ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2011. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

9. b)		
Az alapkocka térfogata: $V_k = 27\ \text{cm}^3$.	1 pont	
A gyártás során ennek a kockának minden csúcsából egy olyan (derékszögű) tetraédert vágnak le, amelynek három lapja egybevágó, 1 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög, és ezek a lapok páronként merőlegesek egymásra.	2 pont	*Ez a 2 pont világos rajz esetén akkor adható, ha arról leolvashatók az adatok is.*
Ezen lapok közül bármelyiket alaplapnak tekintve a tetraéder magassága 1 cm.	1 pont	
A 8 csúcsnál levágott tetraéderek térfogatának összege: $V = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ (cm^3).	1 pont	
A visszamaradó test térfogata: $V_k - V = 25\frac{2}{3}\left(= \frac{77}{3}\text{cm}^3\right)$.	1 pont	
Így $\frac{V_k - V}{V_k} = \frac{77}{81} \approx 95\%$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

I.

1. a) első megoldás		
Az f függvény egy negatív főegyütthatós másodfokú függvénynek egy zárt intervallumra vett leszűkítése. Grafikonja egy lefelé nyitott parabolának egy íve.	1 pont	
Teljes négyzetté kiegészítéssel $-x^2 - 2x + 3 \equiv -(x+1)^2 + 4$.	1 pont	
A (–1;4) pont a parabola tengelypontja, amely a függvény grafikonjának is pontja.	1 pont	
Tehát f a $[-2; -1]$ intervallumon szigorúan monoton növő, a $[-1; 5]$ intervallumon pedig szigorúan monoton fogyó.	1 pont	
Az eddigiekből következik, hogy a (–1) maximumhelye *f*-nek és a maximum értéke 4.	1 pont	
A minimum a zárt intervallum két határának valamelyikénél lehet: $f(-2) = 3$, $f(5) = -32$.	1 pont	
Az f függvény minimumhelye az 5, a minimum értéke $f(5) = -32$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

<u>Megjegyzések</u>:
1. *Ha a megoldást grafikonkészítéssel kezdi, és arról helyesen olvassa le a monotonitási viszonyokat és a szélsőértékeket, akkor jár a 7 pont, ha a grafikon helyességét indokolja.*
2. *Ha hibás grafikonról olvassa le jól a kért értékeket, akkor a jó leolvasásért 3 pontot kapjon (monotonitás 1 + szélsőértékek 2)!*
3. *A monotonitási tartományokhoz hozzászámíthatjuk az $x = -1$ értéket, vagy ki is zárhatjuk azt. Mindkét változatot fogadjuk el helyes válasznak!*

1. a) második megoldás		
A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -x^2 - 2x + 3$ függvény derivált függvénye: $x \mapsto -2x - 2$.	1 pont	
Ahol a derivált függvény pozitív, ott az eredeti függvény szigorúan monoton növő, ahol negatív, ott szigorúan monoton fogyó.	1 pont	
$-2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ és $-2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x > -1$.	1 pont	
A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -x^2 - 2x + 3$ függvényből leszűkítéssel kapott f függvény tehát a $[-2; -1[$ intervallumon szigorúan monoton növő, a $]-1; 5]$ intervallumon pedig szigorúan monoton fogyó.	1 pont	
Az eddigiekből következik, hogy a (–1) maximumhelye *f*-nek és a maximum értéke 4.	1 pont	
A minimum a zárt intervallum két határának valamelyikénél lehet: $f(-2) = 3$, $f(5) = -32$.	1 pont	
Az f függvény minimumhelye az 5, a minimum értéke $f(5) = -32$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	
Megjegyzés: *A monotonitási tartományokhoz hozzászámíthatjuk az $x = -1$ értéket, vagy ki is zárhatjuk azt. Mindkét változatot fogadjuk el helyes válasznak!*		

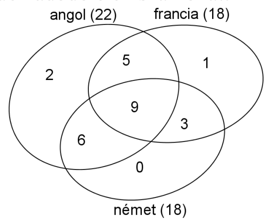
1. b)		
Az $\dfrac{1}{\lg(x^2 + 2x - 3) - \lg 5}$ kifejezés akkor értelmezhető, ha $x^2 + 2x - 3 > 0$, és	1 pont	
$\lg(x^2 + 2x - 3) \neq \lg 5$.	1 pont	
Az egyenlőtlenség megoldása a valós számok halmazán: $x < -3$ vagy $x > 1$,	1 pont	
de $-2 \le x \le 5$, így az $1 < x \le 5$ feltételnek kell teljesülnie.	1 pont	
A $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg 5$ pontosan akkor teljesül, ha $x^2 + 2x - 3 = 5$.	1 pont	
Ennek valós megoldásai a – 4 és a 2.	1 pont	
Tehát azon *x* valós számokra értelmezhető a kifejezés, amelyekre $1 < x \le 5$ és $x \neq 2$ teljesül.	1 pont	*Bármilyen formában megadott helyes válasz 1 pontot ér. Például:* $]1; 2[\cup]2; 5]$ *vagy* $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x \le 5,\ x \neq 2\}$.
Összesen:	**7 pont**	

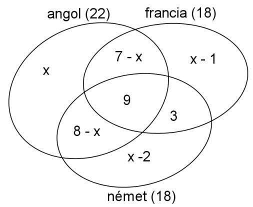
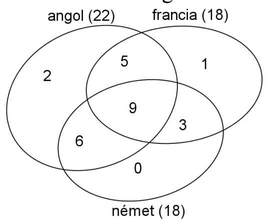
9. a)		
Az üzem napi haszna *n* darab készlet gyártása esetén: $h(n) = 18n - 0{,}2 \cdot n^{1,5} - 12n - 300 =$	1 pont	
$= -0{,}2 \cdot n^{1,5} + 6n - 300$.	1 pont	
Az $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $f(x) = -0{,}2 \cdot x^{1,5} + 6x - 300$ függvény deriválható és $f'(x) = -0{,}3 \cdot x^{0,5} + 6$.	1 pont	*Ha a h függvény deriváltját képezi, ez a pont nem jár.*
Az f szélsőértékének létezéséhez szükséges, hogy $f'(x) = 0$ teljesüljön.	1 pont	
$-0{,}3 \cdot x^{0,5} + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 400$.	1 pont	
Mivel $f''(x) = -0{,}15 \cdot x^{-0,5} = -\dfrac{0{,}15}{\sqrt{x}} < 0$,	1 pont	*Ha a vizsgázó a maximumot azzal indokolja, hogy az első derivált az $x = 400$ környezetében előjelet vált (pozitívból negatívba megy át), ez a 2 pont jár.*
ezért $x = 400$ esetén a napi haszon maximális, hiszen f maximumhelye egyben *h* maximumhelye is (mert a 400 eleme a *h* értelmezési tartományának is).	1 pont	
Napi 400 építőkészlet gyártása esetén lesz a haszon maximális.	1 pont	
A maximális haszon: $h(400) = -0{,}2 \cdot 400^{1,5} + 6 \cdot 400 - 300 = 500$ (euró).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

8. b) harmadik megoldás		
A megoldás során kihasználjuk, hogy tized méterre (egész deciméterre) kerekítve kell megadni az eredményt.		
A megépített kerítés hossza legalább $\sqrt{30^2+12^2}$ 32,3 m és legfeljebb EF≈36,1 m.	2 pont	
Zoli a kerítésre legalább $32{,}3\cdot 15\,000 = 484\,500$ Ft-ot, legfeljebb $36{,}1\cdot 15\,000 = 541\,500$ Ft-ot költött.	1 pont	
A kerítésre költött összeg legalább 16,15 m^2, de legfeljebb 18,05 m^2 területű telekrész értékével egyezik meg.	1 pont	
A $FG=x$ jelöléssel: ha $\frac{x\cdot 30}{2} > 18{,}05$, akkor Zoli biztosan jobban járt.	1 pont	
Ebből (a kerekítésre való tekintettel) az adódik, hogy $x \geq 1{,}3$ (m).	1 pont	
A 16,15 m^2-hez tartozó FG távolság: $\frac{2\cdot 16{,}15}{30}$ 1,08 (m). (A monotonitás miatt minden ennél kisebb x esetén Zoli rosszabbul jár.)	1 pont	
Azt kell már csak megvizsgálni, hogy az 1,1 m, illetve az 1,2 m hosszú FG szakasz esetén jól járhatott-e Zoli.	1 pont	
(table below)	2 pont	
Látható, hogy FG=1,2 m is előnyös Zolinak.	1 pont	
Összefoglalva: ha FG legalább 1,2 m (és legfeljebb 8 m), akkor Zoli jól járt a kerítés megépítésével.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

FG (m)	1,1	1,2
kerítés költsége (Ft)	531 857	531 059
telekrész értéke (Ft)	495 000	540 000
egyenleg Zoli szempontjából (Ft)	–36 857	+8941

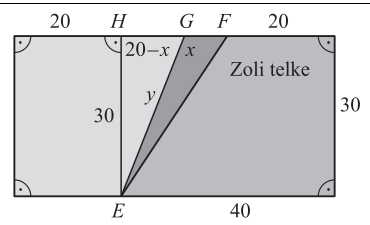
2. a)		
A német és francia vizsgával rendelkező 12 hallgató közül 12 – 3 = 9-nek van angol vizsgája is.	1 pont	
Mindhárom kérdésre 9-en válaszoltak igennel.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. b) első megoldás		
A 22 angol nyelvvizsgás közül 22 – 9 = 13 főnek van egy vagy két nyelvvizsgája.	1 pont	
Tehát 13 hallgató tartozik az angol nyelvvizsgával rendelkezők közül a német vagy francia nyelvvizsgával nem rendelkezők halmazainak uniójába.	1 pont	
Ezen halmazok elemszáma külön-külön 7 illetve 8, az unió elemszáma 13. A két halmaz közös részébe tehát 15 – 13 = 2 elem tartozik. A közös részbe pedig a csakis angol vizsgával rendelkező hallgatók tartoznak.	2 pont	
Ezek alapján beírhatjuk az alábbi halmazábrába az egyértelműen adódó elemszámokat: 	3 pont	
A három nyelvvizsga közül legalább eggyel rendelkezők száma 22 + 3 + 1 = 26.	1 pont	
Mindhárom kérdésre nemmel (29 – 26 =) 3 fő válaszolt.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

2. b) második megoldás		
Jelöljük x-szel a csak angol nyelvvizsgával rendelkező hallgatók számát.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
Ezzel a jelöléssel a következő Venn-diagramot hozhatjuk létre: 	3 pont	*A 3 pont az „angol” halmaz helyes kitöltéséért jár.*
Az angol nyelvvizsgával rendelkezők száma 22, tehát $24 - x = 22$.	1 pont	
Csak angol nyelvvizsgával $(x=)\,2$ hallgató rendelkezik.	1 pont	
Beírva x megkapott értékével a megfelelő elemszámokat: 	1 pont	
A három nyelvvizsga közül legalább eggyel rendelkezők száma $22 + 3 + 1 = 26$.	1 pont	
Egyetlen nyelvvizsgával sem rendelkezik $29 - 26 = 3$ fő, tehát mindhárom kérdésre 3 hallgató válaszolt nemmel.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

8. b) másik megoldás		
Elegendő a kedvező G pontokat a FH szakasz pontjai között keresni.	1 pont	
Az x=FG jelöléssel: ha x növekszik, akkor az EG szakasz hossza szigorúan monoton csökken (mert az EHG derékszögű háromszög EH befogója mindig 30 m hosszú, a másik befogója pedig csökken),	1 pont	
az EFG háromszög területe szigorúan monoton nő (hiszen a FG oldala nő, a hozzá tartozó magassága nem változik).	1 pont	
Ebből következik, hogy elegendő megvizsgálni, mely esetben egyenlő a kerítésre fordított költség a cserébe kapott telekrész értékével.	1 pont	
A kerítésért kapott telekrész területe (x-et méterben mérve): $\frac{30x}{2} = 15x\ (\mathrm{m}^2)$,	1 pont	
értéke $30\,000 \cdot 15x$ (Ft).	1 pont	
A kerítés hossza (Pitagorasz- tétellel): $\sqrt{1300 - 40x + x^2}$,	1 pont	
a kerítés megépíttetésének költsége: $15000 \cdot \sqrt{1300 - 40x + x^2}$.	1 pont	
$15000 \cdot \sqrt{x^2 - 40x + 1300} = 30000 \cdot 15x$, azaz	1 pont	
$\sqrt{x^2 - 40x + 1300} = 30x$ (ahol x pozitív), $x^2 - 40x + 1300 = 900x^2$. Ebből: $899x^2 + 40x - 1300 = 0$.	1 pont	
Ennek pozitív megoldása $x \approx 1{,}18$.	1 pont	
Tehát legalább 1,2 m (és legfeljebb 8 m) hosszú a FG szakasz.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

8. b) első megoldás



A feladat megértése (pl. egy jó vázlat). ($FG = x$ és $EG = y$ jelölés esetén)	1 pont	
Az *EFG* háromszög *T* területe: $T = 15x$ (m^2);	1 pont	
a Zoli telkéhez csatolt terület értéke: $30\,000 \cdot 15x$ (Ft).	1 pont	
Az új kerítés hosszát az *EHG* derékszögű háromszögből számíthatjuk. $FG = 20 - x$.	1 pont*	
Alkalmazva Pitagorasz tételét: $y^2 = (20-x)^2 + 30^2$	1 pont*	
$0 < y = \sqrt{1300 - 40x + x^2}$.	1 pont*	
Az *EG* hosszú kerítés megépíttetésének költsége: $15\,000 \cdot \sqrt{1300 - 40x + x^2}$.	1 pont	
Zoli jobban járt, tehát $15\,000 \cdot \sqrt{x^2 - 40x + 1300} < 30\,000 \cdot 15x$, azaz	1 pont	
$\sqrt{x^2 - 40x + 1300} < 30x$ (ahol *x* pozitív, és méterben adja meg a kérdéses hosszat.) (Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezek négyzete között a relációjel változatlan.) $x^2 - 40x + 1300 < 900x^2$. Ebből $0 < 899x^2 + 40x - 1300$ (ahol *x* pozitív).	1 pont	
Az $x \mapsto 899x^2 + 40x - 1300$ ($x \in \mathbf{R}$) másodfokú függvény egyetlen pozitív zérushelye $\approx 1{,}18$. (A másik zérushely $-1{,}22$)	1 pont	
Ez a másodfokú függvény a pozitív számok halmazán szigorúan nő.	1 pont	
Mivel 1,18 m 1,2 m, így legalább 1,2 m (és legfeljebb 8 m) hosszú a *FG* szakasz.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

<u>*Megjegyzés:*</u>
*Koszinusztétel alkalmazásával is megadható az FG oldal (a *-gal jelölt pontokhoz):*
GFE$\sphericalangle = \alpha$ *jelöléssel* $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}5$, *azaz* α $56{,}31^\circ$ *1 pont*
EFG háromszög EG oldalára koszinusztétel alkalmazása. 1 pont
$y = \sqrt{x^2 + 36{,}06^2 - 72{,}2x\cos 56{,}3^\circ}$ *1 pont*

3. első megoldás

Ha hétfőn egy rekeszben *x* kg sárgabarack volt, és ebből összesen *y* db rekesszel vásárolt, akkor	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
kedden egy rekeszben ($x-2$) kg volt, és ekkor összesen $(y+8)$ db rekesszel vásárolt.	1 pont	
Így az $xy = 165$ és az $(x-2)(y+8) = 165$ egyenleteknek kell teljesülniük.	1 pont	
Tehát az $\left.\begin{array}{l} xy = 165 \\ (x-2)(y+8) = 165 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldását keressük, ahol *x* és *y* pozitív számot jelöl. A második egyenletben a zárójel felbontásával az $xy - 2y + 8x - 16 = 165$ egyenlethez jutunk.	1 pont	
Mivel $xy = 165$, így $165 - 2y + 8x - 16 = 165$,	1 pont	
azaz $4x - y = 8$.	1 pont	
Ebből $y = 4x - 8$. Az $xy = 165$ egyenletben *y* helyére $4x - 8$ -at helyettesítve,	1 pont	
a $4x^2 - 8x - 165 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.	1 pont	
Ennek pozitív megoldása: $x = 7{,}5$. (A negatív megoldás: –5,5)	1 pont	
Innen $y = 22$.	1 pont	
Ezekkel az értékekkel számolva: kedden 5,5 kg őszibarack volt egy rekeszben, és összesen 30 rekesszel vásárolt a kiskereskedő. (Az értékek a szöveg feltételeinek megfelelnek.)	1 pont	*Ez a pont a szöveg szerinti ellenőrzésért adható.*
Tehát hétfőn egy rekeszben 7,5 kg sárgabarack volt, és ekkor összesen 22 rekesszel vásárolt a kiskereskedő.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

3. második megoldás		
Ha hétfőn n darab rekesz sárgabarackot vásárolt a kiskereskedő, akkor egy rekeszben $\frac{165}{n}$ kg sárgabarack volt.	2 pont	
Így kedden $(n+8)$ darab rekesz őszibarackot vett, és ekkor egy rekeszben $\left(\frac{165}{n}-2\right)$ kg őszibarack volt.	2 pont	
$(n+8)\cdot\left(\frac{165}{n}-2\right)=165$.	2 pont	
Rendezve kapjuk: $n^2+8n-660=0$.	2 pont	
Ennek egyetlen pozitív gyöke $n=22$ (a másik gyök $n=-30$).	2 pont	
Hétfőn 22 rekesz sárgabarackot vett a kiskereskedő, egy rekeszben 7,5 kg gyümölcs volt.	1 pont	
Ezek az értékek megfelelnek a feladat minden feltételének (kedden 30 rekesszel vásárolt, egy rekeszben 5,5 kg őszibarack volt).	1 pont	*Ez a pont a szöveg szerinti ellenőrzésért adható.*
Összesen:	**12 pont**	

<u>*Megjegyzés:*</u>

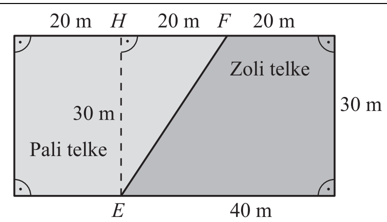
Ha hétfőn minden rekeszben s kg sárgabarack volt, akkor, $\frac{165}{s}$ *darab rekesszel vásárolt.*

A felírható egyenlet ekkor: $(s-2)\cdot\left(\frac{165}{s}+8\right)=165$. *Rendezve:* $4s^2-8s-165=0$.

Gyökök: $s_1=7{,}5$ *és* $s_2=-5{,}5$.

7. b) második megoldás		
100 000 lakosra vonatkozóan számolunk, mert az arányok a minta nagyságától függetlenek.	2 pont	
100 000 lakos közül 5 000 betegszik meg, 95 000 egészséges marad.	1 pont	
5 000 beteg közül 2250 dohányzik, 2750 nem dohányzik.	1 pont	
95 000 egészséges lakos közül 19 000 a dohányos, 76 000 nem dohányos.	1 pont	
A 21 250 dohányos között 2250 beteg van,	1 pont	
ez a dohányosok számának 10,6%-a.	1 pont	
A 78 750 nem dohányos között 2750 beteg van,	1 pont	
ez a nem dohányosok számának 3,5%-a.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

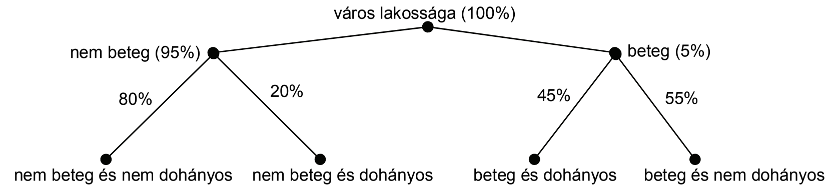
8. a)



A telek felosztásának megértése (pl. egy jó vázlat).	1 pont	
Az EF átfogójú, 20 és 30 befogójú derékszögű háromszög (EFH) megadása.	1 pont	
Pitagorasz tételének alkalmazása: $EF^2=20^2+30^2$	1 pont	
$EF\approx 36{,}1$ méter.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b) első megoldás

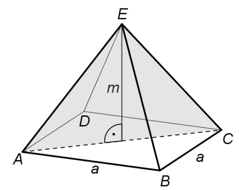
Az adatok áttekintéséhez célszerű ábrát készíteni.

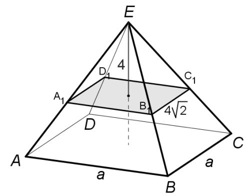


(Modellt készít: a szövegnek megfelelő 4 diszjunkt csoportba sorolja a város lakosságát.)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldás erre a gondolatra épít.*
Kiszámítjuk, hogy a város lakosságának hány százaléka tartozik a négy csoportba. Nem beteg és nem dohányos: $0{,}95\cdot 0{,}8=0{,}76$, azaz 76%; nem beteg és dohányos: $0{,}95\cdot 0{,}2=0{,}19$, azaz 19%;	1 pont	
beteg és dohányos: $0{,}05\cdot 0{,}45=0{,}0225$, azaz 2,25%; beteg és nem dohányos: $0{,}05\cdot 0{,}55=0{,}0275$, azaz 2,75%.	1 pont	
A város lakosainak (19 + 2,25 =) 21,25%-a dohányos, közöttük a város lakosainak 2,25%-a beteg,	1 pont	
tehát a dohányosok között $\frac{2{,}25}{21{,}25}\cdot 100\%$ a betegek aránya.	1 pont	
Egy tizedes jegyre kerekítve ez 10,6%.	1 pont	
A város lakosainak (76 + 2,75=) 78,75%-a nem dohányos, közöttük a város lakosainak 2,75%-a beteg,	1 pont	
tehát a nem dohányosok között $\frac{2{,}75}{78{,}75}\cdot 100\%$ a betegek aránya.	1 pont	
Egy tizedes jegyre kerekítve ez 3,5%.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

4. a) első megoldás

Az ábrák jelöléseit használjuk.

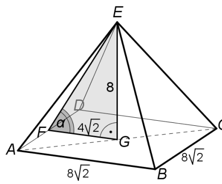




Legyen a gúla alapéle a, magassága m.	1 pont	*Ha a jelölés az ábrán világos, ez a pont jár.*
$AC=a\sqrt{2}$,	1 pont	
az AEC háromszög területe: (1) $64=\frac{a\sqrt{2}\cdot m}{2}$.	1 pont	
Az alaplappal párhuzamos síkmetszet négyzet, amelynek oldala $\sqrt{32}\ \left(=4\sqrt{2}\right)$ cm hosszú.	1 pont	
Az $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ négyzet (vagy a két E csúcsú gúla) (középpontos) hasonlósága miatt a megfelelő szakaszok aránya egyenlő:	1 pont	
$\frac{a}{4\sqrt{2}}=\frac{m}{4}$,	1 pont	
$m=\frac{a}{\sqrt{2}}$.	1 pont	
Ezt behelyettesítve az (ACE háromszög területére felírt) (1) egyenletbe: $64=\frac{a^2}{2}$, $a^2=128$.	1 pont	
A gúla alaplapjának területe 128 cm^2.	1 pont	
$a^2=128\Rightarrow a=8\sqrt{2}$ (mert $a>0$), a gúla magassága: $m=\frac{a}{\sqrt{2}}=8\,(\text{cm})$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

4. a) második megoldás		
Legyen a gúla alapéle a, magassága m.	1 pont	*Ha a jelölés az ábrán világos, ez a pont jár.*
$AC = a\sqrt{2}$,	1 pont	
az AEC háromszög területe: (1) $64 = \frac{a\sqrt{2}\cdot m}{2}$.	1 pont	
Az alaplappal párhuzamos síkmetszet (négyzet) (középpontosan) hasonló az alaplaphoz.	1 pont	
A hasonló síkidomok területéről tanultak szerint ezért: $\frac{a^2}{32} = \frac{m^2}{16}$,	1 pont	
vagyis $\frac{a^2}{2} = m^2$,	1 pont	
amiből (a>0 és m>0 miatt) $m = \frac{a}{\sqrt{2}}$ következik.	1 pont	
Ezt behelyettesítve az (ACE háromszög területére felírt) (1) egyenletbe: $64 = \frac{a^2}{2}$, $a^2 = 128$.	1 pont	
A gúla alaplapjának területe 128 cm^2.	1 pont	
$a^2 = 128 \Rightarrow a = 8\sqrt{2}$ (mert a>0), a gúla magassága: $m = \frac{a}{\sqrt{2}} = 8$ (cm).	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

4. b)



Ha az AD él felezőpontja F, az $ABCD$ négyzet középpontja G, akkor a kérdezett szög: $\alpha = EFG\sphericalangle$.	1 pont	
Az EGF derékszögű háromszögből: $\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,	1 pont	
$\alpha \approx 54{,}7^\circ$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. a)		
Az $n = 100$ és $p = 0{,}05$ paraméterű binomiális eloszlás alapján számolhatunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a megoldás erre a gondolatra épít.*
Annak a valószínűsége, hogy a 100 ember között nincs beteg: $0{,}95^{100}$,	1 pont	
annak a valószínűsége, hogy közöttük 1 beteg van: $\binom{100}{1}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{99}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a 100 ember között legfeljebb egy, az újfajta betegségségben szenvedő van: $0{,}95^{100} + \binom{100}{1}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{99} \approx$	1 pont	
$\approx (0{,}0059 + 0{,}0312) \approx 0{,}0371$.	1 pont	
(Nekünk a komplementer esemény valószínűsége kell,) tehát annak a valószínűsége, hogy a 100 ember között legalább két az újfajta betegségségben szenvedő van $\approx 1 - 0{,}0371 \approx 0{,}9629$	1 pont	
A kérdezett valószínűség két tizedes jegyre kerekítve: 0,96.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. b) második megoldás		
Közvetlenül megszámoljuk, hogy a 243 egyenlő valószínűségű eset közül hány végződik több kék mint piros golyó húzásával. Legyen az első szám a kék, a második a piros, a harmadik a fehér golyók száma: (1,0,4), (2,0,3), (3,0,2), (4,0,1), (5,0,0), (2,1,2), (3,1,1), (4,1,0), (3,2,0).	1 pont	
Mivel a különböző színek egyformán gyakoriak, ezért a fenti esetek közül azonosak valószínűség szempontjából a következők: (1,0,4), (4,0,1), (4,1,0) (2,0,3), (3,0,2), (3,2,0) (5,0,0) (3,1,1) (2,1,2)	1 pont	
Az első hármas összesen $3\cdot\frac{5!}{4!}\left(=3\cdot\binom{5}{1}\right)=15$ -féleképpen,	1 pont	
a második hármas $3\cdot\frac{5!}{3!2!}\left(=3\cdot\binom{5}{2}\right)$=30 -féleképpen,	1 pont	
a harmadik (5,0,0) 1-féleképpen, míg a negyedik (3,1,1) $\frac{5!}{3!}\left(=2\cdot\binom{5}{3}\right)$ =20-féleképpen következhet be.	1 pont	
Végül az ötödik (2,1,2) $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=\frac{120}{4}=30$ -féleképpen következhet be, azaz	1 pont	
a kedvező esetek száma: $15+30+1+20+30=96$.	1 pont	
A keresett valószínűsége tehát: $\frac{96}{243}$ $(\approx 0{,}395)$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	*Ha a vizsgázó nem azonos rendszerben számítja ki az összes és a kedvező esetek számát, legfeljebb 5 pont adható.*

Megjegyzés:
Ha a vizsgázó előbb a több kék mint piros golyó húzásának valószínűségét számítja ki, és a b) első megoldásának gondolatmenetét követve adja meg az egyenlő számú kék és piros golyó húzás valószínűségét, akkor alkalmazzuk b) első megoldásának pontozását!

II.

5. a)		
$a_1=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 pont	
$a_2=2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 pont	
$a_3=3$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b) első megoldás		
Tetszőleges $\alpha\in[0;2\pi]$ esetén $a_1=1+\sin\alpha$, $a_2=2+\sin 2\alpha$, $a_3=3+\sin 3\alpha$.	1 pont	
Ezek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, ha $a_1+a_3=2a_2$,	1 pont	*A számtani sorozat bármelyik definíciójának helyes alkalmazásáért jár a 2 pont.*
azaz $4+\sin\alpha+\sin 3\alpha=2\cdot(2+\sin 2\alpha)$.	1 pont	
Átalakítva: $\sin 3\alpha+\sin\alpha=2\sin 2\alpha$.	1 pont	
A $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot alkalmazva a bal oldalra:	1 pont	
$2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin 2\alpha$.	1 pont	
0-ra rendezés és szorzattá alakítás után: $\sin 2\alpha\cdot(\cos\alpha-1)=0$.	1 pont	
(A bal oldalon álló szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.) A valós számok halmazán $\sin 2\alpha=0$ pontosan akkor, ha $2\alpha=k\pi$, azaz, ha $\alpha=k\cdot\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$).	1 pont	
Mivel $\alpha\in[0;2\pi]$, ezért α lehetséges értékei: 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π.	1 pont	*Ez az 1 pont csak mind az öt jó érték felsorolásáért jár.*
$\cos\alpha=1$ a tekintett intervallumon pontosan akkor teljesül, ha $\alpha=0$ vagy $\alpha=2\pi$, ezeket az értékeket pedig már megkaptuk az előző eset vizsgálatakor.	1 pont	
Ha $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ vagy $\alpha=2\pi$, akkor $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$;	1 pont	
ha $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, akkor $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=4$, tehát ez a négy α érték megoldást ad.	1 pont	
$\alpha=\frac{\pi}{2}$ esetén nem kapunk megfelelő megoldást, ugyanis ekkor $a_1=a_2=a_3=2$.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

5. b) második megoldás		
Tetszőleges $\alpha \in [0; 2\pi]$ esetén $a_1 = 1 + \sin\alpha$, $a_2 = 2 + \sin 2\alpha$, $a_3 = 3 + \sin 3\alpha$.	1 pont	
Ezek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, ha $a_1 + a_3 = 2a_2$,	1 pont	*A számtani sorozat bármelyik definíciójának helyes alkalmazásáért jár a 2 pont.*
azaz $4 + \sin\alpha + \sin 3\alpha = 2 \cdot (2 + \sin 2\alpha)$.	1 pont	
Átalakítva: $\sin 3\alpha + \sin\alpha = 2\sin 2\alpha$.	1 pont	
A $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ és a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságokat alkalmazva:	1 pont	
$4\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha$.	1 pont	
Ebből: $\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha - \cos\alpha) = 0$.	1 pont	
(A bal oldalon álló szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.) A tekintett intervallumon $\sin\alpha = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = 0$ vagy $\alpha = \pi$ vagy $\alpha = 2\pi$.	1 pont	*Ez az 1 pont csak mind a három jó érték felsorolásáért jár.*
Mivel $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$, ezért a bal oldal másik tényezője $\cos^2\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha \cdot (\cos\alpha - 1)$ alakban írható, és pontosan akkor 0, ha $\cos\alpha = 0$ vagy $\cos\alpha = 1$.	1 pont	
Az α eddigi lehetséges értékeihez innen két új érték adódik a $\cos\alpha = 0$ egyenletből: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ és $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.	1 pont	
Ha $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ vagy $\alpha = 2\pi$, akkor $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$;	1 pont	
ha $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, akkor $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, tehát ez a négy α érték megoldást ad.	1 pont	
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetén nem kapunk megfelelő megoldást, ugyanis ekkor $a_1 = a_2 = a_3 = 2$.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

6. a)		
$3^5 = 243$ különböző húzás lehetséges, (ezek mindegyike azonos valószínűséggel következhet be).	1 pont	
Egyforma a kék és piros golyók száma, ha mindkettő 0, 1 vagy 2.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is megkapja, ha a gondolatot ugyan nem írja le, de a megoldásából kiderül, hogy erre épít.*
Első eset 0 piros és 0 kék, azaz mind az öt fehér, ez 1-féleképpen lehetséges.	1 pont	
Második eset: 1 piros és 1 kék, 3 fehér, ez $\frac{5!}{3!}\left(= 2 \cdot \binom{5}{3}\right)$ =20-féleképpen következhet be. Harmadik eset: 2 piros és 2 kék, 1 fehér, ez $\frac{5!}{2!\,2!}\left(= \binom{5}{1}\binom{4}{2}\right)$ =30 esetben következhet be.	3 pont	
A kedvező esetek száma tehát $1 + 20 + 30 = 51$.	1 pont	
A döntetlen játszma valószínűsége: $\frac{51}{243}$ $(\approx 0{,}2098 \approx 0{,}21)$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. b) első megoldás		
Három eset lehetséges: azonos a kihúzott piros és kék golyók száma, vagy több a kék vagy több a piros.	2 pont	*Ennél kevésbé részletezett helyes indoklás esetén is járnak ezek a pontok.*
A különböző színű golyók azonos száma miatt	1 pont	
„a több piros mint kék golyó húzásának” esélye azonos „a több kék mint piros golyó húzásának” esélyével.	2 pont	
A több kék mint piros golyó húzásának esélye tehát: $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{51}{243}\right) =$	2 pont	
$\frac{96}{243}$ $(\approx 0{,}395)$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	