ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2009. október 20.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

OKTATÁSI ÉS KULTURÁLIS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

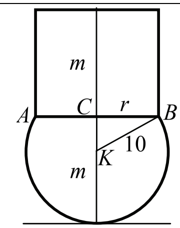
1. a)		
Az $0{,}5^{2-\log_{0,5} x} = 3$ egyenletben a hatványozás megfelelő azonosságát alkalmazva, az $\dfrac{0{,}5^2}{0{,}5^{\log_{0,5} x}} = 3$ egyenlethez jutunk.	1 pont	
Innen (a logaritmus definíciója szerint) a $\dfrac{0{,}5^2}{x} = 3$ egyenlet adódik.	2 pont	
Ebből $x = \dfrac{1}{12}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
Mivel $\log_x \dfrac{1}{2} = \dfrac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 x} = -\dfrac{1}{\log_2 x}$,	1 pont	
így a megoldandó egyenlet: $7 - \dfrac{6}{\log_2 x} = \log_2 x$.	1 pont	
Mindkét oldalt $\log_2 x$-szel szorozva, és az egyenletet nullára redukálva: $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 6 = 0$.	1 pont	
A $\log_2 x$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\log_2 x = 6$ vagy $\log_2 x = 1$.	1 pont	
$x = 64$ vagy $x = 2$.	1 pont	
Mivel $1 < x \le 2$, a 64 nem megoldás.	1 pont	
A megadott halmazon az egyenletnek egy megoldása van, a 2.	1 pont	*Ha az alaphalmazt nem veszi figyelembe, akkor 1 pontot veszít.*
Összesen:	**7 pont**	

2. a) első megoldás		
Jelöljük az $ABCD$ négyszög derékszögű csúcsát A-val, és legyen a $BCD_\angle = 120^\circ$. Ekkor $AB = AD = 20$. Pitagorasz tételét alkalmazva az ABD derékszögű háromszögre, $BD = 20\sqrt{2}$.	1 pont	
A BCD háromszög BD oldalára alkalmazva a koszinusztételt ($BC = CD = b$ jelölés mellett), $800 = 2b^2 - 2b^2\cos 120^\circ$.	1 pont	
$800 = 2b^2 + b^2$. A $3b^2 = 800$ egyenlet egyetlen pozitív megoldása: $b = \sqrt{\frac{800}{3}}$ ($\approx 16{,}33$ m).	1 pont	
Tehát a kerítés hossza: $40 + 2\cdot\sqrt{\frac{800}{3}} \approx 72{,}7$ (m).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. a) második megoldás		
$BD = 20\sqrt{2}$	1 pont	
A BDC egyenlő szárú háromszögben a $BDC\angle = 30^\circ$. A háromszög C csúcsából húzott magasság felezi a DB alapot (Jelölje F a DB oldal felezőpontját.). A DFC derékszögű háromszögben $\cos 30^\circ = \frac{DF}{DC}$.	1 pont	
Így $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{b}$, azaz $b = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
Tehát a kerítés hossza: $40 + \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 72{,}7\,(m)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

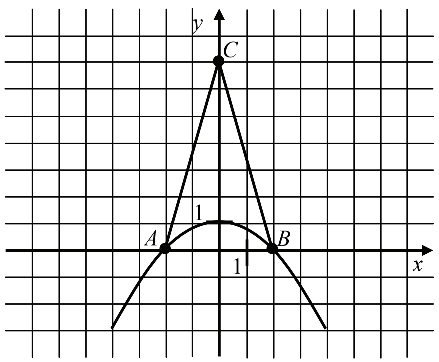
9.



A KBC derékszögű háromszög befogóinak hossza $m-10$ és r, átfogója 10 cm.	2 pont	
Alkalmazzuk Pitagorasz tételét a KBC háromszögre: $(m-10)^2 + r^2 = 100$	2 pont	
Ebből $r^2 = 20m - m^2$.	1 pont	
A váza térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m\cdot(3r^2 + m^2) + r^2\pi m$.	1 pont	
A váza térfogata m függvényében: $V(m) = \frac{\pi}{6} m\cdot\left[3(20m - m^2) + m^2\right] + \pi(20m - m^2)m$,	2 pont	
azaz $V(m) = \pi\left(-\frac{4}{3}m^3 + 30m^2\right) = \frac{2\pi}{3}\left(45m^2 - 2m^3\right)$,	1 pont	
ahol $10 < m < 20$.	1 pont	
A V függvény differenciálható a $]10;20[$ nyílt intervallumon, s a deriváltja: $V'(m) = \pi(-4m^2 + 60m) = 4\pi(15 - m)m$. A $]10;20[$ nyílt intervallumon $V'(m) = 0$ pontosan akkor, ha $m = 15$.	2 pont	
(táblázat alább)	3 pont	
Az $m = 15$ a V függvény abszolút maximum helye is, így ekkor lesz a váza térfogata a lehető legnagyobb. ($V_{max} = 2250\pi \approx 7069\,(\text{cm}^3)$)	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

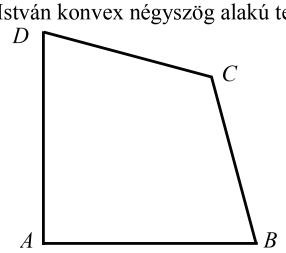
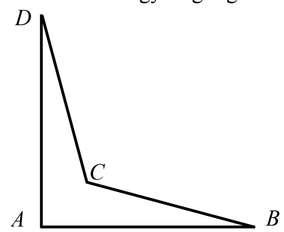
	$10 < m < 15$	$m = 15$	$15 < m < 20$
$V'(m)$	pozitív	$= 0$	negatív
V	Szigorúan növő	Helyi maximum	Szigorúan csökkenő

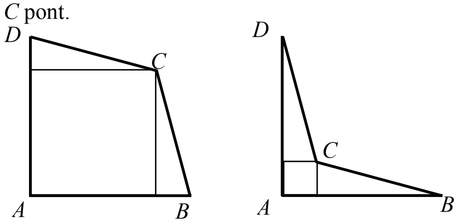
8. c)



Az ABC háromszög területe: $\frac{AB \cdot m_c}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$.	1 pont	
A parabola két részre osztja a háromszöget.	1 pont	*Ha a gondolatot jól használja, jár a pont.*
A kisebbik rész területének fele a szimmetria miatt: $\int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx = \frac{4}{3}$.	2 pont	
A háromszögnek a parabolaív alá eső területe: $\frac{8}{3}$ (területegység).	1 pont	
A háromszögnek a parabolaív fölé eső területe: $14 - \frac{8}{3} = \frac{34}{3}$ $(\approx 11{,}33)$ (területegység).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. b)

István konvex négyszög alakú telket látott. 	1 pont	
Péter konkáv négyszögre gondolt. 	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	*A pont a konvex, illetve konkáv négyszög rajzolásáért jár. Ne vonjunk le pontot, ha egyéb feltételeknek (pl. két-két oldala nem egyenlő) nem tesz eleget a vizsgázó rajza.*

2. c) első megoldás		
A négyzet alapú ház alapterülete akkor a lehető legnagyobb, ha a négyzet A-val szembeni csúcsa a C pont.  Az $ABCD$ négyszögbe berajzolva a négyzetet, az a négyszögben két egybevágó derékszögű háromszöget hoz létre.	2 pont	*Ezt a megállapítást indoklás nélkül el kell fogadni. Ha csak a vizsgázó ábráján jelenik meg ez a gondolat, akkor is jár a pont. A lehető legnagyobb négyzetek megtalálása 1–1 pont.*
Jelölje T a C csúcsból húzott, AD oldalra merőleges egyenesnek és az AD oldalnak a metszéspontját. Ekkor TC a keresett négyzet oldala. István konvex négyszögében $TCD\angle = 15^\circ$.	1 pont	
A TCD derékszögű háromszögben: $\cos 15^\circ = \frac{CT}{b}$.	1 pont	
Mivel $b = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, így $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 15^\circ \approx 15{,}77$ (m). Ekkor a ház alapterülete: kb. 249 m^2 lenne.	1 pont	
Péter konkáv négyszöge esetében $TCD\angle = 75^\circ$. Mivel ekkor $\cos 75^\circ = \frac{CT}{b}$,	1 pont	
így $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 75^\circ \approx 4{,}23$ (m). Ekkor a ház alapterülete: kb. 18 m^2 lenne.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. a)		
A keresett két csúcs rajta van a C középpontú $\sqrt{53}$ egység sugarú körön. A kör egyenlete: $x^2 + (y-7)^2 = 53$.	1 pont	
A keresett pontokat a következő egyenletrendszer megoldása adja: $\left.\begin{matrix} y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \\ x^2 + (y-7)^2 = 53 \end{matrix}\right\}$	1 pont	
Az első egyenlet átalakításával: $x^2 = -4y + 4$. Az x^2 kifejezését behelyettesítve a második egyenletbe, kapjuk, hogy $y^2 - 18y = 0$.	1 pont	
Innen $y_1 = 0$ és $y_2 = 18$.	1 pont	
Ezek közül csak az $y_1 = 0$ ad megoldást.	1 pont	
Behelyettesítve az első egyenletbe: $x^2 = 4$. Innen $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. A keresett két pont: $A(-2;0)$ és $B(2;0)$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. b)		
A BC egyenes egyenlete: $7x + 2y = 14$.	1 pont	*Az AC egyenes egyenlete* $7x - 2y = -14$.
A D pont koordinátáit a $7x + 2y = 14$ és a $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ görbék B-től különböző metszéspontjai adják.	1 pont	
$7x - \frac{1}{2}x^2 = 12$ gyökei: $x_1 = 2$; $x_2 = 12$.	1 pont	$7x + \frac{1}{2}x^2 = -12$ $x_1 = -2$; $x_2 = -12$.
$D(12;-35)$.	1 pont	$D(-12;-35)$
Összesen:	**4 pont**	

7. a) első megoldás

Ha a 8 fős társaság minden tagja mindenkivel beszélt volna egy alkalommal, akkor $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ telefonbeszélgetést folytattak volna le csütörtökön.	2 pont	
Az azonos nemzetiségűek egymással nem beszéltek, tehát a három német összesen 3-mal kevesebb,	1 pont	
míg a négy magyar meghívott összesen $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ -tal kevesebb beszélgetést folytatott le.	1 pont	
Mindezek alapján a csütörtöki beszélgetések száma $28-(3+6)=19$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

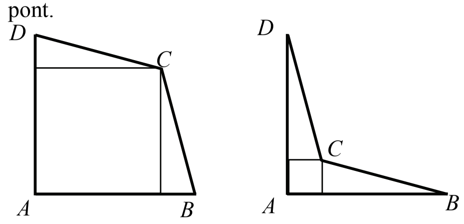
7. a) második megoldás

A házigazda 7 beszélgetést folytatott.	1 pont	
Mind a 3 német vendég 5-5 alkalommal telefonált, mert a 2 német társával nem beszélt.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a gondolat nem ennyire részletező, és pl. csak egy rajzban fokszámként jelenik meg*
Mind a 4 magyar meghívott 4-4 beszélgetést folytatott, mert 3 magyar társával nem beszélt.	1 pont	
Az egyénenként összeszámolt beszélgetések összege a társaság beszélgetései számának kétszerese, mert minden beszélgetést 2-2 embernél számoltunk meg.	1 pont	
Mindezek alapján a csütörtöki beszélgetések száma $\frac{7+3\cdot 5+4\cdot 4}{2}=\frac{38}{2}=19$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. b)

Legyen p az a valószínűség, amit mindannyian mondtak. Mivel egymástól függetlenül döntöttek,	1 pont	
annak a valószínűsége, hogy mindenki elmegy $p^7=0{,}028$.	2 pont	
Innen $p=\sqrt[7]{0{,}028}\approx 0{,}600$.	2 pont	
Annak a valószínűsége, hogy valaki nem megy el: $1-p$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy senki sem megy el: $(1-p)^7$ ($\approx 0{,}4^7\approx 0{,}0016$).	2 pont	
Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy elmegy $1-(1-p)^7$,	2 pont	
ami közelítőleg 0,998.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

2. c) második megoldás

A négyzet alapú ház alapterülete akkor a lehető legnagyobb, ha a négyzet A-val szembeni csúcsa a C pont.  Az $ABCD$ négyszögbe berajzolva a négyzetet, az a négyszögben két egybevágó derékszögű háromszöget hoz létre.	2 pont	*Ezt a megállapítást indoklás nélkül el kell fogadni. Ha csak a vizsgázó ábráján jelenik meg ez a gondolat, akkor is jár a pont. A lehető legnagyobb négyzetek megtalálása 1-1 pont.*
A ház négyzet alapjának oldalhosszát x-szel jelölve, Pitagorasz tétele szerint mindkét esetben $(20-x)^2+x^2=\frac{800}{3}$.	1 pont	
A kijelölt műveletek elvégzése után a $2x^2-40x+\frac{400}{3}=0$, azaz $x^2-20x+\frac{200}{3}=0$ egyenlethez jutunk.	1 pont	
Az egyenlet két pozitív megoldása: $x=10+\frac{10}{\sqrt{3}}\approx 15{,}77$ és $x=10-\frac{10}{\sqrt{3}}\approx 4{,}23$.	1 pont	
A konvex négyszög esetében $x>20-x$, azaz $x>10$, így ekkor a négyzet oldala 15,77 m, ekkor a ház alapterülete: kb. 249 m^2 lenne.	1 pont	*Ezek a pontok, akkor is járnak, ha indoklás nélkül adja meg egyik és másik esetben a négyzet oldalát, illetve területét.*
A konkáv négyszög esetében $x<20-x$, azaz $x<10$, így ekkor a négyzet oldala 4,23 m, ekkor a ház alapterülete: kb. 18 m^2 lenne.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a)

$\mathbf{a}\left(\cos\frac{5\pi}{6};\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\mathbf{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.	1 pont	
$\mathbf{b}\left(\sin^2\frac{5\pi}{6};\cos^2\frac{5\pi}{6}\right)=\mathbf{b}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3. b) első megoldás

Jelöljük a két vektor által bezárt szöget α -val. A koordinátáival adott vektorok skaláris szorzata kétféleképpen is kiszámítható: $\mathbf{ab}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$,	1 pont	
illetve $\mathbf{ab}=\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\alpha$.	1 pont	
Mivel $\lvert\mathbf{a}\rvert=1$ és $\lvert\mathbf{b}\rvert=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$,	1 pont	
Ezért $\frac{\sqrt{10}}{4}\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$, ebből $\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\approx 0{,}2005$.	1 pont	
Innen $\alpha\approx 78{,}43^\circ$. Tehát a két vektor ebben az esetben kb. 78° -os szöget zár be.	1 pont	*Ezt a pontot csak akkor adjuk meg, ha a vizsgázó a kért szöget egészre kerekítve is megadja.*
Összesen:	**5 pont**	

3. b) második megoldás

Az **a** vektor az **i** bázisvektor $+150^\circ$ -os elforgatottja.	1 pont	
A $\mathbf{b}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ vektor irányszöge β, $tg\beta=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$.	2 pont	
Ebből $\beta\approx 71{,}57^\circ$.	1 pont	
Így a két vektor által bezárt α szögre $\alpha=150^\circ-\beta\approx 78{,}43^\circ$ adódik. A két vektor tehát kb. 78° -os szöget zár be.	1 pont	*Ezt a pontot csak akkor adjuk meg, ha a vizsgázó a kért szöget egészre kerekítve is megadja.*
Összesen:	**5 pont**	

6. b)

Ha a palackban a tömény ecet mennyisége *a*, a tiszta vízé *b* (liter), Kázmér kalkulációja alapján egy palack ára: $1{,}2\cdot(500a+10b+30)$ forint, ami	2 pont	
a 10%-os palack esetében $1{,}2\cdot(500\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}9+30)\approx 107$ Ft;	1 pont	
a 15%-os palack esetében $1{,}2\cdot(500\cdot 0{,}15+10\cdot 0{,}85+30)\approx 136$ Ft;	1 pont	
a 20%-os palack esetében $1{,}2\cdot(500\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}8+30)\approx 166$ Ft.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. c)

Kázmér kalkulációja alapján a kereskedelmi árrés nélkül megállapított árak a 10%-os palack esetében 120 Ft, a 15%-os palackra 125 Ft a 20%-ra pedig 130 Ft.	2 pont	
Jelölje a palack árát forintban *p*, a tömény ecet literjének árát *t* és a víz literjének árát *v*. Felírhatók az alábbi egyenletek: (1) $p+0{,}1\cdot t+0{,}9\cdot v=120$ (2) $p+0{,}15\cdot t+0{,}85\cdot v=125$ (3) $p+0{,}2\cdot t+0{,}8\cdot v=130$	2 pont	*Két helyes egyenlet felírásáért 1 pont jár.*
A (2)-(1) egyenletekből kaphatjuk, hogy: $0{,}05\cdot t-0{,}05\cdot v=5$ (vagy pl. $t-v=100$).	1 pont	
Ugyanezt az összefüggést kaphatjuk a (3)-(2) egyenletekből is.	1 pont	
A három egyenlet tehát nem független egymástól. A *p*, *t* és *v* egyértelmű értékének megállapítása ezekből az adatokból nem lehetséges.	2 pont	*Ha a helyes következtetés levonása elmarad, ez a 2 pont nem jár.*
Összesen:	**8 pont**	
Ha megad két olyan pozitív számokból álló különböző számhármast, amelyből ezek az árak kalkulálhatók és ezt be is mutatja, akkor is jár a teljes pontszám.		

5. b)

A háromjegyű szám minden számjegye 5 vagy 6 lehet csak.	1 pont	
Minden számjegy 2-féleképpen választható meg, tehát $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ilyen különböző háromjegyű szám van.	1 pont	
Mivel a társaság minden tagja különböző számot mondott, így legfeljebb 8 tagú lehet a társaság.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. c)

A feladat szerint Barbara, Bea, Bori és Balázs vagy az 1, 3, 5 és 7-es számú székeken, vagy a 2, 4, 6 és 8-as számú székeken foglalnak helyet, és mindkét esetben a maradék 4 helyre a 4 barát ül le.	1 pont	
Az első esetben az adott 4 helyre Barbara, Bea, Bori és Balázs 4!-féleképpen helyezkedhet el.	1 pont	
Barbara, Bea, Bori és Balázs bármelyik elhelyezkedése esetén a maradék 4 helyre a 4 barát szintén 4!-féleképpen foglalhat helyet.	1 pont	
Így az első esetben a 8 embernek $4!\cdot 4! (= 576)$ -féle ülésrendje alakulhat ki.	1 pont	
A második esetben is ugyanennyi, ezért a 8 embernek összesen $2 \cdot 4!\cdot 4! (= 1152)$ ülésrendje alakulhat ki.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. d)

A 8 ember összes ülésrendjének száma: $8! (= 40320)$.	1 pont	
Mivel bármelyik ülésrend egyenlően valószínű, a kérdéses valószínűség: $p = \frac{2 \cdot 4!\cdot 4!}{8!} = \frac{1152}{40320} = \frac{1}{35} (\approx 0{,}0286)$.	2 pont	*Ha a c) rész rossz eredményével jól számol, akkor is jár a 2 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

6. a)

A 12 liter 10%-os ecet tömény tartalma: 1,2 liter; a 8 liter 15%-os eceté is 1,2 liter, az 5 liter 20%-os eceté pedig 1 liter.	1 pont	
Az összeöntés utáni 25 liter keverékben a tömény ecet: 3,4 liter.	1 pont	
Ezért a keverék $\frac{3{,}4}{25} = \frac{13{,}6}{100} = 13{,}6\%$ -os.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c)

A két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha $\mathbf{ab} = 0$.	1 pont	
A keresett t ismeretlent a szokásosabb módon x jelöli. Mivel $\mathbf{ab} = \cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x$, így a $\cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x = 0$ egyenlet megoldása a feladat. Azonos átalakítással adódik: $\cos x \sin x (\sin x + \cos x) = 0$.	1 pont	
Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha $\cos x = 0$ vagy $\sin x = 0$ vagy $\sin x + \cos x = 0$.	1 pont	
(1) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$ vagy	1 pont*	
(2) $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$ vagy	1 pont*	
(3) $\sin x + \cos x = 0$. A **(3)** alatti egyenletnek nem megoldásai azok az x számok, amelyek koszinusza 0, így az egyenlet megoldáshalmaza azonos a $\operatorname{tg} x = -1$ egyenletével.	1 pont	
Azaz $x = \frac{3\pi}{4} + m\pi$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.	1 pont*	
A két vektor tehát pontosan akkor merőleges egymásra, ha $t = n \cdot \frac{\pi}{2}$ vagy $t = \frac{3\pi}{4} + m\pi$, ahol $n, m \in \mathbf{Z}$.		*A megoldások összevont alakjának megadását nem várjuk el.*
Összesen:	**7 pont**	

*1. A *-gal jelölt pontok abban az esetben is járnak, ha a megoldásokat a vizsgázó fokban adja meg. Ha hiányzik, vagy rossz a periódus, ezek a pontok nem adhatók.*
*2. A *-gal jelölt 3 pontból csak 1-et vonjunk le, ha az n, m és k lehetséges értékére a vizsgázó nem ad utalást.*
*3. Ha a vizsgázó elveszti az **(1)** vagy **(2)** alatti megoldásokat, a **c)** részre maximum 4 pontot kaphat.*

4. a)

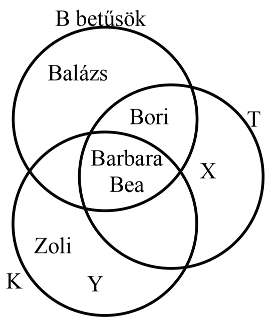
Felírva a hatodik elemeket az első elem és a kvóciens (q), illetve a differencia (d) segítségével kapjuk, hogy $q = -1$;	1 pont	
$d = -\frac{2}{5}$.	1 pont	
A mértani sorozat első öt eleme: $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1$.	1 pont	
A számtani sorozat első öt eleme: $1;\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{5};\ -\frac{1}{5};\ -\frac{3}{5}$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

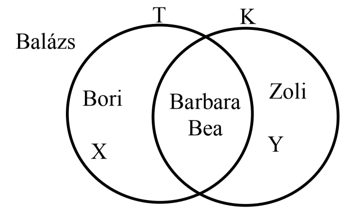
4. b) első megoldás		
A mértani sorozat első n tagjának összege: $S_n = 1 \cdot \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \begin{cases} 0, \text{ ha } n \text{ páros} \\ 1, \text{ ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$	2 pont	*A képlet felírásáért 1 pont, a szétválasztásáért 1 pont.*
A számtani sorozat n-edik tagja: $b_n = 1 - \frac{2}{5}(n-1)$.	1 pont	
A számtani sorozat első n tagjának összege: $s_n = \frac{2 - \frac{2}{5}(n-1)}{2} \cdot n$, azaz $s_n = \frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2$.	1 pont	
$s_n = 0$, azaz a $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív egész megoldása van, az n = 6.	2 pont	
$s_n = 1$, tehát $\frac{6}{5}n - \frac{1}{5}n^2 = 1$, azaz $n^2 - 6n + 5 = 0$ egyenlet megoldásai: $n = 1$ vagy $n = 5$.	2 pont	
Tehát a két sorozat első 1, vagy első 5, vagy első 6 tagjának összege ugyanakkora.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

4. b) második megoldás		
Az a) rész megoldása alapján észrevehető, hogy $S_1 = s_1$; azaz n = 1.	1 pont	
$S_5 = s_5$; azaz n = 5.	2 pont	
$S_6 = s_6$; azaz n = 6.	2 pont	
Az első hat tagnál több tag összege nem lehet egyenlő a két sorozatnál, mivel a számtani sorozat csökkenő (már a negyedik tag negatív), és az első hat tag összege 0.	2 pont	
Így $s_n < 0$, ha $6 < n$, ugyanakkor $S_n = 0$ vagy 1, tehát nem lehet $s_n = S_n$.	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

II.

5. a) első megoldás





Jelölje T a teniszezők, K a kerékpározók halmazát a Kovács családon belül.

A vizsgázó a halmazok Venn-diagramjába jól helyezi el Barbarát, Balázst, Beát, Borit.	1 pont	
Zoli elhelyezése.	1 pont	
A vizsgázó a T halmazban jól jelöl ki egy újabb családtagot;	1 pont	
a K halmazban is bejelöl egy újabb családtagot.	1 pont	
A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van.	1 pont	*Hibás válasz esetén ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

5. a) második megoldás		
Jelöljük B-vel a család azon tagjainak halmazát, akiknek a keresztneve B betűvel kezdődik, T-vel a teniszezők, K-val a kerékpározók halmazát. A szöveg szerint: $B = \{\text{Barbara, Bea, Bori, Balázs}\}$. Balázs nem eleme T-nek és K-nak sem. $B \cap T \cap K = \{\text{Barbara, Bea}\}$. $T \cap K = \{\text{Barbara, Bea}\}$.	1 pont	
Bori $\in B \cap T$, és Zoli $\in K$.	1 pont	
$\lvert T \rvert = \lvert K \rvert = 4$. Vagyis a T halmazban a három B betűs családtagon kívül van – a szövegben nem nevesített – családtag, jelöljük őt X-szel. $T = \{\text{Barbara, Bea, Bori, X}\}$.	1 pont	
A K halmazban is van még egy családtag a három – a szövegben is nevesített – családtagon kívül, jelöljük őt Y-nal: $K = \{\text{Barbara, Bea, Zoli, Y}\}$.	1 pont	
A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van.	1 pont	*Hibás válasz esetén ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	