

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2009. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS
MINISZTERIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

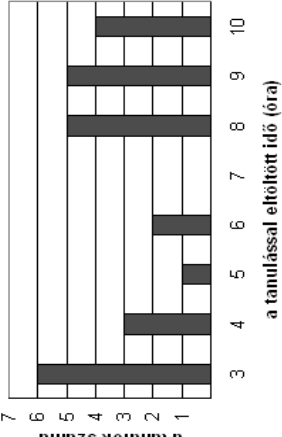
- 1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől eltérő színű tollal kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- 2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott pontszám a mellette levő téglalapba kerül.
- 3. Kifőgástalan megoldás esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
- 4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes részpontszámokat is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

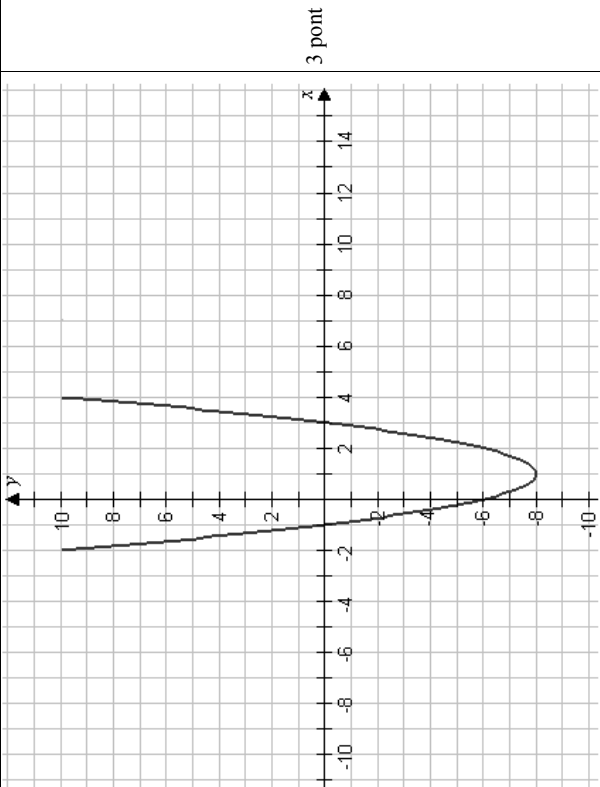
- 1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadjuk. Amennyiben azoktól eltérő megoldás születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- 2. A pontozási útmutató pontjai tovább bonthatók. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- 3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél kevésbé részletezett.
- 4. Ha a megoldásban számolási hiba, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás rész eredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- 5. Elvi hibát követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
- 6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
- 7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül a vizsgázó által megjelölt változatot értékelhető.
- 8. A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) nem adható.
- 9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért nem jár pontlevonás, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- 10. A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

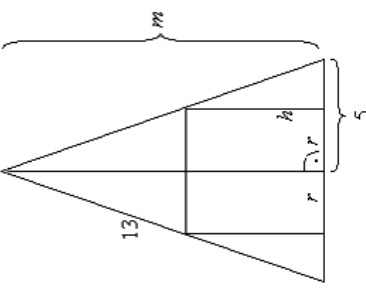
b)			
x tanuló van a $Z \cap S$ halmazban.	1 pont		
y tanuló van a $Z \cap G$ halmazban.			
Nincs olyan tanuló, aki egyszerre tanul gitározni és szaxofonozni, azaz a $G \cap S$ halmaz elemszáma, $z = 0$.	1 pont		Ha ezek a halmazábrában szerepelnek, akkor is jár a 4 pont.
$7-x$ tanuló csak szaxofonozik.	1 pont		
$8-y$ tanuló csak gitározik.	1 pont		
$x+y=12$.	1 pont		
$7-x=2 \cdot (8-y)$.	1 pont		
Az egyenletrendszer megoldása: $x=5$; $y=7$.	1 pont		
Összesen: 7 pont	7 pont		
* Ez a pont vagy az itteni gondolatért, vagy a szöveges válaszért jár.			
c)			
A 7 szaxofonos közül kettőt $\binom{7}{2}$ -féleképpen választhatunk ki.	1 pont		
A 8 gitáros közül kettőt $\binom{8}{2}$ -féleképpen választhatunk ki.	1 pont		
Kedvező esetek száma: $\binom{7}{2} + \binom{8}{2}$.	2 pont		
A 18 tanuló közül kettőt $\binom{18}{2}$ -féleképpen választhatunk ki.	1 pont		
A keresett valószínűség: $\frac{\binom{7}{2} + \binom{8}{2}}{\binom{18}{2}} \approx 0,32$.	1 pont		A helyes végeredmény bármelyik alakban elfogadható.
Összesen: 6 pont	6 pont		

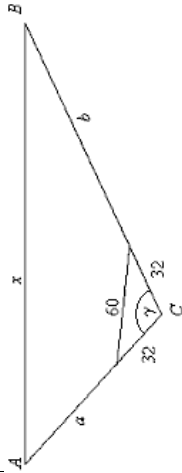
2. megoldás		
$f'(r)$ meghatározásáig ez a megoldás megegyezik az 1. megoldással.	9 pont	
$f'(r) = \pi(12r^2 - 2,4r^3) = 2,4\pi(5r^2 - r^3) = 2,4\pi \cdot r \cdot r \cdot (5 - r) = 9,6\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot (5 - r)$.	2 pont	
Elég az $\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot (5 - r)$ szorzat maximumát keresni, ahol $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 5 - r$ összeg állandó, értéke 5.	2 pont	
A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:		
$\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot (5 - r) \leq \left(\frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 5 - r}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$.	1 pont	
Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\frac{r}{2} = 5 - r$, azaz $r = \frac{10}{3}$.	1 pont	
A henger sugara $\frac{10}{3}$ cm.	1 pont	
Összesen: 16 pont		
9.		
a)		
15 + 8 + 7 = 30, de csak 18 tanuló van, ezért 12-en vannak, akik kétféle hangszeren tanulnak.	3 pont	
Összesen: 3 pont		

1.		
a)		
$3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 4$.	26	2 pont
$\bar{x} = \frac{172}{26}$ óra $\approx 6,6$ óra.		1 pont
Módusz: 3 óra.		2 pont
Medián: 8 óra.		2 pont
Összesen: 7 pont		
b)		
		3 pont
Összesen: 3 pont		
2.		
a)		
Az A típusú kávé egységára x , a B típusúé y .		1 pont
A feltételek alapján: $20x + 30y = 93000$;		2 pont
$30x + 20y = 87000$.		2 pont
Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1500$ és $y = 2100$.		4 pont
A kávék egységára 1500 Ft, illetve 2100Ft.		1 pont
Összesen: 10 pont		
b)		
Jelölje a az A típusú kávéból felhasznált mennyiséget, ekkor a B típusúból $60 - a$ kg-ot használnak fel.	1 pont	
Így $1500a + 2100(60 - a) = 120000$;	1 pont	
$a = 10$.	1 pont	
10 kg A típusú és 50 kg B típusú kávéét használnak a keverékhez.	1 pont	
Összesen: 4 pont		

3.		
a)		
$2x^2 - 4x - 6 = 0$.		1 pont
$x_1 = 3$.		1 pont
$x_2 = -1$.		
$y = 2 \cdot (x - 1)^2 - 8$.		2 pont
A minimum helye: $x = 1$.		1 pont
A minimum értéke: $y = -8$.		1 pont
Összesen:		6 pont

b)		
		3 pont
Ha nem az adott intervallumon ábrázol, akkor legfeljebb 2 pont jár.		
Összesen:		3 pont

8.		
1. megoldás		
	2 pont	Ha nincs ábra, de a helyes megoldásból látszik a jó elképzelés, ez a 2 pont akkor is jár.
$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm).	1 pont	
Azonos hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszögek alapján:	1 pont	
$\frac{h}{5-r} = \frac{m}{5}$.	2 pont	
Ebből $h = \frac{m(5-r)}{5} = \frac{12 \cdot (5-r)}{5} = 12 - 2,4r$.	1 pont	
A henger térfogata: $V(r) = r^2 \pi (12 - 2,4r) = \pi (2r^2 - 2,4r^3)$, ahol $r \in]0; 5[$.	2 pont	A két pont az $r \in]0; 5[$ megjelzés nélkül is jár.
$V'(r) = \pi (24r - 7,2r^2)$.	2 pont	
Szélsőérték ott lehet, ahol $24r - 7,2r^2 = 0$. $r \neq 0$, ezért $r = \frac{10}{3}$.	3 pont	Szöveges magyarázat nélkül is jár a 3 pont.
$r = \frac{10}{3}$ esetén a derivált $+$ $\rightarrow$ $-$ előjelet vált, ezért $V(r)$ -nek maximuma van.	1 pont	
A henger sugara $\frac{10}{3}$ cm.	1 pont	
Összesen:		16 pont

7.		
a)		<i>A helyes ábráért, a lényeges adatok feltüntetéseért 2 pont.</i> <i>Ha nincs ábra, vagy hiányos, de a helyes megoldásból látszik a jó elképzelés, ez a két pont akkor is jár.</i>
A γ szög megállapítása: $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{30}{32}$.		
$\gamma \approx 139,27^\circ$.		
A hangsebesség alapján a távolságok: $a = 14 \cdot 340 = 4760$ (m) és		
$b = 18 \cdot 340 = 6120$ (m).		
Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján: $x^2 = 4760^2 + 6120^2 - 2 \cdot 4760 \cdot 6120 \cdot \cos 139,27^\circ$.		
$x \approx 10\,200$.		
A két helyszín távolsága kb. 10 km.		
Összesen: 10 pont		
b)		
Legyen a teljes út s.		
A menetidő: $\frac{\frac{s}{2}}{2} + \frac{\frac{s}{2}}{5}$.		
Az átlagsebesség: $\frac{s}{\frac{\frac{s}{2}}{2} + \frac{\frac{s}{2}}{5}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{5 + 2} =$		
$= \frac{20}{7} \approx 2,86$.		
Az átlagsebesség $\approx 2,86$ km/h.		
Összesen: 6 pont		<i>Ha nem számolja ki a menetidőt, hanem a harmonikus közép ismeretében számolja ki az átlagsebességet, akkor is a teljes pontszám jár.</i>

c)		
A parabola egyenletében $a = 2$, ezért $\left(\frac{1}{2p} = 2\right)$; $p = \frac{1}{4}$.		1 pont
A fókuszpont a tengelypont felett van $\frac{p}{2}$ távolságra, tehát $F\left(1; -\frac{63}{8}\right)$.		1 pont
Összesen: 4 pont		
<i>Ha az a) kérdésre adott válaszai hibásak, és ezekkel jól dolgozik b) és /vagy c) kérdéseknél, az utóbbi teljes pontszámok járnak.</i>		
4.		
Értelmezési tartomány vizsgálata:		
I. $x^2 - 3x \geq 0$.		1 pont
$x \leq 0$ vagy		1 pont
$x \geq 3$.		1 pont
II. $x + 2 > 0$.		1 pont
$x > -2$.		1 pont
I. és II. $-2 < x \leq 0$ vagy $3 \leq x$.		1 pont
Egy szorzat negatív, ha tényezői különböző előjelűek.		1 pont
Mivel $\sqrt{x^2 - 3x}$ negatív nem lehet, ezért $\sqrt{x^2 - 3x} > 0$ és $\log_{0,1}(x + 2) < 0$ kell legyen.		2 pont
A gyökös egyenlőtlenség megoldása: $-2 < x < 0$ vagy $3 < x$.		1 pont
Mivel a fenti logaritmus függvény szigorúan monoton csökken, ezért $x + 2 > 1$.		1 pont
$x > -1$.		1 pont
A megoldáshalmaz: $-1 < x < 0$ vagy $3 < x$.		1 pont
Összesen: 14 pont		
<i>Ha az első mondat nem szerepel, akkor is 3 pont.</i>		
<i>Az $x = 0$, $x = 3$ esetek kizárásáért.</i>		
<i>A helyes egyenlőtlenségért a szöveges indoklás nélkül is jár a pont.</i>		

II.

Az 5–9. feladatok közül a tanuló által megjelölt feladatot nem kell értékelni.

5. megoldás	
A mértani sorozat tagjai: $a; b = aq$ és $c = aq^2$.	1 pont
Az első számtani sorozat tagjai: $a; aq; aq^2 - a - 2aq$.	1 pont
A második számtani sorozat tagjai: $a; aq + 9; aq^2$.	1 pont
Az első számtani sorozatból: $aq = \frac{a + aq^2 - a - 2aq}{2}$.	2 pont
A második számtani sorozatból: $aq + 9 = \frac{a + aq^2}{2}$.	2 pont
A fenti egyenletek rendezésével a következő egyenletrendszert kapjuk: $\left. \begin{aligned} aq^2 - 4aq &= 0 \\ aq^2 - 2aq + a &= 18 \end{aligned} \right\}$.	2 pont
Mivel $aq \neq 0$,	1 pont
az első egyenletből: $q = 4$.	1 pont
Így a második egyenletből: $a = 2$.	2 pont
Ellenőrzés: mértani: 2; 8; 32; első számtani: 2; 8; 14; második számtani: 2; 17; 32.	2 pont
Tehát $a = 2$; $b = 8$; $c = 32$.	1 pont
<i>Ezt az egy pontot akkor is megkaphatja, ha a mértani sorozat tagjait csak az ellenőrzés során adja meg.</i>	
Összesen: 16 pont	

2. megoldás	
Az első számtani sorozat tagjai: $a; b; c - a - 2b$.	1 pont
Ezért $a + c - a - 2b = 2b$.	(1) 2 pont
A második számtani sorozat tagjai: $a; b + 9; c$.	1 pont
Ezért $a + c = 2b + 18$.	(2) 2 pont
$b^2 = ac$.	(3) 1 pont
(1)-ből: $c = 4b$.	(4) 1 pont
(2) és (4)-ből: $a = 18 - 2b$.	(5) 1 pont
(3), (4) és (5)-ből: $b^2 = 4b(18 - 2b)$.	1 pont
$b > 0$ miatt	1 pont
$b = 8$.	1 pont
$a = 2$.	1 pont
$c = 32$.	1 pont
Ellenőrzés.	2 pont
Összesen: 16 pont	

6.	
a)	
Az első helyre ötféle szám kerülhet,	1 pont
a többi helyre hatféle.	1 pont
$5 \cdot 6^5 = 38\,880$ hatjegyű számot készíthetünk.	1 pont
Összesen: 3 pont	

b)	
A hatjegyű szám vagy nullára vagy ötre végződhet.	1 pont
<i>Ha ez a mondat nem szerepel, de helyes a megoldás menete, ez a pont akkor is jár.</i>	
Ha nullára végződik: $5!$	1 pont
Ha 5-re végződik: $4 \cdot 4!$	2 pont
Összesen $5! + 4 \cdot 4! = 216$.	2 pont
Összesen: 6 pont	

c)	
Azon hatjegyű számok száma, amelyekben legalább egy számjegy ismétlődik, megkapható úgy, hogy az adott számjegyekből képezhető összes hatjegyű számok számából kivonjuk azoknak a hatjegyűeknek a számát, amelyek csupa különböző számjegyekből állnak.	3 pont
Az ismétlődés nélküli hatjegyű számok száma: $5 \cdot 5!$	2 pont
Az összes lehetőségek száma: $5 \cdot 6^5$.	
Legalább egy ismétlődés van:	
$5 \cdot 6^5 - 5 \cdot 5! = 38\,280$.	2 pont
Összesen: 7 pont	