9. b)		
Az induló tőke (az egy összegben felvehető pénz): $c = 4\ 044\ 626$ Ft. Jelölje y az évenként felvehető összeget. Az első kivét után a számlán lévő pénz: $b_1 = c - y$.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg, ez a 3 pont akkor is jár.*
A második felvétel után a számlán lévő pénz: $b_2 = b_1 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05 - y \cdot (1{,}05 + 1)$.	1 pont	
A harmadik felvétel után a számla összege: $b_3 = b_2 \cdot 1{,}05 - y = c \cdot 1{,}05^2 - y \cdot (1{,}05^2 + 1{,}05 + 1)$.	1 pont	
A hatodik felvétel után a számlán lévő összeg: $b_6 = b_5 \cdot 1{,}05 - y =$ $= c \cdot 1{,}05^5 - y \cdot (1{,}05^5 + 1{,}05^4 + \ldots + 1{,}05 + 1)$.	1 pont	
Ugyanakkor a számla kiürül az utolsó felvételkor, így $b_6 = 0$.	1 pont	
A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első 6 tagjának az összege. A sorozat első tagja 1, és a hányadosa 1,05.	1 pont	
Így $y = c \cdot \dfrac{1{,}05^5}{\dfrac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1}}$.	1 pont	
Az alkalmanként felvehető összeg (kerekítve) 758 916 Ft.	1 pont	*Minden, a közbülső számításoknál jól kerekített adatokkal való helyes számolásért jár az 1 pont. Pl. $y \approx 0{,}188c$ esetén $y \approx 760\ 390$ Ft.*
Összesen:	**8 pont**	

ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2008. október 21.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

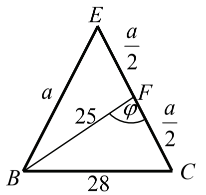
Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

9. a)		
A számlanyitás összege: $a_1 = 100\ 000$. A következő év első banki napján a számlán lévő pénz: $a_2 = a_1 \cdot 1{,}08 + a_1$ (= 208 000).	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során jelennek meg, ez a 2 pont akkor is jár.*
A következő év első banki napján a számlán lévő pénz: $a_3 = a_2 \cdot 1{,}08 + a_1 = a_1 \cdot (1{,}08^2 + 1{,}08 + 1)$(= 324 640).	1 pont	
Összesen 18 alkalommal fizetnek be a számlára, így az utolsó befizetéskor a számlán levő pénzösszeg: $a_{18} = a_{17} \cdot 1{,}08 + a_1 =$ $= a_1 \cdot (1{,}08^{17} + 1{,}08^{16} + \ldots + 1{,}08 + 1)$.	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
Ez az összeg még egy évig kamatozik, így a számlához való hozzáférés időpontjában a számlán lévő összeg: $c = a_1 \cdot (1{,}08^{18} + 1{,}08^{17} + \ldots + 1{,}08^2 + 1{,}08)$.	1 pont	
A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első 18 tagjának az összege. A sorozat első tagja 1,08, és a hányadosa is 1,08.	1 pont	
$c = a_1 \cdot 1{,}08 \cdot \dfrac{1{,}08^{18} - 1}{1{,}08 - 1} \left(\approx 4\ 044\ 626\right)$.	1 pont	
A számlán lévő összeg (kerekítve) 4 044 626 Ft.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. harmadik megoldás		
GF középvonal a *DCE* háromszögben, így $GF = 14$ (egység).	1 pont	
Az *ABFG* négyszög szimmetrikus trapéz,	1 pont	
mivel $AB \parallel CD \parallel FG$, és $AG = BF$ (szemközti, egymással egybevágó oldallapok megfelelő súlyvonalai).	1 pont	
Legyen *HF* a trapéz alapokhoz tartozó magassága. A trapéz területképlete alapján $\frac{28+14}{2} \cdot HF = 504$ (területegység),	1 pont	
tehát $HF = 24$ (egység).	1 pont	
A szimmetrikus trapéz tulajdonsága miatt $HB = \frac{28-14}{2} = 7$ (egység).	1 pont	
A *HBF* derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételét alkalmazva: $BF^2 = 24^2 + 7^2$,	1 pont	
ahonnan $BF = 25$ (egység).	1 pont	
Tekintsük a *BEC* egyenlő szárú háromszöget! Használjuk az ábra jelöléseit!  *A BFC* háromszög *BC*(=28) oldalára felírva a koszinusztételt:	1 pont	
(1) $28^2 = 25^2 + \frac{a^2}{4} - 25 \cdot a \cdot \cos\varphi$.	1 pont	
A *BFE* háromszög *BE* oldalára felírva a koszinusztételt:	1 pont	
(2) $a^2 = 25^2 + \frac{a^2}{4} - 25 \cdot a \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$.	1 pont	
Mivel a kiegészítő szögek koszinuszai egymás ellentettjei,	1 pont	
ezért (1) és (2) egyenletekből a koszinuszos tagok kiküszöbölhetőek. Rendezéssel kapjuk, hogy $a^2 = 932$	2 pont	
A gúla oldaléle $a = EC = \sqrt{932}\,(\approx 30{,}53)$ (egység).	1 pont	*Bármely alakban megadott helyes érték 1 pont.*
Összesen:	**16 pont**	

I.

1. a)		
A logaritmus értelmezése alapján: $x^2 - 8 > 0$. $\left(x < -2\sqrt{2} \text{ vagy } x > 2\sqrt{2}\right)$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó más megfelelő indoklással zárja ki a hamis gyököt.*
Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik szorzótényező 0, azaz ha $x - 2 = 0$, vagy $\lg(x^2 - 8) = 0$. 1. eset: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.	1 pont	
2. eset: $\lg(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \lg(x^2 - 8) = \lg 1$	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldásból derül ki, akkor is jár az 1 pont*
$x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 3$ vagy $x_2 = -3$.	1 pont	
Az $x = 2$ érték nem eleme az értelmezési tartománynak. Az értelmezési tartomány $x = 3$ és $x = -3$ elemei megoldások, mert az átalakítások ekvivalensek voltak. $M = \{-3\,;\,3\}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha más módon indokolja a két gyök helyességét.*
Összesen:	**5 pont**	

1. b) első megoldás		
Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlet 0-ra redukált alakja $x^2 - x - 6 = 0$; ha $x < 0$, akkor a megoldandó egyenlet $x^2 + x - 6 = 0$.	1 pont	
1. eset:. ($x^2 - x - 6 = 0$, $x \geq 0$) Az egyenlet gyökei: $x_1 = 3$; $x_2 = -2$.	1 pont	
Csak az $x_1 = 3$ megoldása az eredeti egyenletnek, a másik gyök nem tesz eleget az $x \geq 0$ feltételnek.	1 pont	
2. eset: ($x^2 + x - 6 = 0$, $x < 0$) A gyökök: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.	1 pont	
A feltételnek csak az $x_2 = -3$ felel meg.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

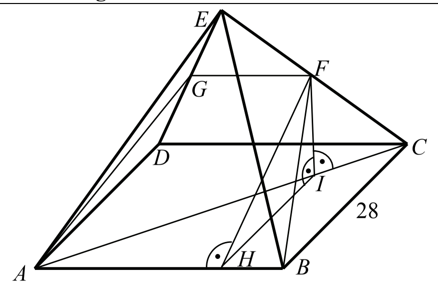
1. b) második megoldás

Az adott egyenlet $\lvert x \rvert$-ben másodfokú.	1 pont	
A megoldóképletet alkalmazva: $\lvert x \rvert = 3$ vagy $\lvert x \rvert = -2$.	1 pont	
Az abszolút érték definíciója miatt a -2 nem megoldás,	1 pont	
tehát $x = 3$ vagy $x = -3$.	1 pont	
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a gyökök megfelelőek.	1 pont	*Ha mindkét gyök helyességét behelyettesítéssel ellenőrzi, akkor is jár ez az 1 pont.*
Összesen:	**5 pont**	

1. b) harmadik megoldás

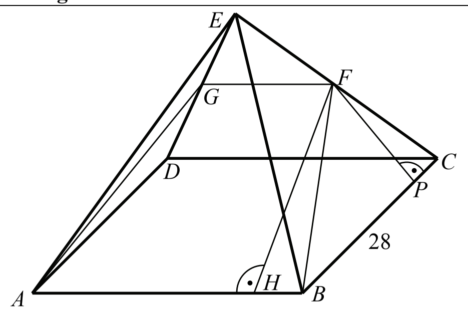
Mivel $x^2 = (-x)^2$ és $\lvert x \rvert = \lvert -x \rvert$ minden valós x számra,	1 pont	
ezért egy szám és az ellentettje egyidejűleg megoldása, vagy nem megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Legyen pl. $x \geq 0$, akkor $x^2 - x - 6 = 0$ egyenlet gyöke az $x = 3$.	2 pont	
Tehát az eredeti egyenlet megoldáshalmaza: $M = \{-3; 3\}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. második megoldás



GF középvonal a DCE háromszögben, így $GF = 14$ (egység).	1 pont	
Az $ABFG$ négyszög szimmetrikus trapéz,	1 pont	
mivel $AB \parallel CD \parallel FG$, és $AG = BF$ (szemközti, egymással egybevágó oldallapok megfelelő súlyvonalai).	1 pont	
Legyen HF a trapéz alapokhoz tartozó magassága. A trapéz területképlete alapján $\frac{28+14}{2} \cdot HF = 504$,	1 pont	
tehát $HF = 24$ (egység).	1 pont	
Az F pontból az $ABCD$ alaplapra bocsátott merőleges talppontja legyen I. Ez a pont az AC átló C-hez legközelebbi negyedelő pontja.	1 pont	
A negyedelő pont indoklása: Például a gúla magassága, az EC oldalél és az AC átló által meghatározott háromszögnek az IF szakasz középvonala.	1 pont	
$AC = \sqrt{1568} = (28\sqrt{2} \approx 39{,}6)$, így $IC = \sqrt{98}\ (= 7\sqrt{2} \approx 9{,}9)$.	1 pont	
A szimmetrikus trapéz tulajdonsága miatt $HB = \frac{28-14}{2} = 7$,	1 pont	
vagyis H az AB oldal B-hez legközelebbi negyedelő pontja.	1 pont	
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:	1 pont	
$HI = 21$.	1 pont	
A HIF derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva: $IF^2 = 24^2 - 21^2 (= 135)$.	1 pont	
Az ICF derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét: $FC^2 = 135 + \left(\sqrt{98}\right)^2$,	1 pont	
ahonnan $FC = \sqrt{233} (\approx 15{,}26)$.	1 pont	
A gúla oldaléle $EC = 2 \cdot FC = 2 \cdot \sqrt{233} (\approx 30{,}53)$ (egység).	1 pont	*Bármely alakban megadott helyes érték 1 pont.*
Összesen:	**16 pont**	

8. első megoldás



GF középvonal a DCE háromszögben, így $GF = 14$ (egység).	1 pont	
Az $ABFG$ négyszög szimmetrikus trapéz,	1 pont	
mivel $AB \parallel CD \parallel FG$, és $AG = BF$ (szemközti, egymással egybevágó oldallapok megfelelő súlyvonalai).	1 pont	
Legyen HF a trapéz alapokhoz tartozó magassága. A trapéz területképlete alapján $\frac{28+14}{2} \cdot HF = 504$ (területegység),	1 pont	
tehát $HF = 24$ (egység).	1 pont	
A szimmetrikus trapéz tulajdonsága miatt $HB = \frac{28-14}{2} = 7$ (egység).	1 pont	
A HBF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételét alkalmazva: $BF^2 = 24^2 + 7^2$,	1 pont	
ahonnan $BF = 25$ (egység).	1 pont	
Az F pontból a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja legyen P. Ez a pont a BC oldal C-hez legközelebbi negyedelő pontja.	2 pont	
A negyedelő pont indoklása: Például legyen Q a BC él felezőpontja. Az FP szakasz a EQC háromszög középvonala.	1 pont	
$BP = \frac{3}{4} BC = 21$ *és* $PC = \frac{1}{4} BC = 7$.	1 pont	
A BPF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételét alkalmazva: $PF^2 = 25^2 - 21^2 (= 184)$.	1 pont	
Az FPC derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételét alkalmazva: $FC^2 = 184 + 7^2$,	1 pont	
így $FC = \sqrt{233} (\approx 15{,}26)$ (egység).	1 pont	
A gúla oldaléle $EC = 2 \cdot FC = 2 \cdot \sqrt{233} (\approx 30{,}53)$ (egység).	1 pont	*Bármely alakban megadott helyes érték 1 pont.*
Összesen:	**16 pont**	

2. első megoldás

A B program x Ft értékű elektromos energiát és y Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával.	1 pont	*Ha az egyenleteket helyesen írja fel – miután rögzítette a használt ismeretlenek jelentését – 5 pontot kap.*
Ekkor: $x + y + 40 = 140$.	1 pont	
Az A program $1{,}2\,x$ Ft értékű elektromos energiát,	1 pont	
és $0{,}9\,y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával.	1 pont	
A költségre vonatkozó egyenlet: $1{,}2x + 0{,}9y + 40 = 151$.	1 pont	
A következő egyenletrendszert kapjuk x-re és y-ra: (1) $x + y = 100$ (2) $1{,}2x + 0{,}9y = 111$	1 pont	
Az egyenletrendszert megoldva kapjuk: $x = 70$, $y = 30$	3 pont	*Az egyenletrendszer valamelyik megoldási módszerének helyes alkalmazása 1 pont, gyökönként 1-1 pont jár.*
A feltételek alapján a C program futtatása során az elektromos energia ára: $\frac{x}{0{,}7} = 100$ (Ft),	2 pont	*Amennyiben a megoldásból egyértelműen kiderül, hogy a végeredményt milyen részekből számította ki, akkor ez a 4 pont jár.*
a víz ára: $\frac{y}{1{,}25} = 24$ (Ft).	2 pont	
A mosogatószer árát is figyelembe véve, a C programmal egy mosogatás 164 Ft-ba kerül.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

2. második megoldás		
A C program x Ft értékű elektromos energiát és y Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával.	1 pont	
A B program $0{,}7x$ Ft értékű elektromos energiát,	1 pont	
és $1{,}25y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával.	1 pont	
Így egy mosogatás ára a B programmal: $0{,}7x + 1{,}25y + 40 = 140$ (Ft).	1 pont	
Az A program $1{,}2 \cdot 0{,}7x = 0{,}84x$ Ft értékű elektromos energiát,	2 pont	
és $0{,}9 \cdot 1{,}25y = 1{,}125y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával.	2 pont	
Egy mosogatás ára az A programmal 151 Ft, így: $0{,}84x + 1{,}125y + 40 = 151$.	1 pont	
x-re és y-ra a következő egyenletrendszer adódik: (1) $0{,}7x + 1{,}25y = 100$ (2) $0{,}84x + 1{,}125y = 111$	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 100$, $y = 24$.	3 pont	*Az egyenletrendszer valamelyik megoldási módszerének helyes alkalmazása 1 pont, gyökönként 1-1 pont jár.*
A mosogatószer árát is figyelembe véve, a C programmal egy mosogatás 164 Ft-ba kerül.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

7. a)		
$K(x) + K(y) = x^2 + 6x + 5 + y^2 + 6y + 5 \le 0$.	1 pont	
A bal oldali kifejezés teljes négyzetté kiegészítéssel a következő alakra hozható: $(x+3)^2 + (y+3)^2 \le 8$.	1 pont	
A H halmaz a (–3; –3) középpontú,	1 pont	
$\sqrt{8}$ $\left(= 2\sqrt{2}\right)$ sugarú zárt körlap.	1 pont	
A kérdéses valószínűség a geometriai modell alapján két megfelelő tartomány (két koncentrikus körlap) területének arányaként számolható.	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható, és jár a vizsgázónak akkor is, ha ezt nem mondja ki, de ennek megfelelően számol.*
A kedvező tartomány a C(–3; –3) középpontú, 2 egység sugarú zárt körlap, ennek területe 4π.	1 pont	
A teljes tartomány a H halmaz, ennek területe 8π.	1 pont	
Így a keresett valószínűség: $P = \frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2}$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

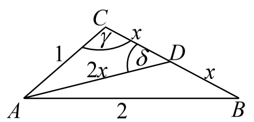
7. b)		
Az f függvény zérushelyei: –5 és –1.	1 pont	
Mivel f főegyütthatója pozitív, a másodfokú függvény a két zérushelye között negatív értékeket vesz fel,	1 pont	*Ezek a pontok járnak a vizsgázónak akkor is, ha ezt nem mondja ki, de ennek megfelelően számol.*
ezért a kérdéses terület a függvény két zérushely közötti integráljának –1-szerese.	1 pont	
$T = -\int_{-5}^{-1}\left(x^2 + 6x + 5\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x\right]_{-5}^{-1} =$	2 pont	
$= -\left(\left(\frac{(-1)^3}{3} + 3\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1)\right) - \left(\frac{(-5)^3}{3} + 3\cdot(-5)^2 + 5\cdot(-5)\right)\right)$ (kiszámítva: $\frac{32}{3}$)	1 pont	
A keresett terület nagysága: $\frac{32}{3}\left(\approx 10{,}67\right)$.	1 pont	*Bármely alakban megadott helyes érték 1 pontot ér.*
Összesen:	**7 pont**	

6. b)		
A diákok által elért összpontszám: $14 \cdot 76 = 1064$.	1 pont	
Ebből a maximális pontot elérők összesen 500 pontot, a maradék 9 tanuló összesen 564 pontot ért el.	1 pont	
Mivel $564 - 9 \cdot 60 = 24 > 0$, kilencen nem lehettek 60 pontosak.	1 pont	
Nyolc tanuló dolgozata lehetett 60 pontos, mert $564 - 8 \cdot 60 = 84 > 60$ (a kilencedik tanuló pontszáma ekkor 84), ezért legfeljebb 8 tanulónak lehetett 60 pontos a dolgozata.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Módszeres próbálgatással kapott helyes eredmény is 4 pontot ér.*

6. c)		
A 14 tanulónak összesen 1064 pontja volt. Ebből ismert az $5+6+1=12$ tanuló $5 \cdot 100 + 6 \cdot 60 + 76 = 936$ pontja. A fennmaradó 128 ponton 2 tanuló osztozott úgy, hogy ebből a 128 pontból mindketten kaptak legalább 61 pontot.	1 pont	
A lehetőségek: $61+67$, ez 2 lehetőség; $62+66$, ez 2 lehetőség.	1 pont	
$63+65$, ez 2 lehetőség; $64+64$, ez 1 lehetőség.	1 pont	
A két tanuló dolgozatának pontszáma $(2+2+2+1=)7$-féleképpen alakulhatott.	1 pont	
Mivel a nem maximális pontszámot elérő 9 tanulóból a 60 pontot elérő 6 tanuló kiválasztására $\binom{9}{6}=84$ lehetőség van;	1 pont	
és a maradék három tanulóból 3-féleképpen válaszható ki a 76 pontos,	1 pont	
ezért az összes lehetőségek száma: $84 \cdot 3 \cdot 7 = 1764$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3.		
A megoldandó egyenlőtlenségeket írjuk $2^{\sin x} > 2^0$, illetve $2^{\cos x} < 2^0$ alakba.	2 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során megjelenik, jár a 2 pont.*
A 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő,	1 pont	
ezért $2^{\sin x} > 1$ pontosan akkor teljesül, ha $\sin x > 0$,	1 pont	
és $2^{\cos x} < 1$ pontosan akkor teljesül, ha $\cos x < 0$.	1 pont	
Az adott alaphalmazon a $\sin x > 0$ egyenlőtlenség megoldása: $0 < x < \pi$,	2 pont	*A megoldásban mindkét végpont helyes: 1 pont. Nyílt intervallumot ad meg: 1 pont.*
azaz $A =]0; \pi[$	1 pont	
Az adott alaphalmazon a $\cos x < 0$ egyenlőtlenség megoldása: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$,	2 pont	*A megoldásban mindkét végpont helyes: 1 pont. Nyílt intervallumot ad meg: 1 pont.*
azaz $B = \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.	1 pont	
Mindezek alapján $A \setminus B = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.	2 pont	*1 pont jár, ha csak a zártság-nyíltság kérdésében téveszt.*
Összesen:	**13 pont**	

A keresett halmazoknak bármilyen (pl. számegyenesen történő) helyes megadása esetén a megfelelő pontok járnak.

4. a) **első megoldás**		
		
A feladat helyes értelmezése (pl. jó ábra).	1 pont	
Az ábra jelöléseit használva az *ADC* háromszög *AD* oldalára felírva a koszinusztételt:	1 pont	
$4x^2 = x^2 + 1 - 2x\cos\gamma$, (ahol $0 < x$ és $0 < \gamma < \pi$). (1)	1 pont	
Az *ABC* háromszög *AB* oldalára a koszinusztétel:	1 pont	
$4 = 4x^2 + 1 - 4x\cos\gamma$.	1 pont	
A koszinuszos tagot kiküszöbölve pl.: $8x^2 - 4 = 1 - 2x^2$.	2 pont	
Az egyenlet (pozitív) gyöke: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.	1 pont	
Így a keresett oldal hossza: $BC(= 2x = \frac{2}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.	1 pont	*Ha a választ közelítő értékkel adja meg, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**9 pont**	

4. a) **második megoldás**		
A feladat helyes értelmezése (pl. jó ábra).	1 pont	
Az ábra jelöléseit használva az *ADC* háromszög *AC* oldalára felírva a koszinusztételt:	1 pont	
$1 = 5x^2 - 4x^2\cos\delta$, (ahol $0 < x$ és $0 < \delta < \pi$).	1 pont	
Az *ABD* háromszög *AB* oldalára a koszinusztétel:	1 pont	
$4 = 5x^2 - 4x^2\cos(180^\circ - \delta)$.	1 pont	
Mivel $\cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta$, ezért	1 pont	
a két egyenlet megfelelő oldalait összeadva a koszinuszos tag kiküszöbölhető: $5 = 10x^2$,	1 pont	
ahonnan $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.	1 pont	
Így a keresett oldal hossza: $BC(= 2x = \frac{2}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.	1 pont	*Ha a választ közelítő értékkel adja meg, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**9 pont**	

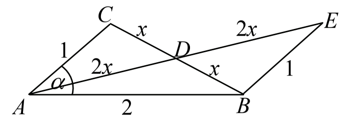
5. c) **második megoldás**		
Mind az összes, mind a kedvező eseteket úgy számoljuk össze, hogy az egyszínű golyókat is megkülönböztetjük egymástól.		
Az összes (egyenlően valószínű) esetek száma ekkor: 5^6.	1 pont	
A kedvező esetek három részre bonthatók: (1) nem húzunk pirosat, (2) 1 pirosat húzunk, (3) 2 pirosat húzunk.	1 pont	
Az (1) esetben a lehetőségek száma: 3^6.	1 pont	
A (2) esetben a lehetőségek száma, figyelembe véve, hogy hányadikra húztunk pirosat: $6 \cdot 2 \cdot 3^5$.	1 pont	
A (3) esetben a lehetőségek száma a 2 piros golyó húzási sorszámának figyelembe vételével: $\binom{6}{2} \cdot 2^2 \cdot 3^4$ $(= 15 \cdot 2^2 \cdot 3^4)$.	2 pont	
Így a keresett valószínűség: $P = \frac{3^6 + 6 \cdot 2 \cdot 3^5 + 15 \cdot 2^2 \cdot 3^4}{5^6} =$	1 pont	
$\frac{729 + 2916 + 4860}{15625} = \frac{8505}{15625} \approx 0{,}544$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. a)		
Jelölje *n* a csoportba járó diákok számát. A feltételek alapján a dolgozatok összpontszáma: 76*n*.	1 pont	*Ezek a pontok járnak akkor is, ha a gondolat a helyesen felírt egyenlőtlenségben világosan jelenik meg.*
5 dolgozat 100 pontos, $(n-5)$ tanuló legalább 60 pontot kapott a dolgozatára, ezért legalább $500 + (n-5) \cdot 60$ pontot értek el.	1 pont	
$76n \geq 500 + (n-5) \cdot 60$, (ahol $n \in N$).	1 pont	
Ebből $n \geq 12{,}5$.	1 pont	
A csoportnak legalább 13 tanulója volt.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) első megoldás

A hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót: ha nem húzunk pirosat (*A* esemény), vagy 1 pirosat húzunk (*B* esemény), vagy 2 pirosat húzunk (*C* esemény).	1 pont	
Mivel az *A,* a *B* és a *C* események páronként egymást kizáró események, a keresett valószínűség $P = P(A) + P(B) + P(C)$.	1 pont	*Ez az 1 pont csak indoklással együtt jár.*
Piros golyó húzásának valószínűsége $\frac{2}{5}$, fehér golyó húzásának valószínűsége $\frac{3}{5}$ minden húzásnál, ezért (a *P*(*A*), *P*(*B*) és *P*(*C*) az $n = 6$ és $p = \frac{2}{5}$ paraméterű binomiális eloszlás tagjai):	1 pont	
$P(A) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6$ (= 0,0467),	1 pont	
$P(B) = \binom{6}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5$ (= 0,1866),	1 pont	
$P(C) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$ (= 0,3110).	1 pont	
A keresett valószínűség $P = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{729 + 2916 + 4860}{5^6} = \frac{8505}{15625}$,	1 pont	
ami közelítően 0,544.	1 pont	*Ha a részeredményeket is három tizedesjegyre kerekíti és így 0,545-et kap, akkor is jár az 1 pont.*
Összesen:	**8 pont**	

4. a) harmadik megoldás



A feladat helyes értelmezése (pl. jó ábra).	1 pont	
Tükrözzük az *ACD* háromszöget (vagy az *ABC* háromszöget) *D*-re.	1 pont	
Ekkor az *ABE* háromszögben $AB = 2$, $BE = 1$, $AE = 4x$ és $ABE \sphericalangle = 180° - \alpha$.	1 pont	
Az *ABC* háromszög *CB* oldalára felírva a koszinusztételt:	1 pont	
$4x^2 = 5 - 4\cos\alpha$,	1 pont	
Az *ABE* háromszög *AE* oldalára felírva a koszinusztételt:	1 pont	
$16x^2 = 5 + 4\cos\alpha$.	1 pont	
Az egyenletrendszer (pozitív) megoldása: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (és $\cos\alpha = \frac{3}{4}$).	1 pont	
Így a keresett oldal hossza: $BC(= 2x) = \sqrt{2}$.	1 pont	*Ha a választ közelítő értékkel adja meg, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**9 pont**	

4. b) első megoldás

$T = \frac{AC \cdot BC \sin\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin\gamma}{2} \left(= \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}\right)$.	1 pont	
Az (1) egyenletből $\cos\gamma = \frac{1 - 3x^2}{2x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(= -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.	2 pont	
Így $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}} \left(= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$.	1 pont	
Behelyettesítve: $T = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
Ha a képletet helyesen alkalmazza a terület kiszámítására, de közelítő értékekkel számol, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.		

4. b) második megoldás		
Az ABC háromszög területe: $\frac{AB\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{1\cdot 2\cdot\sin\alpha}{2}=\sin\alpha$.	1 pont	
Az ABC háromszögben $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ (ld. az a) rész megoldása).	2 pont	
$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.	1 pont	
Az ABC háromszög területe tehát $\frac{\sqrt{7}}{4}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
Ha a képletet helyesen alkalmazza a terület kiszámítására, de közelítő értékekkel számol, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.		

4. b) harmadik megoldás		
Az ABC háromszög területe Heron képlettel számolva: $T=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$, ahol $s=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$,	1 pont	
$s-a=s-\sqrt{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$, $s-b=s-1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $s-c=s-2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.	1 pont	
Innen $T=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{16}}$.	1 pont	
A megfelelő nevezetes azonosság felhasználásával $T=\sqrt{\frac{7\cdot 1}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	
Ha a képletet helyesen alkalmazza a terület kiszámítására, de közelítő értékekkel számol, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.		

II.

5. a)		
A lehetséges húzási sorrendek száma megegyezik 2 piros és 3 fehér golyó különböző sorbarendezéseinek számával.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem írja le ezt a megállapítást, de a kérdésre adott válaszából kiderül, hogy jól alkalmazza.*
A 2 piros és 3 fehér golyónak $\frac{5!}{2!\cdot 3!}$ $(=\binom{5}{2})$ különböző,	1 pont	*Ha az esetek felsorolásával találja meg a 10 lehetőséget, jár a 2 pont. 9 eset megtalálása 1 pontot ér, ennél kevesebb eset megadásáért nem jár pont.*
tehát 10 sorbarendezése van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b) első megoldás		
A már kihúzott 2 piros és 2 fehér golyó húzása $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ $(=\binom{4}{2})$, azaz	2 pont	
6 különböző sorrendben történhetett.	1 pont	
A lehetséges (egyenlően valószínű) esetek száma 10 (ld. a) feladat), így a keresett valószínűség: $P=\frac{6}{10}(=\frac{3}{5}=0{,}6)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b) második megoldás		
Mivel egyik golyó sincs kitüntetve, ezért bármelyik golyó ugyanakkora valószínűséggel marad utolsónak.	2 pont	
Ez a valószínűség $\frac{1}{5}$.	1 pont	
Így annak a valószínűsége, hogy utolsóként fehér golyót húzunk: $P=\frac{3}{5}(=0{,}6)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	