ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2009. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

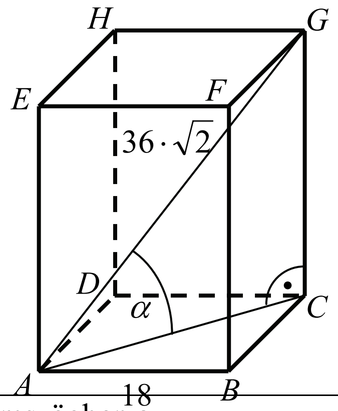
1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)



Az ACG derékszögű háromszögben a $GAC\angle\ (=\alpha)$ szöget keressük.	1 pont	
Az ABC derékszögű háromszögben: $AC = 18\cdot\sqrt{2}$;	1 pont	
így $\cos\alpha = \frac{AC}{AG} = \frac{1}{2}$, (és $0^\circ < \alpha < 90^\circ$),	1 pont	
ahonnan $\alpha = 60^\circ$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)

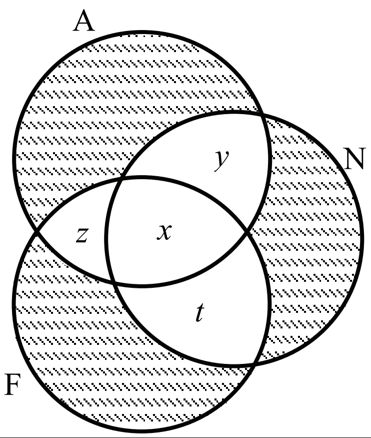
A négyzetes hasáb alapéle $a = 18$, magassága $m = CG = 18\cdot\sqrt{6}$,	1 pont	
felszíne: $A = 2a^2 + 4a\cdot m = 2\cdot 18^2 + 4\cdot 18^2\cdot\sqrt{6}\ \left(\approx 3822{,}5\right)$.	1 pont	
A hasáb felszíne 3822,5 (területegység).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. c)

Ha a mértani sorozat első tagja *a*, hányadosa *q*, akkor $a = AB = 18$ és $a\cdot q^3 = AG = 36\cdot\sqrt{2}$.	1 pont	
Innen $q^3 = 2\sqrt{2}$,	1 pont	
azaz $q = \sqrt{2}.$	1 pont	
A mértani sorozat második tagja tehát: $a\cdot q = 18\cdot\sqrt{2}$, és ez éppen az alaplap AC átlójának hossza.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

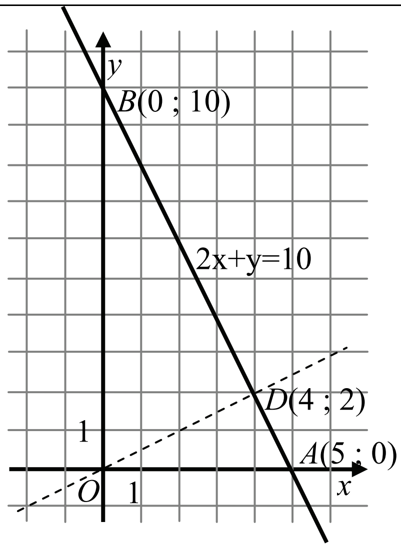
1.) Ha a vizsgázó feltételezi, hogy az állítás igaz, tehát abból indul ki, hogy a mértani sorozat első két tagja 18 és $18\sqrt{2}$, és megmutatja, hogy ennek a sorozatnak a negyedik tagja $36\sqrt{2}$, akkor maximum 2 pontot kaphat.
2.) Ha a vizsgázó megmutatja, hogy a 18, $18\sqrt{2}$ és $36\sqrt{2}$ rendre egy mértani sorozat első, második és negyedik tagja, de nem igazolja, hogy a sorozatnak más szám nem lehet a második tagja, maximum 2 pontot kaphat.
3.) Ha a vizsgázó a „bizonyítást” közelítő értékekkel végzi, megoldására legfeljebb 2 pontot kaphat.

2. a)		
A lányok testmagasságának átlaga: $\frac{2624}{16}=164$ (cm).	1 pont	
Az osztály tanulóinak átlagmagasságát $(\bar{t})$ a 16 lány átlagmagassága $(\bar{l})$ és a 14 fiú átlagmagassága $(\bar{f})$ segítségével számíthatjuk ki: $\bar{t}=\frac{16\cdot\bar{l}+14\cdot\bar{f}}{30}=$	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, az 1 pont akkor is jár.*
$=\frac{16\cdot164+14\cdot172{,}5}{30}=$	1 pont	
$=\frac{2624+2415}{30}=\frac{5039}{30}$.	1 pont	
Az osztály tanulóinak átlagmagassága 168,0 cm.	1 pont	*Ha nem egy tizedesjegyre kerekít – például 168-at ír –, a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	*Ha nem súlyozott átlagot számol, az utolsó 4 pontot elveszíti.*

2. b) első megoldás		
		
Ha az osztály 30 tanulóját a három tanult nyelv alapján Venn-diagramon ábrázoljuk, csak négy tartományba jut tanuló, az ábra alapján jelöljük az egyes tartományokba jutó tanulók számát x-szel, y-nal, z-vel és t-vel.	1 pont	*Csak a rajz alapján is jár a pont.*
(1) alapján $x+y+z+t=30$. (2) alapján $z+t=y$. (3) alapján $x+y+z=27$. (4) alapján $x+t=15$.	2 pont	*Két helyes egyenlet felírásáért 1 pont jár.*
Ezekből: $x=12$; $y=9$; $z=6$; $t=3$.	2 pont	*Két helyes érték kiszámításáért 1 pont jár.*
Mindhárom nyelvet 12-en tanulják, és 9-en nem tanulnak franciául.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	
A jól felrajzolt, négy halmazos (osztály, és az egyes nyelvet tanulók halmaza) Venn-diagramba szöveges magyarázat nélkül, de jól beírt elemszámból leolvasott helyes válasz esetén a 7 pont helyett 4 pont adható.		

2. b) **második megoldás**		
Mivel az osztályból mindenki tanul legalább két nyelvet, az angolt nem tanulók száma 30-27=3.	1 pont	
Az angolt nem tanulókat (3 fő) kihagyva a németet is és franciát is tanulók 15 fős halmazából: megkapjuk a mindhárom nyelvet tanulók részhalmazát. (Ennek elemszáma 12.)	1 pont	
Ha az osztályból kihagyjuk a mindhárom nyelvet tanulókat, kapjuk, hogy 30-12= 18 tanuló tanul pontosan két nyelvet.	1 pont	
A feladat feltételei közül a (2)-esből következik, hogy a pontosan két nyelvet tanulókra nézve is igaz a megadott feltétel. Vagyis a 18 elemű halmazt két azonos elemű részhalmazra kell bontanunk. E két részhalmaz elemszáma 9-9.	1 pont	
Mindezekből következik, hogy a pontosan két nyelvet tanulók közül angolt és németet 9-en, (angolt és franciát 6-an, mivel németet és franciát 3-an) tanulnak.	1 pont	
Mindhárom nyelvet 12-en tanulják, és 9-en nem tanulnak franciául.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a)



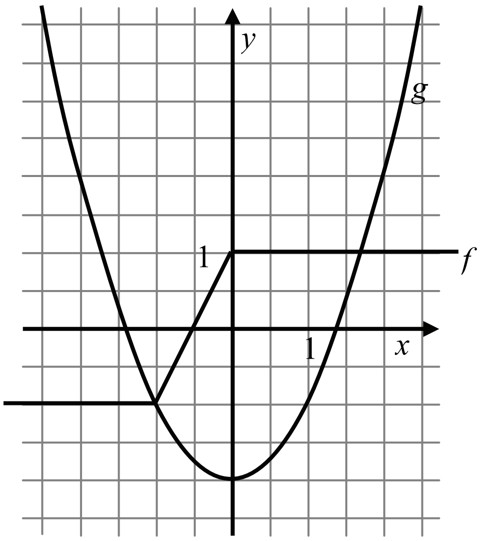
A megadott $2x + y = 10$ egyenletű egyenes az $A(5\,;0)$ és a $B(0\,;10)$ pontban metszi a tengelyeket.	1 pont	
Az origóból az egyenesre bocsátott, rá merőleges egyenes egyenlete: $x - 2y = 0$.	1 pont	
A két egyenes D metszéspontjának koordinátái: $D(4\,;2)$.	1 pont	*Csak a kiszámolt vagy leolvasott és behelyettesített értékekért jár az 1 pont.*
A megadott feltételeknek három derékszögű háromszög felel meg: *AOB* háromszög (ahol $A(5\,;0)$, $O(0;0)$ és $B(0\,;10)$)	1 pont	
ADO háromszög (ahol $A(5\,;0)$, $D(4\,;2)$ és $O(0;0)$)	1 pont	
BDO háromszög (ahol $B(0\,;10)$, $D(4\,;2)$ és $O(0;0)$)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1.) Ha csak az AOB háromszöget adja meg, 2 pontot kaphat.
2.) A válaszhoz nem szükséges újból felírni a csúcsok koordinátáit.
3.) Az A és B pontok koordinátáinak megadása történhet „leolvasással” is.
4.) Ha csak annyit állapít meg, hogy három megfelelő derékszögű háromszög van, akkor az utolsó 3 pontból 1 pontot kap.

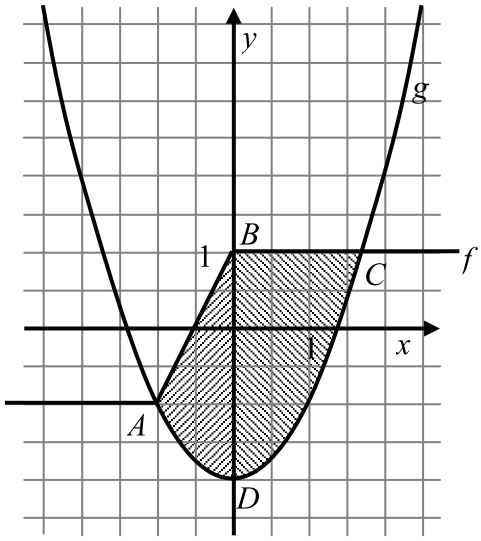
3. b) **első megoldás**		
Az egyenesnek és a körnek akkor és csak akkor van közös pontja, ha az egyenes és a kör egyenletéből álló egyenletrendszernek van megoldása.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, az 1 pont akkor is jár.*
A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 16$.	1 pont	
Az egyenes egyenletéből $y = b - 2x$. Behelyettesítés után kapjuk, hogy $x^2 + (b-2x)^2 = 16$.	1 pont	
$5x^2 - 4bx + b^2 - 16 = 0$.	1 pont	
A kapott másodfokú egyenletnek van megoldása, ha a D diszkriminánsa nem negatív.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, az 1 pont akkor is jár.*
$(D =)320 - 4b^2 \geq 0$,	1 pont*	
ahonnan $\lvert b \rvert \leq 4\sqrt{5}$.	1 pont	
A b paraméter lehetséges értékei tehát a $[-4\sqrt{5}\,;\,4\sqrt{5}\,]$ elemei.	1 pont	*A helyes válasz tizedes tört alakban megadva is 1 pontot ér.*
Összesen:	**8 pont**	

3. b) **második megoldás**		
Mivel az e egyenesek egymással párhuzamosak, az egyenesekre az origóból állított merőleges f egyenes egyenlete $x - 2y = 0$.	1 pont	
Az e egyenesek és f metszéspontja $E = \left(\frac{2b}{5}\,;\,\frac{b}{5}\right)$.	2 pont	
Az e egyenesnek és a megadott körnek akkor és csak akkor van közös pontja, ha az E pont az origótól legfeljebb 4 egység távolságra van.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, az 1 pont akkor is jár.*
$OE = \sqrt{\frac{b^2}{5}} \leq 4$,	2 pont*	
ahonnan $\lvert b \rvert \leq \sqrt{80}$.	1 pont	
A b paraméter lehetséges értékei: $-\sqrt{80} \leq b \leq \sqrt{80}.$	1 pont	*A helyes válasz tizedes tört alakban megadva is 1 pontot ér.*
Összesen:	**8 pont**	

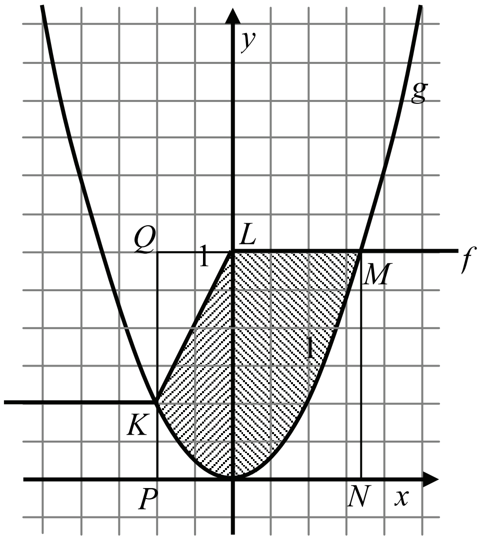
**: Ha az egyenlőség nem szerepel, akkor a *-gal jelölt pont (pontok) helyett 1 ponttal kevesebb jár.*

4. a)		
		
A függvények ábrázolása.	2 pont	*Függvényenként 1-1 pont jár. Egység jelölése nélkül legfeljebb 1 pont adható.*
$-1 = x^2 - 2$ egyenlet megoldása az $x \leq -1$ feltétel esetén az $x = -1$.	1 pont	*Ha az $x_1 = -1$ megoldást a grafikonról olvassa le, jár érte az 1 pont.*
$2x + 1 = x^2 - 2$ egyenletnek nincs megoldása az $]-1\,;0\,[$ intervallumon.	1 pont	
$1 = x^2 - 2$ egyenlet megoldása az $x \geq 0$ feltétel esetén az $x = \sqrt{3}$.	1 pont	
Az $f(x) = g(x)$ egyenletnek két megoldása van: $x_1 = -1$ és $x_2 = \sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

4. b) első megoldás



Tekintsük az f és g grafikonját, ahol $A(-1;-1)$, $B(0;1)$, $C(\sqrt{3};1)$ és $D(0;-2)$.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, a vonatkozó pontok akkor is járnak.*
A vizsgálandó síkidomot az AB; a BC szakaszok és az ADC parabolaív határolja.	1 pont	
Vágjuk ketté a síkidomot az y tengellyel! $T_{ABCD}=T_{ABD}+T_{DBC}$.	1 pont	
$T_{ABD}=\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$	1 pont	
$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{3}$	1 pont	
$T_{DBC}=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)dx=$	1 pont	
$=\left[3x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}}=2\cdot\sqrt{3}$.	1 pont	
A keresett terület nagysága: $\frac{5}{3}+2\cdot\sqrt{3}\ (\approx 5{,}13)$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

4. b) második megoldás		
Tekintsük az f és g grafikonját, ahol $A(-1; -1)$, $B(0; 1)$, $C(\sqrt{3}; 1)$ és $D(0;-2)$.	1 pont	
A vizsgálandó síkidomot az AB; a BC szakaszok és az ADC parabolaív határolja.	1 pont	*Ez a pont a rajz alapján is jár.*
		
Toljuk el mind a két grafikont y tengellyel párhuzamosan +2 egységgel!	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a számításaiból derül ki, hogy helyes értékekkel dolgozik, de az eltolt pontok koordinátáit nem jelöli a rajzán.*
A vizsgált síkidom területét (T) megkaphatjuk, ha a $KLMNP$ ötszög területéből $\left(T_{ötszög}\right)$ kivonjuk a parabola KM íve alatti területet $\left(T_{KM}\right)$. $T = T_{ötszög} - T_{KM}$.	1 pont	*Ezek a pontok bármilyen jó számításért járnak.*
$T_{ötszög} = T_{PNMQ} - T_{KQL} = \left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 3 - \frac{1\cdot 2}{2} = 3\cdot\sqrt{3}+2 \ \left(\approx 7{,}196\right)$.	1 pont	
$T_{KM} = \int_{-1}^{\sqrt{3}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}+\frac{1}{3} \ \left(\approx 2{,}065\right)$.	1 pont	
A keresett terület nagysága: $\frac{5}{3}+2\cdot\sqrt{3} \ \left(\approx 5{,}13\right)$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

II.

5. a)		
A nevező nem lehet 0, ezért $2^{x-1}-2\neq 0$,	1 pont	
ahonnan $x\neq 2$.	1 pont	
A továbbiakban a tört akkor 0, ha a számlálója 0, tehát $2x^2+x-10=0$, azaz $x_1=2$ és $x_2=-2{,}5$.	1 pont	
Így az egyenletnek egyetlen valós megoldása van, az $x=-2{,}5$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Ha a vizsgázó nem szűkíti az alaphalmazt, és a másodfokú egyenlet mindkét megoldását az eredeti egyenlet gyökeként adja meg, maximum 1 pontot kaphat. Ha viszont a két számot behelyettesítéssel ellenőrzi, és így zárja ki a 2-t mint megoldást, a teljes pontszám jár.		

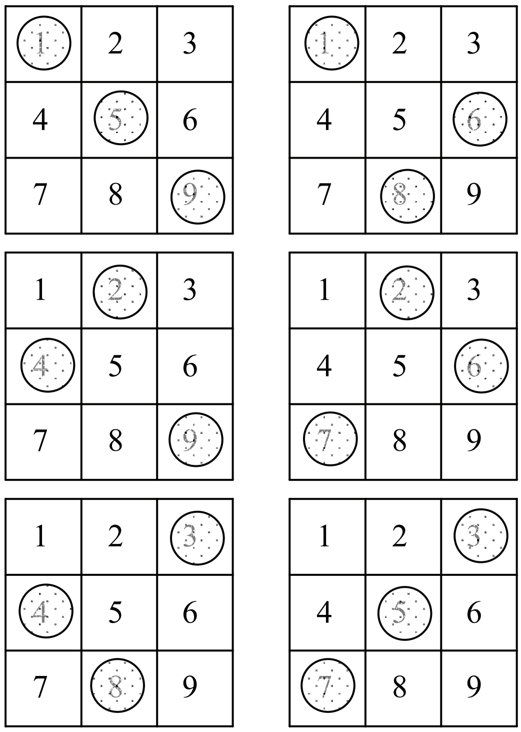
5. b) első megoldás		
Mivel $x\geq -16$ és $x\geq 9$ lehet csak, így az egyenlet azon x valós számokra értelmezett, amelyekre $x\geq 9$ teljesül.	1 pont	
A $[9;+\infty[$ halmazon értelmezett $f(x)=\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}$ függvény szigorúan növő,	1 pont	
ezért az f minimumértéke $f(9)=5$.	1 pont	
Így az egyenlet egyetlen megoldása az $x=9$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b) második megoldás		
A rendezés után kapott $\sqrt{x+16}=5-\sqrt{x-9}$ egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve,	1 pont	
rendezés után kapjuk, hogy $10\sqrt{x-9}=0$.	1 pont	
Innen $x=9$,	1 pont	
Behelyettesítéssel ellenőrizve adódik, hogy az $x=9$ gyöke az eredeti egyenletnek is.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
1.) Ha a vizsgázó nem ellenőriz behelyettesítéssel, csak arra hivatkozik, hogy az egyenlet gyökeit a $[9;+\infty[$ alaphalmazon keresi, az utolsó 1 pontot nem kaphatja meg. *2.) Ha viszont az alaphalmaz szűkítésén túl a négyzetre emelés előtt az egyenlet bal oldalán álló kifejezés értékkészletét is vizsgálja ($5-\sqrt{x-9}\geq 0$, azaz $x\leq 34$), ellenőrzés nélkül is maximális pontot kaphat.*		

5. c)		
A logaritmus értelmezése szerint: $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$.	1 pont	
Az első egyenlőtlenség megoldásai azon x valós számok, amelyekre $x<-3$ vagy $x>2$,	1 pont	
a másodiké: $-1<x<1$.	1 pont	
A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme, így az egyenletnek nincs megoldása.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Ha a vizsgázó az értelmezési tartomány vizsgálata nélkül oldja meg a feladatot, az értékelés a következő: *A logaritmus függvény egy-egy értelmű hozzárendelésére (vagy annak szigorú monotonitására) hivatkozás (1 pont), az* $x^2+x-6=1-x^2$*, azaz* $2x^2+x-7=0$ *egyenlet gyökeinek meghatározása:* $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{57}}{4}$ *(1 pont), indoklás, hogy egyik sem gyöke az eredeti egyenletnek (akár a közelítő értékek behelyettesítésével vagy grafikus úton) (2 pont).*		

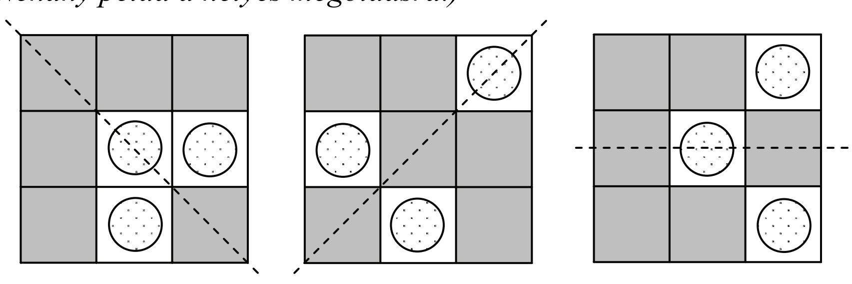
5. d)		
A jobb oldali kifejezés értéke az értelmezési tartományán csak nemnegatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$.	1 pont	
Ez csak $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) esetén teljesül.	1 pont	
De mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$, minden $k\in\mathbf{Z}$ esetén	1 pont	
és nullára a logaritmus nincs értelmezve, így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, tehát nincs megoldása.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. a)

Minden sorban kell lyukasztásnak lenni. Az első sorban 3 lehetőségünk van a lyuk kiválasztására, a második sorban már csak 2, a harmadik sorbeli lyukat pedig az előző kettő egyértelműen meghatározza.	1 pont	
A megfelelő lyukasztások száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.	1 pont	
	2 pont	*Legalább három, de hatnál kevesebb helyes ábráért 1 pont adható.*
Összesen:	**4 pont**	

6. b)

(Néhány példa a helyes megoldásra.)



Helyes ábra.	2 pont	*Ha az ábra nem csak egyetlen szimmetria-tengelyt tartalmaz, a 2 pontot nem kaphatja meg.*
A szimmetriatengely berajzolása.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. c)		
Az első kilenc pozitív egész között 4 prímszám van.	1 pont	
Kedvező esetek száma: 4.	1 pont	
Az összes lehetséges lyukasztások száma: $\binom{9}{3} = 84$.	2 pont	
Áron kívánsága $P = \frac{4}{84} (\approx 0{,}048)$ valószínűséggel teljesül.	1 pont	
Zita kívánságának 7 számhármas felel meg: (1; 3; 9), (1; 4; 8), (1; 5; 7), (2; 3; 8), (2; 4; 7), (2; 5; 6), (3; 4; 6).	3 pont	*1.) Ötnél kevesebb eset felsorolása esetén nem jár pont.* *2.) 5 jó eset 1 pont;* *6 jó eset 2 pont;* *7 jó eset 3 pont,* *ha egy vagy több hibás számhármast is megad, akkor 1 ponttal kevesebb jár.* *3.) A 3 pont megadható minden olyan megoldás-részletre, amellyel a vizsgázó helyesen indokolja a kedvező kiválasztások számát.*
A keresett valószínűség: $P = \frac{7}{84} (\approx 0{,}083)$.	1 pont	*Ha csupán eredményként közli a kért valószínűséget, csak az utolsó 1 pontot kapja meg.*
Összesen:	**9 pont**	

7. a)		
Jelölje a_n az n-edik napon leúszott hosszat, méterben mérve. $a_1 = 10000 \cdot 1{,}1 \; (= 11000)$. $a_2 = a_1 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 \; (= 9900)$.	1 pont	
$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = 10000 \cdot 1{,}1^2 \cdot 0{,}9 (= 10890)$. $a_4 = a_3 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 (= 9801)$.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a 6. tagot ezek felírása nélkül is helyesen határozta meg.*
$a_5 = a_4 \cdot 1{,}1 = 10000 \cdot 1{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 (\approx 10781)$. $a_6 = a_5 \cdot 0{,}9 = 10000 \cdot 1{,}1^3 \cdot 0{,}9^3 (\approx 9703)$.	1 pont	
A hatodik napon kb. 9703 métert úszott.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b)		
A páratlan és a páros sorszámú napokon leúszott hosszak is egy-egy mértani sorozat első 10 tagját alkotják. A páratlan sorszámúaknak az első tagja 11 000, hányadosa 0,99, a páros sorszámúak első tagja 9 900, a hányadosa 0,99.	1 pont	*Ez az 1 pont akkor is jár, ha ez a gondolat a megoldás során jelenik csak meg.*
A páratlan sorszámú napokon: $S_{ptl} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{19} =$ $= 11000 + 11000 \cdot 0{,}99 + 11000 \cdot 0{,}99^2 + \ldots$ $\ldots + 11000 \cdot 0{,}99^9 =$	1 pont	*Ez az 1 pont akkor is jár, ha ez a gondolat a megoldás során jelenik csak meg.*
$= 11000 \cdot \frac{1-0{,}99^{10}}{1-0{,}99} (\approx 105\,179{,}7)$.	1 pont	
A páros sorszámú napokon: $S_{ps} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{20} =$ $= 9900 + 9900 \cdot 0{,}99 + 9900 \cdot 0{,}99^2 + \ldots$ $\ldots + 9900 \cdot 0{,}99^9 =$	1 pont*	*Ez az 1 pont akkor is jár, ha ez a gondolat a megoldás során jelenik csak meg.*
$= 9900 \cdot \frac{1-0{,}99^{10}}{1-0{,}99} (\approx 94\,661{,}7)$.	1 pont*	
Az első 20 napon kb. 199 841 métert úszott összesen.	1 pont	*A tízesekre kerekített jó eredményt is fogadjuk el.*
Összesen:	**6 pont**	

1.) A teljes pontszám akkor is jár, ha a vizsgázó valamennyi napra kiszámította a leúszott métereket, és ezek után összegzett, függetlenül attól, hogy a napi teljesítményeket kerekítette egész méterekre, vagy az összeadás után kerekített helyesen.
2.) Ha a vizsgázó úgy oldja meg, hogy az (a_n) sorozat két szomszédos tagjának összegéből képzett mértani sorozat első 10 tagját összegzi, akkor a következőképpen értékeljünk:
Az $a_1 + a_2$, $a_3 + a_4$, ... sorozat is mértani sorozat, amelynek az első tagja $11000 \cdot 1{,}9 = 20900$, hányadosa 0,99 (3 pont). A sorozat első 10 tagjának összege:

$$20900 + 20900 \cdot 0{,}99 + 20900 \cdot 0{,}99^2 + \ldots + 20900 \cdot 0{,}99^9 = 20900 \cdot \frac{1-0{,}99^{10}}{1-0{,}99} (\approx 199\,841)$$

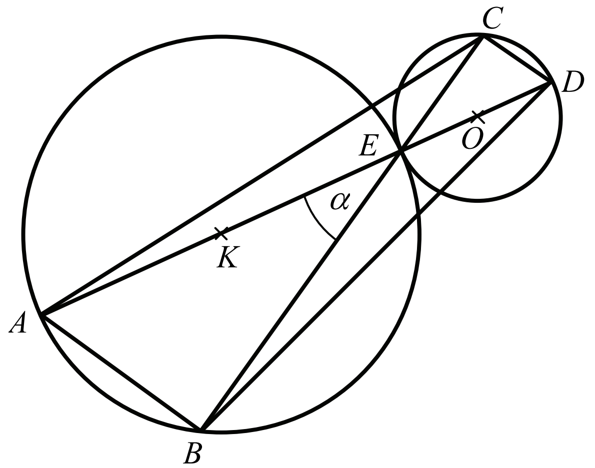
(2 pont), szöveges válasz (1 pont).
*3.) A *-gal jelzett pontokat a következő lépésekért is megkaphatja:*
$S_{ps} = 0{,}9 \cdot S_{ptl}$ *(1 pont),* $S_{ps} \approx 0{,}9 \cdot 105180 = 94662$ *(1 pont)*

7. c) első megoldás		
Az edzések húsz napja közül két szomszédos nap 19-féleképpen választható ki.	1 pont	
Ha két szomszédos nap során összességében nem teljesül a tervezett 20 000 méter, később sem fog, mert a kétnaponkénti összteljesítmény csökken.	1 pont	
(táblázat lent)	2 pont	*Egy vagy két számítási hiba esetén 1 pont jár.* *Következetes kerekítési értékekkel elkészített táblázat teljes pontszámot ér.*
A kedvező nappárok száma 9.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{9}{19}\left(\approx 0{,}474\right)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

napok sorszáma (n)	naponta leúszott táv (méterben) (a_n)	kétnapi össztáv ($b_n = a_n + a_{n+1}$)
1.	11000	20900
2.	9900	20790
3.	10890	20691
4.	9801	20582
5.	10781	20484
6.	9703	20376
7.	10673	20279
8.	9606	20172
9.	10566	20076
10.	9510	19971
11.	10461	

7. c) második megoldás		
A $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_2 + a_3$, ... , $b_n = a_n + a_{n+1}$ (ahol $n = 1,2,...,19$) összegeket kell vizsgálni.	1 pont	
(b_n) szigorúan csökkenő,	1 pont	
hiszen k paritásától függetlenül igaz, hogy $a_{k+1} = 0{,}99 \cdot a_{k-1}$ és $a_{k-1} > 0$, így $a_{k-1} + a_k > a_k + a_{k+1}$ (ahol $1 \le k-1$ és $k+1 \le 20$).	1 pont	
$b_9 = 20\ 076$ és $b_{10} = 19\ 971$,	1 pont	
így pontosan 9 esetben lesz a kétnapi teljesítmény legalább 20 000 m.	1 pont	
Miután bármely két szomszédos napot azonos eséllyel választhatjuk, így a keresett valószínűség: $\frac{9}{19}\left(\approx 0{,}474\right)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a)



Jó ábra.	1 pont	
Thalész tételéből adódóan:	1 pont	
$ABE\angle = DCE\angle = 90^\circ$.	1 pont	
Mivel AB és CD merőleges a BC egyenesre, ezért az $ABDC$ négyszögnek van párhuzamos oldalpárja, azaz trapéz.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. b)

Az ABE derékszögű háromszögben $BE = 2R\cos\alpha$,	1 pont	
és $AB = 2R\sin\alpha$.	1 pont	
A DCE derékszögű háromszögben $EC = 2r\cos\alpha$.	1 pont	
Így $BC = 2R\cos\alpha + 2r\cos\alpha = 2(r+R)\cos\alpha$.	1 pont	
Mivel az $ABC\angle$ derékszög,	1 pont	
így $T_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot (BE + EC)}{2}$.	1 pont	
Így $T_{ABC} = 2R(r+R)\sin\alpha\cos\alpha = R(r+R)\sin 2\alpha$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. c) első megoldás		
Mivel $T_{ABC} = R(r+R)\sin 2\alpha$ (és $R(r+R)$ pozitív),	1 pont	
ezért T_{ABC} akkor maximális, ha $\sin 2\alpha = 1$,	2 pont	
azaz $\alpha = 45^\circ$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

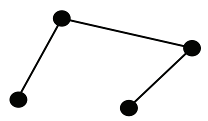
8. c) második megoldás		
(Mivel $T_{ABC} = T_{ABE} + T_{AEC}$, a terület maximumát tagonként fogjuk keresni.) T_{ABE} akkor maximális, ha az adott hosszúságú AE átfogóhoz tartozó magasság a legnagyobb, azaz mikor KB merőleges AE-re.	2 pont	
T_{AEC} akkor maximális, ha az adott AE-hez tartozó magasság a legnagyobb, azaz ha OC merőleges ED-re.	1 pont	
Mindkét esetben $\alpha = 45^\circ$ esetén valósul meg a maximum, (ekkor a B, E és C pontok egy egyenesre esnek), így az ABC háromszög területe is ekkor lesz maximális.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. c) harmadik megoldás		
Adott r és R esetén a $T_{ABC}(\alpha) = 2R(r+R)\sin\alpha\cos\alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) függvény deriváltja: $T'_{ABC}(\alpha) = 2R(r+R)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.	1 pont	
$2R(r+R)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$ megoldását keressük.	1 pont	
Mivel α hegyesszög, így $\cos\alpha = \sin\alpha$, azaz $\alpha = \frac{\pi}{4}$.	1 pont	
Mivel $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ esetén a derivált függvény értéke pozitív, míg $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén negatív, ezért $\alpha = \frac{\pi}{4}$ esetén maximális a terület.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. a)		
Minden fiú öt lehetőség közül választhat,	1 pont	
ez együtt 5^3 lehetőség;	1 pont	
minden lány négy lehetőség közül választhat,	1 pont	
ez együtt 4^2 lehetőség.	1 pont	
(A választásuk független egymástól, így) az elhelyezkedési lehetőségek száma: $5^3 \cdot 4^2 =$	2 pont	
$= 2000$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b)		
A három fiú az öt helyre összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$-féleképpen helyezkedhet el.	1 pont	
A két lány a négy helyre $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen helyezkedhet el.	1 pont	
(A fiúk és a lányok választása független egymástól, így) az összes elhelyezkedések száma: $60 \cdot 12 = 720$	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Ha az a) és b) kérdés bármelyikénél hibás modellt használ (például felcseréli az ismétléses és az ismétlés nélküli variációt), akkor annak a kérdésnek a megoldására nem kaphat pontot.

9. c)		
		*A feltételeknek megfelelő partik gráfja. (A megoldásban a gráf felrajzolását nem követeljük meg.)*
A körmérkőzésen két mérkőzést játszók kiválasztása $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen lehet.	2 pont	
A két-két mérkőzést játszó bármelyik diák két személy közül választhatja az egy mérkőzést játszó társát.	2 pont	
Ezért összesen $6 \cdot 2 = 12$ párosítás lehetséges.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	