Készítsünk halmazábrát! A halmazok elemei legyenek az egyes lányok által megtalált hibák.	1 pont	*A pont a modell helyes alkalmazásáért jár.*
Minden jó érték 1-1- pont	7 pont	*Ha a 7, 3 és 6 helyett rendre 12-őt, 8-at és 11-et ír, legfeljebb 1 pontot kaphat a 7 pontból. Számolási hiba esetén hibánként 1-1 pontot vonjunk le.*
A felfedezett hibák számát a részhalmazokba írt elemszámok összege adja: (9 + 7 + 12 + 3 + 5 + 6 + 16) Tehát a három lány összesen 58 hibát fedezett fel.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

1. b) első megoldás

Legalább ketten vették észre a hibát, ha pontosan ketten vagy pontosan hárman észlelték azt.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
Az első csoportba 7 + 6 + 3; a másodikba 5 hiba tartozott. Legalább ketten észlelték a hibát 21 alkalommal.	2 pont	
Ez az összes észlelt hiba $\frac{21}{58} \approx 0{,}36$-ad része, azaz kb. 36%-a.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. a) második megoldás		
(Jelöljük a lányok nevének kezdőbetűjével az egyes lányok által megtalált hibák halmazát!) A szöveg alapján: $\lvert A\rvert = 24$; $\lvert B\rvert = 30$; $\lvert R\rvert = 30$; $\lvert A\cap B\rvert = 12$; $\lvert A\cap R\rvert = 8$; $\lvert B\cap R\rvert = 11$,	1 pont	
valamint $\lvert A\cap B\cap R\rvert = 5$.	1 pont	
A három lány által megtalált hibák száma az $A\cup B\cup R$ halmaz elemszáma.	2 pont	*Ez a pont nem bontható. Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
A logikai szita formulát alkalmazva: $\lvert A\cup B\cup R\rvert =$ $\lvert A\rvert+\lvert B\rvert+\lvert R\rvert-\lvert A\cap B\rvert-\lvert A\cap R\rvert-\lvert B\cap R\rvert+\lvert A\cap B\cap R\rvert =$	2 pont	*A formula felírása általános esetre 1 pontot ér.*
$= 24+30+30-12-8-11+5 = 58$.	2 pont	*Számolási hiba esetén 1 pontot kap.*
A három lány összesen 58 hibát észlelt.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

1. b) második megoldás		
Legalább ketten vették észre a hibát, ha pontosan ketten vagy pontosan hárman észlelték azt.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
Ezért a hibák száma: $\lvert A\cap B\rvert+\lvert A\cap R\rvert+\lvert B\cap R\rvert-2\cdot\lvert A\cap B\cap R\rvert =$ $12+8+11-2\cdot 5 = 21$.	2 pont	
A keresett százalék tehát $\frac{21}{58}\cdot 100 \approx 36$ %.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*A *–gal jelölt pontok elosztása más megoldás esetén:*

1. A $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$ *összeg valamelyik tagja mindig 0, ekkor a másik tag pedig 1 vagy –1, (2 pont) így* $c_n = 1$ *minden pozitív egész n esetén. (1 pont)*

2. Az első négy tag kiszámítása (1 pont), majd annak közlése, hogy az összeg tagjainak periodicitása miatt a további tagok mindegyike is 1-gyel egyenlő (1 pont).

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk az áttekinthetőség kedvéért a három sorozat kérdezett tulajdonságait:

a sorozat	korlátos	monoton
$\{a_n\}$; $a_n = \begin{cases} 2^{n+1}, \textit{ ha n páros} \\ 0, \textit{ ha n páratlan} \end{cases}$	nem	nem
$\{b_n\}$;. $b_n = \begin{cases} 13, \textit{ ha } n<10 \\ -2n+33, \textit{ ha } 10\le n<23 \\ -13, \textit{ ha } 23\le n \end{cases}$	igen	igen
$\{c_n\}$; $c_n = 1$ *n összes értékére*	igen	igen

8.

$\{a_n\}$, ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$. Ha n páros, akkor $a_n = 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n \left(= 2^{n+1}\right)$.	1 pont	
Ha n páratlan akkor $a_n = -2^n + 2^n = 0$.	1 pont	
Az $\{a_n\}$ sorozat tehát nem korlátos nem monoton.	1 pont	
A $\{b_n\}$ sorozatot3 intervallumon kell vizsgálni: $n<10$; $10 \le n < 23$; $23 \le n$.	1 pont	*Ha ezt csak a későbbi leírás tükrözi, az 1 pont akkor is jár.*
$\{b_n\}$, ahol $b_n = \lvert n-23 \rvert - \lvert n-10 \rvert$; Az abszolútérték értelmezése alapján: Ha $n<10$, akkor $b_n = (23-n)-(10-n) = 13$.	1 pont	*Nem jár a pont, ha csak a helyes lineáris egyenletet írja fel.*
Ha $10 \le n < 23$, akkor $b_n = (23-n)-(n-10) = -2n+33$.	1 pont	*Nem jár a pont, ha csak a helyes lineáris egyenletet írja fel.*
Ezen a tartományon $-13 < b_n \le 13$.	1 pont	
Ha $23 \le n$, akkor $b_n = (n-23)-(n-10) = -13$.	1 pont	*Nem jár a pont, ha csak a helyes lineáris egyenletet írja fel.*
A $\{b_n\}$ sorozat tehát korlátos és monoton csökkenő.	1 pont	
Alsó korlátja: megadhatja a -13-at, vagy bármelyik ennél kisebb számot. Felső korlátja: megadhatja a 13-at, vagy bármelyik ennél nagyobb számot.	1 pont	
$\{c_n\}$, ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$. Használjuk az $\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot n$ jelölést! Ekkor a négyzetre emelés , a pitagoraszi összefüggés és a kétszeres szögfüggvény képletének alkalmazásával $c_n = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 =$ $= \sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$.	2 pont*	*A helyes négyzetre emelés 1 pont, a pitagoraszi összefüggés helyes alkalmazása és* $\sin 2\alpha$ *felismerése 1 pont.*
Visszaírva α eredeti jelentését kapjuk, hogy: $c_n = 1 + \sin(\pi\cdot n) = 1$, mivel $\sin(\pi\cdot n)$ értéke minden n egész esetén 0.	1 pont*	
A $\{c_n\}$ sorozat monoton,	1 pont	
és korlátos.	1 pont	
Alsó korlátja: az 1 vagy bármelyik ennél kisebb, felső korlátja: az 1 vagy bármelyik ennél nagyobb szám.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

2. első megoldás

Megoldást csakis az $x^2 \ge 3$ feltételnél kereshetjük.	1 pont	
Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát! $x^2 + 1 + 2\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)} + x^2 - 3 = 4$.	2 pont	*Helyesen alkalmazza a kéttagú összeg négyzetre emelését 1 pont, ezt jól alkalmazza a négyzetgyökös kifejezésekre 1 pont.*
Rendezés után kaphatjuk, hogy $2\cdot\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)} = 6 - 2x^2$ (azaz $\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)} = 3 - x^2$).	2 pont	*Tudja, hogy a négyzetgyökös kifejezésre célszerű rendezni 1 pont, ezt helyesen elvégzi 1 pont.*
A baloldali kifejezés nemnegatív értékű, így a jobboldali kifejezés is nemnegatív,	1 pont	
ezért $x^2 \le 3$ feltételnek is fenn kell állnia.	1 pont	
A kezdeti feltétellel összevetve, az $x^2 = 3$ teljesülhet csak.	1 pont	
Ezt az értéket az eredeti egyenletbe behelyettesítve adódik, hogy az $x^2 = 3$ kielégíti az egyenletet.	1 pont	
Innen a két gyök: $x_1 = \sqrt{3}$ és $x_2 = -\sqrt{3}$. $\left(M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}\right)$	1 pont	
Összesen:	**10 pont***	

2. második megoldás

Mind a két oldalból kivonva a $\sqrt{x^2+1}$ kifejezést, emeljük négyzetre a kapott egyenlet mindkét oldalát!	1 pont	
Ekkor az $x^2 - 3 = 4 - 4\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1$ egyenlethez juthatunk.	2 pont	*Az egyenlet két oldalának helyes felírása 1-1 pont.*
Rendezve kapjuk, hogy $4\cdot\sqrt{x^2+1} = 8$ (azaz $\sqrt{x^2+1} = 2$).	2 pont	*Tudja, hogy a négyzetgyökös kifejezésre célszerű rendezni 1 pont, ezt helyesen elvégzi 1 pont.*
Négyzetre emelve és rendezve az $x^2 = 3$ egyenlethez jutunk;	2 pont	
és innen $x_1 = \sqrt{3}$ és $x_2 = -\sqrt{3}$. $\left(M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}\right)$.	1 pont	
Behelyettesítéssel adódik, hogy mind a két érték kielégíti az eredeti egyenletet.	2 pont	*Ez a pont nem bontható.*
Összesen:	**10 pont***	

2. harmadik megoldás		
A megoldás csak olyan x szám lehet, amelyre $x^2 \geq 3$ teljesül.	1 pont	
Vonjuk ki mindkét oldalból a $\sqrt{x^2+1}$ kifejezést! $\sqrt{x^2-3} = 2-\sqrt{x^2+1}$	1 pont	
A kapott egyenlet bal oldalán álló kifejezés értéke nemnegatív, így csak olyan x szám lehet a megoldás, amelyre a jobb oldal értéke is nemnegatív.	1 pont	
Tehát $2-\sqrt{x^2+1} \geq 0$, azaz $2 \geq \sqrt{x^2+1}$.	1 pont	
Az utóbbi egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve a $4 \geq x^2+1$, azaz $3 \geq x^2$ egyenlőtlenséghez jutunk.	2 pont*	*Négyzetre emelés 1 pont, rendezés 1 pont.*
A négyzetre emeléssel a reláció jel nem változott, mert az $2 \geq \sqrt{x^2+1}$ egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív értékű, és a négyzetfüggvény a nemnegatív számok halmazán szigorúan növekvő.	2 pont*	*Helyes megállapításonként 1-1 pont.*
A kezdeti $x^2 \geq 3$ és a kapott $3 \geq x^2$ egyenlőtlenségek csak akkor teljesülhetnek, ha $x^2 = 3$.	1 pont*	
Innen a két gyök: $x_1 = \sqrt{3}$ és $x_2 = -\sqrt{3}$. $M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$	1 pont	
Összesen:	**10 pont***	

A *-gal jelölt pontok az alábbi megoldása esetén a következőképpen adhatók:
Mivel $x^2 \geq 3$, ezért $x^2+1 \geq 4$. (1 pont)
A négyzetgyökfüggvény a nemnegatív számok halmazán szigorúan növő, (1 pont)
így $\sqrt{x^2+1} \geq 2$ lehet csak. (1 pont)
Az $2 \geq \sqrt{x^2+1}$ és a kapott $\sqrt{x^2+1} \geq 2$ egyenlőtlenségek egyszerre csak akkor teljesülhetnek, ha $\sqrt{x^2+1} = 2$, azaz $x^2 = 3$. (2 pont)

7. c) második megoldás		
Ha Anna az egyik kiválasztott, akkor a másik kiválasztásától függetlenül a két ember ismeri egymást. Így ekkor annak a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást nulla.	1 pont	*Ha a gondolatot jól használja, ezt a pontot kapja meg.*
Ha Annát nem választjuk ki elsőre, annak $\frac{40}{41}$,	1 pont	
annak, hogy másodszorra sem $\frac{39}{40}$ a valószínűsége.	1 pont	
Anna tehát nincs kiválasztva $\frac{40}{41} \cdot \frac{39}{40} = \frac{39}{41}$ valószínűséggel (a függetlenség miatt).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül kettőt kiválasztva azok nem ismerik egymást $1-\frac{38}{39} = \frac{1}{39}$ (lásd b) kérdés megoldását).	1 pont	
Ekkor (a függetlenség miatt) a keresett valószínűség $\frac{39}{41} \cdot \frac{1}{39} = \frac{1}{41}$. A kérdezett valószínűség tehát $\left(0+\frac{1}{41}=\right) \frac{1}{41}$ $(\approx 0{,}0244)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Ha a megoldás indoklása követhetően megjelenik, kevésbé részletes leírás esetén is 6 pont adható.

7. c) **első megoldás**		
A kiválasztott két személy közül vagy Anna az egyik, vagy mindkettő Anna ismerősei közül való.	1 pont	*Ha a gondolatot jól használja, ezt a pontot kapja meg.*
1. eset: Ha Anna az egyik kiválasztott. Ekkor a másik kiválasztásától függetlenül a két ember ismeri egymást. A kedvező esetek száma ekkor nulla.	1 pont	
2. eset: Ha Anna ismerősei közül való a két kiválasztott. Akkor a 40 személy kettesével (egyértelműen) párba állítható úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismeri egymást, ezért 20 „kedvező” pár van.	1 pont	
Az összes lehetséges kiválasztások száma $\binom{41}{2}$,	1 pont	
azaz 820.	1 pont	*Ez a pont jár akkor is, ha a valószínűség meghatározása során számítja ki helyesen.*
Így a kérdéses valószínűség: $\left(\frac{0+20}{820}=\right)\frac{20}{820}$, azaz $\frac{1}{41}$ $(\approx 0{,}0244)$.	1 pont	*Itt a hányados képzéséért jár a pont.*
Összesen:	**6 pont**	

2. **negyedik megoldás**		
Megoldást csakis az $x^2 \geq 3$ feltételnél kereshetjük.	1 pont	
Ha $x^2 = 3$, akkor a $\sqrt{4}+\sqrt{0}=2$ igaz kijelentést kapjuk.	2 pont	
Tehát a $\sqrt{3}$ és a $-\sqrt{3}$ is megoldás.	1 pont	
Ha $x^2 > 3$, akkor $\sqrt{x^2+1} > 2$ és $\sqrt{x^2-3} > 0$,	2 pont	*A következtetéssel adódó helyes egyenlőtlenségek felírása: 1-1 pont*
így $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3} > 2$,	2 pont	
vagyis ekkor nem kapunk megoldást.	1 pont	
Az egyenlet megoldáshalmaza tehát: $M=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont***	

*: A 10 pontból legfeljebb 8-at kaphat, aki csak az egyik gyököt találja meg.

3. a)

Ha az 5×5-ös táblázatban összeadjuk a *k*. **oszlopban** lévő számokat, akkor megkapjuk, hogy hány irodában adtak el k darab **autóbuszos** utat.	1 pont	*Ha a gondolatokat jól használja, ezeket a pontokat kapja meg.*
Ha a táblázat *n*. **sorában** lévő számokat adjuk össze, akkor megkapjuk, hogy hány irodában adtak el n darab **repülős** utat.	1 pont	

		A típusú eladott utak száma						
		0	1	2	3	4	összeg	utak száma
R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2	**5**	0
	1	1	2	2	3	1	**9**	9
	2	1	5	2	4	3	**15**	$15 \cdot 2 = 30$
	3	0	3	1	9	2	**15**	$15 \cdot 3 = 45$
	4	1	3	3	2	2	**11**	$11 \cdot 4 = 44$
	összeg	**4**	**14**	**8**	**19**	**10**	(55)	**128**
	utak száma	0	14	16	57	40	**127**	

A táblázat számított adatainak helyes megállapítása	3 pont	*Ha a táblázat kiszámolt értékei közt hibák vannak, akkor 1-2 hiba esetén 2 pont, 3-4 hiba esetén 1 pont jár.*
Az autóbuszos utak száma: (14+16+57+40=)127;	1 pont	
a repülős utak száma: (9+30+45+44=)128.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. b) első megoldás

Vannak 40-en akikből választunk (és bármelyik pár kiválasztásának valószínűsége ugyanakkora).	1 pont	
Az elsőnek választott személy bárki lehet, hiszen mindenki pontosan egyet nem ismer (szimmetrikus a szerepük).	1 pont	
Utána 39-ből kell választani egyet (összes esetek száma).	1 pont	
Mivel az elsőnek választott személy közülük egyet nem ismer, így 38-at ismer (kedvező esetek száma).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy ismerik egymást: $\frac{38}{39}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. b) második megoldás

Képzeljük el Anna 40 ismerősének ismeretségi gráfját. A 40 pontú gráf két pontját akkor kötjük össze, ha a két ember ismeri egymást. Kiszámoljuk, hogy hány éle van a gráfnak.	2 pont	*A jó modell 2 pont.*
Ha a 40 ember mindegyike ismerné az összes többi embert, a 40 pontú gráfnak $\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$ éle lenne.	1 pont	
A feltétel szerinti gráf éleinek száma $\frac{40 \cdot 38}{2} = 760$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{760}{780} = \frac{38}{39} (\approx 0{,}9744)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a) első megoldás		
A 41 főből álló társaság ismeretségi számát megkaphatjuk, ha összeadjuk Anna ismerőseinek és Anna 40 ismerőse egymás közti ismeretségeinek számát.	1 pont	*Ha a gondolatot jól használja, ezt a pontot kapja meg.*
Anna ismeri a 40 ismerősét.	1 pont	
Anna 40 ismerősének mindegyike 38 embert ismer Annán kívül.	1 pont	
Így Anna 40 ismerősének $\frac{40 \cdot 38}{2} = 760$ ismeretsége van egymás közt.	1 pont	
A 41 fő között $40 + 760 = 800$ ismeretség van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a) második megoldás		
Jelöljük egy gráffal az ismeretségeket. Ekkor egy 41 pontú gráfunk lesz, ahol minden pont fokszámát ismerjük, hiszen Anna mind a 40-et ismeri, az ő fokszáma 40, a többiek pontosan 39-et, mert Annát mind ismerik és pontosan egyet nem a többi 39-ből.	2 pont	*A jó modell 2 pont.*
Azaz a fokszám tétel alapján	1 pont	
$2e = 40 + 39 \cdot 40 = 1600$,	1 pont	
tehát 800 ismeretség van köztük.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a) harmadik megoldás		
Ha mindenki mindenkit ismerne, akkor az ismeretségek száma $\frac{41 \cdot 40}{2}$ lenne.	2 pont	
40 személy kettesével (egyértelműen) párba állítható úgy, hogy a párok két-két tagja nem ismeri egymást, ezért 20 egymást nem ismerő pár van,	2 pont	
tehát $\frac{41 \cdot 40}{2} - 20 = 800$ ismeretség van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b)		
5-nél több utat az az iroda adott el, amelyikben hat, hét vagy nyolc az eladott utak száma.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
Hat utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak $(k\,;n)$ összege 6. Ez három esetben lehetséges: $k + n = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2$.	1 pont	
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma pedig $3 + 9 + 3 = 15$.	1 pont	
Hét utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak $(k\,;n)$ összege 7. Ez két esetben lehetséges: $k + n = 3 + 4 = 4 + 3$.	1 pont	
Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma pedig $2 + 2 = 4$.	1 pont	
Nyolc utat adott el az iroda, ha a táblázatban lévő koordinátáinak $(k\,;n)$ összege 8. Ez egyetlen esetben lehetséges: $k + n = 4 + 4$. Ezekhez az adatokhoz tartozó irodák száma pedig 2.	1 pont	
Mivel 55 fiókiroda volt, és közülük ötnél több utat $(15 + 4 + 2 =)21$-ben adtak el, a keresett valószínűség: $\frac{21}{55}(\approx 0{,}3818)$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	*Számolási hiba esetén összesen 1 pontot vonjunk le.*

3. b) megoldásának másik leírása

		A típusú eladott utak száma				
		0	1	2	3	4
R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2
	1	1	2	2	3	1
	2	1	5	2	4	3*
	3	0	3	1	9*	2**
	4	1	3	3*	2**	2***

Mivel egyik fiókiroda sem adott el 4-nél többet egyik típusú útból sem, ezért 5-nél több utat az az iroda adott el, amelyikben hat, hét vagy nyolc az eladott utak száma.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
A táblázat adatai szerint összesen <u>hat</u> utat a táblázatban *-gal megjelölt számú fiókirodákban adtak el,	1 pont	
tehát összesen 3 + 9 + 3 = 15 irodában.	1 pont	
<u>Hét</u> utat a **-gal megjelölt számú fiókirodákban adtak el,	1 pont	
összesen 2 + 2 = 4 irodában.	1 pont	
<u>Nyolc</u> utat pedig a ***-gal megjelölt számú fiókirodákban, azaz összesen 2 irodában.	1 pont	
Ötnél több utat tehát 15 + 4 + 2 = 21 fiókirodában adtak el, és mivel 55 fiókiroda volt, a keresett valószínűség: $\frac{21}{55}\left(\approx 0{,}3818\right)$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	*Számolási hiba esetén összesen 1 pontot vonjunk le.*

Kevésbé részletes indoklás esetén is adjuk meg a vonatkozó pontszámot mind az a) mind a b) kérdésre adott megoldásnál, ha a vizsgázó gondolatmenete követhető. Pl. a b) kérdésben a táblázatban bekarikázta a hat darab megfelelő számot, és azok összegével adta meg a kedvező esetek számát.

6. a)

A differenciálható *f* függvénynek az $x=1$ akkor lehet szélsőérték-helye, ha itt az első deriváltja nulla.	1 pont	*Ennek a gondolatnak a megoldás során való felhasználása esetén is jár a pont.*
Mivel $f'(x)=3x^2+2kx+9$;	1 pont	
ezért $f'(1)=3+2k+9=0$.	1 pont	
innen $k=-6$.	1 pont	
A lehetséges *k* értékre $f'(x)=3x^2-12x+9$.	1 pont	
A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor jár, ha a vizsgázó a másodfokú függvény előjelviszonyait megindokolva vizsgálja.*
Az $x=1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált,	1 pont	*A szöveges indoklást egy helyesen kitöltött táblázat helyettesítheti.*
ezért itt az *f* függvénynek lokális maximuma van.	1 pont	
A derivált az $x=3$ helyen negatívból pozitívba vált,	1 pont	
ezért itt az *f* függvénynek lokális szélsőértéke (minimuma) van.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

6. b)

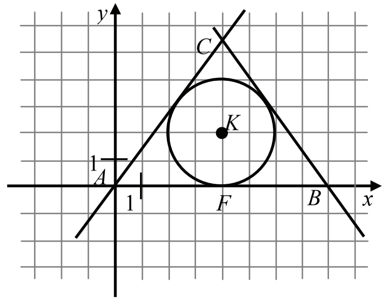
Mivel $g'(x)=3x^2-18x$,	1 pont	
ebből $g''(x)=6x-18$.	1 pont	
A második derivált zérushelye az $x=3$.	1 pont	
Itt a második derivált előjelet vált.	1 pont	
A *g* függvény (egyetlen) inflexiós pontja az $x=3$.	1 pont	*Válaszként a (3 ; –54) pont megadása is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

5. b) második megoldás		
Ha $P(0;0)$, és a PQR háromszög alapjának egyenese a QR egyenes , akkor a háromszög szimmetriatengelye a PK egyenes, amelynek egyik irányvektora a $\overrightarrow{PK}\,(4\,;2)$, egyenlete $x-2y=0$.	1 pont	
A háromszög beírt körének és a szimmetria tengelyének metszéspontja a QR oldal G felezőpontja. $\begin{cases}(x-4)^2+(y-2)^2=4\\ x-2y=0\end{cases}$	1 pont	
Behelyettesítő módszert alkalmazva az $5x^2-40x+64=0$ (vagy az $5y^2-20y+16=0$) egyenlethez jutunk.	2 pont	*A kéttagú kifejezés négyzetre emelésének helyes elvégzése 1 pont, helyes összevonás 1 pont.*
Ennek megoldásai: $x_1=4+\frac{2\sqrt{20}}{5}$ és $x_2=4-\frac{2\sqrt{20}}{5}$. (Vagy $y_1=2+\frac{\sqrt{20}}{5}$ és $y_2=2-\frac{\sqrt{20}}{5}$)	1 pont	
Mivel a G pont első koordinátája 4-nél nagyobb,	1 pont	
így $G\left(4+\frac{2\sqrt{20}}{5};\,2+\frac{\sqrt{20}}{5}\right)$.	1 pont	
A QR egyenes merőleges a PK egyenesre, és áthalad a G ponton, így egyik normálvektora $\underline{n}\,(2\,;1)$.	1 pont	
A QR egyenes egyenlete: $2x+y=8+\frac{4\sqrt{20}}{5}+2+\frac{\sqrt{20}}{5}$, azaz $2x+y=10+\sqrt{20}$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	
Az egyenes egyenletének bármely alakja elfogadható: pl.: $y=-2\left(x-4-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)+2+\frac{2\sqrt{5}}{5}$.		

4.		
Jelöljük z-vel az urnában lévő zöld golyók, k-val a kék golyók számát.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a gondolat csak az egyenletek felírásában jelenik meg.*
Ekkor az urnában lévő golyók száma: $18+z+k$.	1 pont	
Használjuk a valószínűség kombinatorikus kiszámítását megadó $\frac{kedvező}{összes}$ képletet!	1 pont	
A feltételek szerint (1) $\frac{z+k}{18+z+k}+\frac{1}{15}=\frac{18+z}{18+z+k}$	1 pont	
(2) $\frac{k+18}{18+z+k}=\frac{1{,}1\,(z+18)}{18+z+k}$.	1 pont	
Az (1)-es egyenlet törtmentes alakja: $15\cdot(z+k)+18+z+k=15\cdot(18+z)$,	1 pont	
innen rendezés után kapjuk: (3) $16k+z=252$.	1 pont	
Az (2)-es egyenlet törtmentes alakja: $k+18=1{,}1\cdot(z+18)$,	1 pont	
innen rendezés után kapjuk: (4) $k=1{,}1z+1{,}8$.	1 pont	
A (4)-es egyenlőségből k értékét a (3)-as egyenletbe írva $16\cdot(1{,}1z+1{,}8)+z=252$,	1 pont	
innen $z=12$.	1 pont	
A (4) egyenlőségből kapjuk, hogy $k=15$.	1 pont	
A kapott értékek megfelelnek a feladat feltételeinek.	1 pont	
Az urnában 12 darab zöld és 15 darab kék golyó volt.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

II.

5. a)



A keresett háromszög egyik csúcsa a koordinátarendszer origója. A háromszög beírt körének középpontja $K(4\,;2)$. (A belső szögfelezők metszéspontja).	1 pont	
Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye áthalad ezen a középponton.	1 pont	
Ha az ABC háromszög alapjának egyenese az x tengely, akkor a szimmetriatengelyének az egyenlete $x = 4$.	1 pont	
Mivel $A(0;0)$, és az AB oldalél F felezőpontja $(4\,;0)$, ezért a B koordinátái $(8\,;0)$.	1 pont	
A C csúcs az AC oldalegyenes $\left(y=\frac{4}{3}x\right)$ és a szimmetriatengely $(x=4)$ metszéspontja. $C\left(4\,;\frac{16}{3}\right)$.	1 pont	
A BC oldalegyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{BC}\left(-4\,;\frac{16}{3}\right)$,	1 pont	
így a BC egyenes egyenlete: $4x+3y=32$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

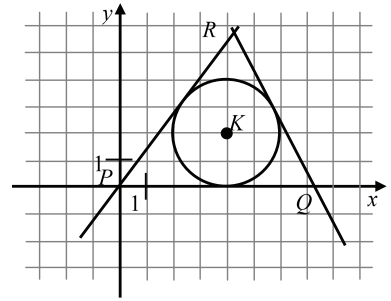
Az utolsó három pont elosztása az iránytényezős egyenlet felírása esetén:

A B ponton átmenő érintő iránytangense $-\frac{4}{3}$ *(1 pont),*

mivel irányszöge a megadott egyenes irányszögének ellentettje, vagy kiegészítő szöge, (1 pont)

tehát a BC oldal egyenesének egyenlete: $y=-\frac{4}{3}(x-8)$. *(1 pont)*

5. b) első megoldás



Ha $P(0;0)$, és a PQR háromszög alapjának egyenese a QR egyenes, akkor a $\overrightarrow{PK}$ vektor a QR egyenes egy normálvektora. $\overrightarrow{PK}=(4\,;2)$. QR egyenes egyenlete: $2x+y=c$; ahol c valamilyen valós szám.	1 pont	
A megadott kör akkor lesz a PQR háromszög beírt köre, ha a QR egyenes érinti a kört. Vagyis a körnek és az egyenesnek egyetlen közös pontja van. Tehát az a c érték felelhet meg, amelyre az alábbi egyenletrendszernek egyetlen gyöke lesz: $\left.\begin{array}{l}2x+y=c\\(x-4)^2+(y-2)^2=4\end{array}\right\}$.	1 pont	
Az első egyenletből y-t kifejezve $(y=c-2x)$, és a másodikba behelyettesítve rendezés után kapjuk, hogy $5x^2-4cx+c^2-4c+16=0$.	3 pont	*A háromtagú kifejezés négyzetre emelésének helyes elvégzése 2 pont (ez nem bontható), helyes összevonás 1 pont.*
Egyetlen gyököt pontosan akkor kapunk, ha ennek az egyenletnek a diszkriminánsa (D) nulla, $D=-4c^2+80c-320$.	1 pont	*A pont a diszkrimináns helyes felírásáért jár.*
Megoldandó tehát a $c^2-20c+80=0$ egyenlet. Ebből: $c_1=10+\sqrt{20}$ és $c_2=10-\sqrt{20}$.	1 pont	
A c_2 értéke nem felel meg, mert ekkor a kör a háromszög kívülről érintő köre lenne.	1 pont	
A keresett QR egyenes egyenlete: $2x+y=10+\sqrt{20}$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	