ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011. május 3.

# MATEMATIKA

# EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

## NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

# I.

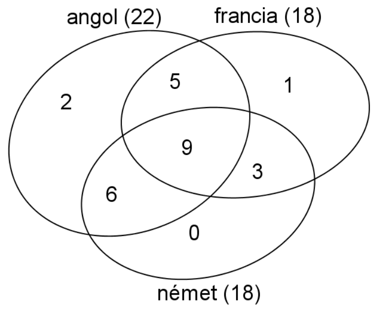
| 1. a) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Az $f$ függvény egy negatív főegyütthatós másodfokú függvénynek egy zárt intervallumra vett leszűkítése. Grafikonja egy lefelé nyitott parabolának egy íve. | 1 pont | |
| Teljes négyzetté kiegészítéssel $-x^2-2x+3 \equiv -(x+1)^2+4$. | 1 pont | |
| A (–1;4) pont a parabola tengelypontja, amely a függvény grafikonjának is pontja. | 1 pont | |
| Tehát $f$ a $[-2;-1]$ intervallumon szigorúan monoton növő, a $[-1;5]$ intervallumon pedig szigorúan monoton fogyó. | 1 pont | |
| Az eddigiekből következik, hogy a (–1) maximumhelye $f$-nek és a maximum értéke 4. | 1 pont | |
| A minimum a zárt intervallum két határának valamelyikénél lehet: $f(-2)=3$, $f(5)=-32$. | 1 pont | |
| Az $f$ függvény minimumhelye az 5, a minimum értéke $f(5)=-32$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

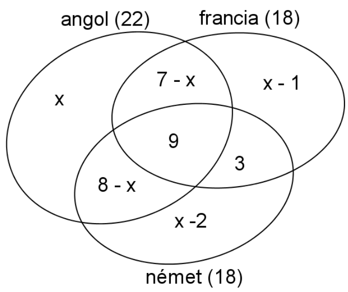
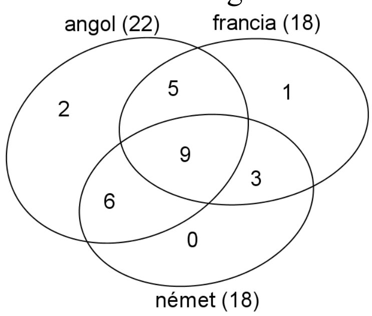
<u>*Megjegyzések*</u>:
1. *Ha a megoldást grafikonkészítéssel kezdi, és arról helyesen olvassa le a monotonitási viszonyokat és a szélsőértékeket, akkor jár a 7 pont, ha a grafikon helyességét indokolja.*
2. *Ha hibás grafikonról olvassa le jól a kért értékeket, akkor a jó leolvasásért 3 pontot kapjon (monotonitás 1 + szélsőértékek 2)!*
3. *A monotonitási tartományokhoz hozzászámíthatjuk az $x=-1$ értéket, vagy ki is zárhatjuk azt. Mindkét változatot fogadjuk el helyes válasznak!*

| **1. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -x^2 - 2x + 3$ függvény derivált függvénye: $x \mapsto -2x - 2$. | 1 pont | |
| Ahol a derivált függvény pozitív, ott az eredeti függvény szigorúan monoton növő, ahol negatív, ott szigorúan monoton fogyó. | 1 pont | |
| $-2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ és $-2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x > -1$. | 1 pont | |
| A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -x^2 - 2x + 3$ függvényből leszűkítéssel kapott $f$ függvény tehát a $[-2;-1[$ intervallumon szigorúan monoton növő, a $]-1;5]$ intervallumon pedig szigorúan monoton fogyó. | 1 pont | |
| Az eddigiekből következik, hogy a (–1) maximumhelye $f$-nek és a maximum értéke 4. | 1 pont | |
| A minimum a zárt intervallum két határának valamelyikénél lehet: $f(-2) = 3$, $f(5) = -32$. | 1 pont | |
| Az $f$ függvény minimumhelye az 5, a minimum értéke $f(5) = -32$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |
| *Megjegyzés:* *A monotonitási tartományokhoz hozzászámíthatjuk az $x = -1$ értéket, vagy ki is zárhatjuk azt. Mindkét változatot fogadjuk el helyes válasznak!* | | |

| **1. b)** | | |
|---|---|---|
| Az $\dfrac{1}{\lg(x^2 + 2x - 3) - \lg 5}$ kifejezés akkor értelmezhető, ha $x^2 + 2x - 3 > 0$, és | 1 pont | |
| $\lg(x^2 + 2x - 3) \neq \lg 5$. | 1 pont | |
| Az egyenlőtlenség megoldása a valós számok halmazán: $x < -3$ vagy $x > 1$, | 1 pont | |
| de $-2 \le x \le 5$, így az $1 < x \le 5$ feltételnek kell teljesülnie. | 1 pont | |
| A $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg 5$ pontosan akkor teljesül, ha $x^2 + 2x - 3 = 5$. | 1 pont | |
| Ennek valós megoldásai a – 4 és a 2. | 1 pont | |
| Tehát azon $x$ valós számokra értelmezhető a kifejezés, amelyekre $1 < x \le 5$ és $x \neq 2$ teljesül. | 1 pont | *Bármilyen formában megadott helyes válasz 1 pontot ér. Például:* $]1;2[ \cup ]2;5]$ *vagy* $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x \le 5,\ x \neq 2\}$. |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **2. a)** | | |
|---|---|---|
| A német és francia vizsgával rendelkező 12 hallgató közül 12 – 3 = 9-nek van angol vizsgája is. | 1 pont | |
| Mindhárom kérdésre 9-en válaszoltak igennel. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **2. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A 22 angol nyelvvizsgás közül 22 – 9 = 13 főnek van egy vagy két nyelvvizsgája. | 1 pont | |
| Tehát 13 hallgató tartozik az angol nyelvvizsgával rendelkezők közül a német vagy francia nyelvvizsgával nem rendelkezők halmazainak uniójába. | 1 pont | |
| Ezen halmazok elemszáma külön-külön 7 illetve 8, az unió elemszáma 13. A két halmaz közös részébe tehát 15 – 13 = 2 elem tartozik. A közös részbe pedig a csakis angol vizsgával rendelkező hallgatók tartoznak. | 2 pont | |
| Ezek alapján beírhatjuk az alábbi halmazábrába az egyértelműen adódó elemszámokat:   | 3 pont | |
| A három nyelvvizsga közül legalább eggyel rendelkezők száma 22 + 3 + 1 = 26. | 1 pont | |
| Mindhárom kérdésre nemmel (29 – 26 =) 3 fő válaszolt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

| **2. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Jelöljük $x$-szel a csak angol nyelvvizsgával rendelkező hallgatók számát. | 1 pont | *Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.* |
| Ezzel a jelöléssel a következő Venn-diagramot hozhatjuk létre:   | 3 pont | *A 3 pont az „angol” halmaz helyes kitöltéséért jár.* |
| Az angol nyelvvizsgával rendelkezők száma 22, tehát $24-x=22$. | 1 pont | |
| Csak angol nyelvvizsgával $(x=)\,2$ hallgató rendelkezik. | 1 pont | |
| Beírva $x$ megkapott értékével a megfelelő elemszámokat:   | 1 pont | |
| A három nyelvvizsga közül legalább eggyel rendelkezők száma $22 + 3 + 1 = 26$. | 1 pont | |
| Egyetlen nyelvvizsgával sem rendelkezik $29 – 26 = 3$ fő, tehát mindhárom kérdésre 3 hallgató válaszolt nemmel. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

| **3. első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha hétfőn egy rekeszben $x$ kg sárgabarack volt, és ebből összesen $y$ db rekesszel vásárolt, akkor | 1 pont | *Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.* |
| kedden egy rekeszben ( $x-2$ ) kg volt, és ekkor összesen $(y+8)$ db rekesszel vásárolt. | 1 pont | |
| Így az $xy=165$ és az $(x-2)(y+8)=165$ egyenleteknek kell teljesülniük. | 1 pont | |
| Tehát az $\left.\begin{array}{l} xy=165 \\ (x-2)(y+8)=165 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldását keressük, ahol $x$ és $y$ pozitív számot jelöl. A második egyenletben a zárójel felbontásával az $xy-2y+8x-16=165$ egyenlethez jutunk. | 1 pont | |
| Mivel $xy=165$, így $165-2y+8x-16=165$, | 1 pont | |
| azaz $4x-y=8$. | 1 pont | |
| Ebből $y=4x-8$. Az $xy=165$ egyenletben $y$ helyére $4x-8$ -at helyettesítve, | 1 pont | |
| a $4x^2-8x-165=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. | 1 pont | |
| Ennek pozitív megoldása: $x=7{,}5$. (A negatív megoldás: –5,5) | 1 pont | |
| Innen $y=22$. | 1 pont | |
| Ezekkel az értékekkel számolva: kedden 5,5 kg őszibarack volt egy rekeszben, és összesen 30 rekesszel vásárolt a kiskereskedő. (Az értékek a szöveg feltételeinek megfelelnek.) | 1 pont | *Ez a pont a szöveg szerinti ellenőrzésért adható.* |
| Tehát hétfőn egy rekeszben 7,5 kg sárgabarack volt, és ekkor összesen 22 rekesszel vásárolt a kiskereskedő. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **12 pont** | |

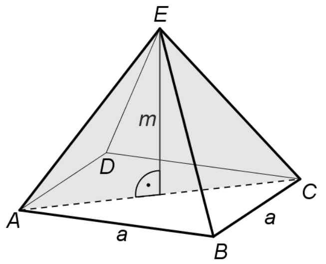
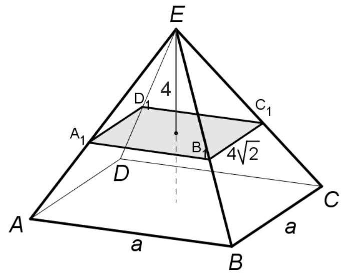
| **3. második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha hétfőn $n$ darab rekesz sárgabarackot vásárolt a kiskereskedő, akkor egy rekeszben $\frac{165}{n}$ kg sárgabarack volt. | 2 pont | |
| Így kedden $(n+8)$ darab rekesz őszibarackot vett, és ekkor egy rekeszben $\left(\frac{165}{n}-2\right)$ kg őszibarack volt. | 2 pont | |
| $(n+8)\cdot\left(\frac{165}{n}-2\right)=165$. | 2 pont | |
| Rendezve kapjuk: $n^2+8n-660=0$. | 2 pont | |
| Ennek egyetlen pozitív gyöke $n=22$ (a másik gyök $n=-30$). | 2 pont | |
| Hétfőn 22 rekesz sárgabarackot vett a kiskereskedő, egy rekeszben 7,5 kg gyümölcs volt. | 1 pont | |
| Ezek az értékek megfelelnek a feladat minden feltételének (kedden 30 rekesszel vásárolt, egy rekeszben 5,5 kg őszibarack volt). | 1 pont | *Ez a pont a szöveg szerinti ellenőrzésért adható.* |
| **Összesen:** | **12 pont** | |

*Megjegyzés:*

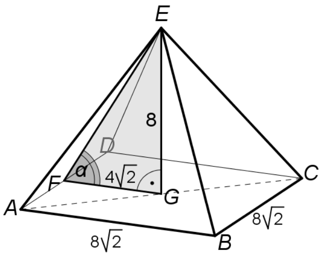
*Ha hétfőn minden rekeszben s kg sárgabarack volt, akkor,* $\frac{165}{s}$ *darab rekesszel vásárolt.*

*A felírható egyenlet ekkor:* $(s-2)\cdot\left(\frac{165}{s}+8\right)=165$. *Rendezve:* $4s^2-8s-165=0$.

*Gyökök:* $s_1=7{,}5$ *és* $s_2=-5{,}5$.

| | | |
|---|---|---|
| **4. a) első megoldás** | | |
| Az ábrák jelöléseit használjuk.     | | |
| Legyen a gúla alapéle *a*, magassága *m*. | 1 pont | *Ha a jelölés az ábrán világos, ez a pont jár.* |
| $AC = a\sqrt{2}$, | 1 pont | |
| az *AEC* háromszög területe: (1) $64 = \dfrac{a\sqrt{2}\cdot m}{2}$. | 1 pont | |
| Az alaplappal párhuzamos síkmetszet négyzet, amelynek oldala $\sqrt{32}$ $\left(= 4\sqrt{2}\right)$ cm hosszú. | 1 pont | |
| Az *ABCD* és $A_1B_1C_1D_1$ négyzet (vagy a két *E* csúcsú gúla) (középpontos) hasonlósága miatt a megfelelő szakaszok aránya egyenlő: | 1 pont | |
| $\dfrac{a}{4\sqrt{2}} = \dfrac{m}{4}$, | 1 pont | |
| $m = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. | 1 pont | |
| Ezt behelyettesítve az (*ACE* háromszög területére felírt) (1) egyenletbe: $64 = \dfrac{a^2}{2}$, $a^2 = 128$. | 1 pont | |
| A gúla alaplapjának területe 128 cm$^2$. | 1 pont | |
| $a^2 = 128 \Rightarrow a = 8\sqrt{2}$ (mert *a*>0), a gúla magassága: $m = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = 8\,(\text{cm})$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **10 pont** | |

| **4. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Legyen a gúla alapéle *a*, magassága *m*. | 1 pont | *Ha a jelölés az ábrán világos, ez a pont jár.* |
| $AC = a\sqrt{2}$, | 1 pont | |
| az *AEC* háromszög területe: (1) $64 = \frac{a\sqrt{2} \cdot m}{2}$. | 1 pont | |
| Az alaplappal párhuzamos síkmetszet (négyzet) (középpontosan) hasonló az alaplaphoz. | 1 pont | |
| A hasonló síkidomok területéről tanultak szerint ezért: $\frac{a^2}{32} = \frac{m^2}{16}$, | 1 pont | |
| vagyis $\frac{a^2}{2} = m^2$, | 1 pont | |
| amiből (a>0 és m>0 miatt) $m = \frac{a}{\sqrt{2}}$ következik. | 1 pont | |
| Ezt behelyettesítve az (*ACE* háromszög területére felírt) (1) egyenletbe: $64 = \frac{a^2}{2}$, $a^2 = 128$. | 1 pont | |
| A gúla alaplapjának területe 128 cm². | 1 pont | |
| $a^2 = 128 \Rightarrow a = 8\sqrt{2}$ (mert *a*>0), a gúla magassága: $m = \frac{a}{\sqrt{2}} = 8\,(\text{cm})$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **10 pont** | |

| **4. b)** | | |
|---|---|---|
|  | | |
| Ha az *AD* él felezőpontja *F*, az *ABCD* négyzet középpontja *G*, akkor a kérdezett szög: $\alpha = EFG\sphericalangle$. | 1 pont | |
| Az *EGF* derékszögű háromszögből: $\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, | 1 pont | |
| $\alpha \approx 54{,}7^\circ$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

# II.

## 5. a)

| | | |
|---|---|---|
| $a_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 pont | |
| $a_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 pont | |
| $a_3 = 3$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

## 5. b) első megoldás

| | | |
|---|---|---|
| Tetszőleges $\alpha \in [0; 2\pi]$ esetén $a_1 = 1 + \sin\alpha$, $a_2 = 2 + \sin 2\alpha$, $a_3 = 3 + \sin 3\alpha$. | 1 pont | |
| Ezek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, ha $a_1 + a_3 = 2a_2$, | 1 pont | *A számtani sorozat bármelyik definíciójának helyes alkalmazásáért jár a 2 pont.* |
| azaz $4 + \sin\alpha + \sin 3\alpha = 2 \cdot (2 + \sin 2\alpha)$. | 1 pont | |
| Átalakítva: $\sin 3\alpha + \sin\alpha = 2\sin 2\alpha$. | 1 pont | |
| A $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot alkalmazva a bal oldalra: | 1 pont | |
| $2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha = 2\sin 2\alpha$. | 1 pont | |
| 0-ra rendezés és szorzattá alakítás után: $\sin 2\alpha \cdot (\cos\alpha - 1) = 0$. | 1 pont | |
| (A bal oldalon álló szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.) A valós számok halmazán $\sin 2\alpha = 0$ pontosan akkor, ha $2\alpha = k\pi$, azaz, ha $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$). | 1 pont | |
| Mivel $\alpha \in [0; 2\pi]$, ezért α lehetséges értékei: 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π. | 1 pont | *Ez az 1 pont csak mind az öt jó érték felsorolásáért jár.* |
| $\cos\alpha = 1$ a tekintett intervallumon pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 2\pi$, ezeket az értékeket pedig már megkaptuk az előző eset vizsgálatakor. | 1 pont | |
| Ha $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ vagy $\alpha = 2\pi$, akkor $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$; | 1 pont | |
| ha $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, akkor $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, tehát ez a négy $\alpha$ érték megoldást ad. | 1 pont | |
| $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetén nem kapunk megfelelő megoldást, ugyanis ekkor $a_1 = a_2 = a_3 = 2$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **13 pont** | |

| **5. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Tetszőleges $\alpha \in [0; 2\pi]$ esetén $a_1 = 1 + \sin\alpha$, $a_2 = 2 + \sin 2\alpha$, $a_3 = 3 + \sin 3\alpha$. | 1 pont | |
| Ezek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, ha $a_1 + a_3 = 2a_2$, | 1 pont | *A számtani sorozat bármelyik definíciójának helyes alkalmazásáért jár a 2 pont.* |
| azaz $4 + \sin\alpha + \sin 3\alpha = 2 \cdot (2 + \sin 2\alpha)$. | 1 pont | |
| Átalakítva: $\sin 3\alpha + \sin\alpha = 2\sin 2\alpha$. | 1 pont | |
| A $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ és a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságokat alkalmazva: | 1 pont | |
| $4\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha$. | 1 pont | |
| Ebből: $\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha - \cos\alpha) = 0$. | 1 pont | |
| (A bal oldalon álló szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.) A tekintett intervallumon $\sin\alpha = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = 0$ vagy $\alpha = \pi$ vagy $\alpha = 2\pi$. | 1 pont | *Ez az 1 pont csak mind a három jó érték felsorolásáért jár.* |
| Mivel $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$, ezért a bal oldal másik tényezője $\cos^2\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha \cdot (\cos\alpha - 1)$ alakban írható, és pontosan akkor 0, ha $\cos\alpha = 0$ vagy $\cos\alpha = 1$. | 1 pont | |
| Az α eddigi lehetséges értékeihez innen két új érték adódik a $\cos\alpha = 0$ egyenletből: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ és $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. | 1 pont | |
| Ha $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ vagy $\alpha = 2\pi$, akkor $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$; | 1 pont | |
| ha $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, akkor $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, tehát ez a négy $\alpha$ érték megoldást ad. | 1 pont | |
| $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetén nem kapunk megfelelő megoldást, ugyanis ekkor $a_1 = a_2 = a_3 = 2$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **13 pont** | |

| 6. a) | | |
|---|---|---|
| $3^5 = 243$ különböző húzás lehetséges, (ezek mindegyike azonos valószínűséggel következhet be). | 1 pont | |
| Egyforma a kék és piros golyók száma, ha mindkettő 0, 1 vagy 2. | 1 pont | *Ezt a pontot akkor is megkapja, ha a gondolatot ugyan nem írja le, de a megoldásából kiderül, hogy erre épít.* |
| Első eset 0 piros és 0 kék, azaz mind az öt fehér, ez 1-féleképpen lehetséges. | 1 pont | |
| Második eset: 1 piros és 1 kék, 3 fehér, ez $\frac{5!}{3!}\left(=2\cdot\binom{5}{3}\right)$ =20-féleképpen következhet be. Harmadik eset: 2 piros és 2 kék, 1 fehér, ez $\frac{5!}{2!\,2!}\left(=\binom{5}{1}\binom{4}{2}\right)$ =30 esetben következhet be. | 3 pont | |
| A kedvező esetek száma tehát $1+20+30=51$. | 1 pont | |
| A döntetlen játszma valószínűsége: $\frac{51}{243}\left(\approx 0{,}2098 \approx 0{,}21\right)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

| 6. b) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Három eset lehetséges: azonos a kihúzott piros és kék golyók száma, vagy több a kék vagy több a piros. | 2 pont | *Ennél kevésbé részletezett helyes indoklás esetén is járnak ezek a pontok.* |
| A különböző színű golyók azonos száma miatt | 1 pont | |
| „a több piros mint kék golyó húzásának” esélye azonos „a több kék mint piros golyó húzásának” esélyével. | 2 pont | |
| A több kék mint piros golyó húzásának esélye tehát: $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{51}{243}\right)=$ | 2 pont | |
| $\frac{96}{243}\left(\approx 0{,}395\right)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

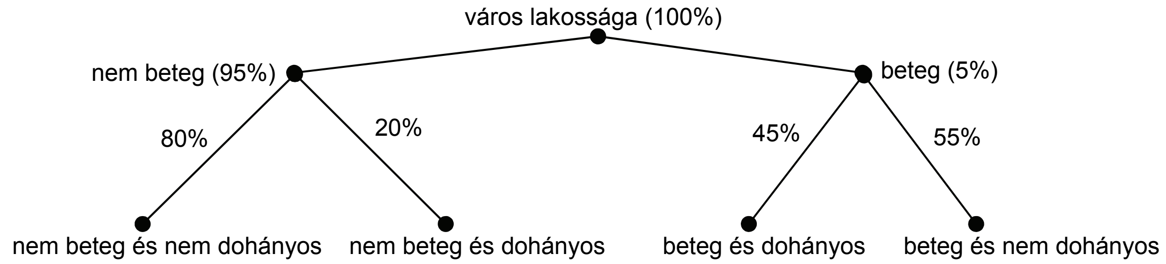
| 6. b) második megoldás | | |
|---|---|---|
| Közvetlenül megszámoljuk, hogy a 243 egyenlő valószínűségű eset közül hány végződik több kék mint piros golyó húzásával. Legyen az első szám a kék, a második a piros, a harmadik a fehér golyók száma: (1,0,4), (2,0,3), (3,0,2), (4,0,1), (5,0,0), (2,1,2), (3,1,1), (4,1,0), (3,2,0). | 1 pont | |
| Mivel a különböző színek egyformán gyakoriak, ezért a fenti esetek közül azonosak valószínűség szempontjából a következők:<br>(1,0,4), (4,0,1), (4,1,0)<br>(2,0,3), (3,0,2), (3,2,0)<br>(5,0,0)<br>(3,1,1)<br>(2,1,2) | 1 pont | |
| Az első hármas összesen<br>$3\cdot\frac{5!}{4!}\left(=3\cdot\binom{5}{1}\right)=15$ -féleképpen, | 1 pont | |
| a második hármas<br>$3\cdot\frac{5!}{3!2!}\left(=3\cdot\binom{5}{2}\right)$=30 -féleképpen, | 1 pont | |
| a harmadik (5,0,0) 1-féleképpen, míg<br>a negyedik (3,1,1) $\frac{5!}{3!}\left(=2\cdot\binom{5}{3}\right)$ =20-féleképpen<br>következhet be. | 1 pont | |
| Végül az ötödik (2,1,2) $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=\frac{120}{4}=30$ -féleképpen<br>következhet be, azaz | 1 pont | |
| a kedvező esetek száma: $15+30+1+20+30=96$. | 1 pont | |
| A keresett valószínűsége tehát: $\frac{96}{243}$ $(\approx 0{,}395)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | *Ha a vizsgázó nem azonos rendszerben számítja ki az összes és a kedvező esetek számát, legfeljebb 5 pont adható.* |

*Megjegyzés:*
*Ha a vizsgázó előbb a több kék mint piros golyó húzásának valószínűségét számítja ki, és a b) első megoldásának gondolatmenetét követve adja meg az egyenlő számú kék és piros golyó húzás valószínűségét, akkor alkalmazzuk b) első megoldásának pontozását!*

| **7. a)** | | |
|---|---|---|
| Az $n=100$ és $p=0{,}05$ paraméterű binomiális eloszlás alapján számolhatunk. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldás erre a gondolatra épít.* |
| Annak a valószínűsége, hogy a 100 ember között nincs beteg: $0{,}95^{100}$, | 1 pont | |
| annak a valószínűsége, hogy közöttük 1 beteg van: $\binom{100}{1}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{99}$. | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy a 100 ember között legfeljebb egy, az újfajta betegségségben szenvedő van: $0{,}95^{100}+\binom{100}{1}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{99}\approx$ | 1 pont | |
| $\approx(0{,}0059+0{,}0312)\approx 0{,}0371$. | 1 pont | |
| (Nekünk a komplementer esemény valószínűsége kell,) tehát annak a valószínűsége, hogy a 100 ember között legalább két az újfajta betegségségben szenvedő van $\approx 1-0{,}0371\approx 0{,}9629$ | 1 pont | |
| A kérdezett valószínűség két tizedes jegyre kerekítve: 0,96. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

**7. b) első megoldás**

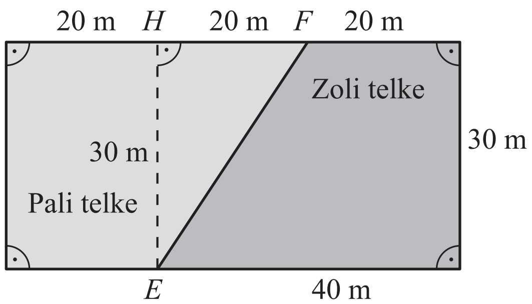
Az adatok áttekintéséhez célszerű ábrát készíteni.




| | | |
|---|---|---|
| (Modellt készít: a szövegnek megfelelő 4 diszjunkt csoportba sorolja a város lakosságát.) | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a megoldás erre a gondolatra épít.* |
| Kiszámítjuk, hogy a város lakosságának hány százaléka tartozik a négy csoportba.<br>Nem beteg és nem dohányos:<br>$0{,}95\cdot 0{,}8 = 0{,}76$, azaz 76%;<br>nem beteg és dohányos:<br>$0{,}95\cdot 0{,}2 = 0{,}19$, azaz 19%; | 1 pont | |
| beteg és dohányos:<br>$0{,}05\cdot 0{,}45 = 0{,}0225$, azaz 2,25%;<br>beteg és nem dohányos:<br>$0{,}05\cdot 0{,}55 = 0{,}0275$, azaz 2,75%. | 1 pont | |
| A város lakosainak (19 + 2,25 =) 21,25%-a dohányos, közöttük a város lakosainak 2,25%-a beteg, | 1 pont | |
| tehát a dohányosok között $\frac{2{,}25}{21{,}25}\cdot 100\%$ a betegek aránya. | 1 pont | |
| Egy tizedes jegyre kerekítve ez 10,6%. | 1 pont | |
| A város lakosainak (76 + 2,75=) 78,75%-a nem dohányos, közöttük a város lakosainak 2,75%-a beteg, | 1 pont | |
| tehát a nem dohányosok között $\frac{2{,}75}{78{,}75}\cdot 100\%$ a betegek aránya. | 1 pont | |
| Egy tizedes jegyre kerekítve ez 3,5%. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

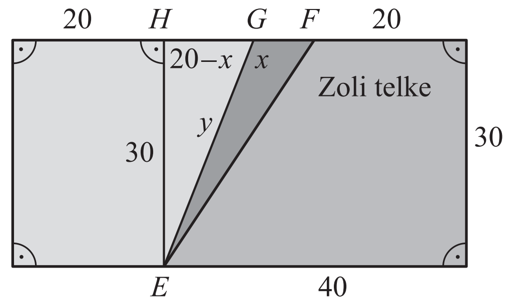
| **7. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| 100 000 lakosra vonatkozóan számolunk, mert az arányok a minta nagyságától függetlenek. | 2 pont | |
| 100 000 lakos közül 5 000 betegszik meg,<br>95 000 egészséges marad. | 1 pont | |
| 5 000 beteg közül 2250 dohányzik ,<br>2750 nem dohányzik. | 1 pont | |
| 95 000 egészséges lakos közül 19 000 a dohányos,<br>76 000 nem dohányos. | 1 pont | |
| A 21 250 dohányos között 2250 beteg van, | 1 pont | |
| ez a dohányosok számának 10,6%-a. | 1 pont | |
| A 78 750 nem dohányos között 2750 beteg van, | 1 pont | |
| ez a nem dohányosok számának 3,5%-a. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

**8. a)**




| | | |
|---|---|---|
| A telek felosztásának megértése (pl. egy jó vázlat). | 1 pont | |
| Az *EF* átfogójú, 20 és 30 befogójú derékszögű háromszög (*EFH*) megadása. | 1 pont | |
| Pitagorasz tételének alkalmazása: $EF^2 = 20^2 + 30^2$ | 1 pont | |
| $EF \approx 36{,}1$ méter. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

## 8. b) első megoldás




| | | |
|---|---|---|
| A feladat megértése (pl. egy jó vázlat).<br>( $FG = x$ és $EG = y$ jelölés esetén) | 1 pont | |
| Az $EFG$ háromszög $T$ területe: $T = 15x$ ($\text{m}^2$); | 1 pont | |
| a Zoli telkéhez csatolt terület értéke:<br>$30\,000 \cdot 15x$ (Ft). | 1 pont | |
| Az új kerítés hosszát az $EHG$ derékszögű háromszögből számíthatjuk. $FG = 20 - x$. | 1 pont* | |
| Alkalmazva Pitagorasz tételét: $y^2 = (20-x)^2 + 30^2$ | 1 pont* | |
| $0 < y = \sqrt{1300 - 40x + x^2}$. | 1 pont* | |
| Az $EG$ hosszú kerítés megépíttetésének költsége:<br>$15\,000 \cdot \sqrt{1300 - 40x + x^2}$. | 1 pont | |
| Zoli jobban járt, tehát<br>$15\,000 \cdot \sqrt{x^2 - 40x + 1300} < 30\,000 \cdot 15x$, azaz | 1 pont | |
| $\sqrt{x^2 - 40x + 1300} < 30x$ (ahol $x$ pozitív, és méterben adja meg a kérdéses hosszat.)<br>(Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezek négyzete között a relációjel változatlan.)<br>$x^2 - 40x + 1300 < 900x^2$.<br>Ebből $0 < 899x^2 + 40x - 1300$ (ahol $x$ pozitív). | 1 pont | |
| Az $x \mapsto 899x^2 + 40x - 1300$ ($x \in \mathbf{R}$) másodfokú függvény egyetlen pozitív zérushelye $\approx 1{,}18$.<br>(A másik zérushely $\approx -1{,}22$) | 1 pont | |
| Ez a másodfokú függvény a pozitív számok halmazán szigorúan nő. | 1 pont | |
| Mivel $1{,}18\text{ m} \approx 1{,}2\text{ m}$, így legalább 1,2 m (és legfeljebb 8 m) hosszú a $FG$ szakasz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **12 pont** | |

*Megjegyzés:*
*Koszinusztétel alkalmazásával is megadható az FG oldal (a *-gal jelölt pontokhoz):*
*$GFE\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel $\mathrm{tg}\alpha = 1{,}5$, azaz $\alpha \approx 56{,}31^\circ$ 1 pont*
*EFG háromszög EG oldalára koszinusztétel alkalmazása. 1 pont*
*$y = \sqrt{x^2 + 36{,}06^2 - 72{,}2x\cos 56{,}3^\circ}$ 1 pont*

| **8. b) másik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Elegendő a kedvező *G* pontokat a *FH* szakasz pontjai között keresni. | 1 pont | |
| Az $x=FG$ jelöléssel: ha $x$ növekszik, akkor az *EG* szakasz hossza szigorúan monoton csökken (mert az *EHG* derékszögű háromszög *EH* befogója mindig 30 m hosszú, a másik befogója pedig csökken), | 1 pont | |
| az *EFG* háromszög területe szigorúan monoton nő (hiszen a *FG* oldala nő, a hozzá tartozó magassága nem változik). | 1 pont | |
| Ebből következik, hogy elegendő megvizsgálni, mely esetben egyenlő a kerítésre fordított költség a cserébe kapott telekrész értékével. | 1 pont | |
| A kerítésért kapott telekrész területe ($x$-et méterben mérve): $\frac{30x}{2}=15x\ (\mathrm{m}^2)$, | 1 pont | |
| értéke $30\,000\cdot 15x$ (Ft). | 1 pont | |
| A kerítés hossza (Pitagorasz- tétellel): $\sqrt{1300-40x+x^2}$ , | 1 pont | |
| a kerítés megépíttetésének költsége: $15000\cdot\sqrt{1300-40x+x^2}$ . | 1 pont | |
| $15000\cdot\sqrt{x^2-40x+1300}=30000\cdot 15x$, azaz | 1 pont | |
| $\sqrt{x^2-40x+1300}=30x$ (ahol $x$ pozitív), $x^2-40x+1300=900x^2$. Ebből: $899x^2+40x-1300=0$. | 1 pont | |
| Ennek pozitív megoldása $x\approx 1{,}18$. | 1 pont | |
| Tehát legalább 1,2 m (és legfeljebb 8 m) hosszú a *FG* szakasz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **12 pont** | |

<table>
<tr><td colspan="3">8. b) harmadik megoldás</td></tr>
<tr><td colspan="3">A megoldás során kihasználjuk, hogy tized méterre (egész deciméterre) kerekítve kell megadni az eredményt.</td></tr>
<tr><td>A megépített kerítés hossza legalább $\sqrt{30^2+12^2}\approx 32{,}3$ m és legfeljebb $EF\approx 36{,}1$ m.</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Zoli a kerítésre legalább $32{,}3\cdot 15\,000=484\,500$ Ft-ot, legfeljebb $36{,}1\cdot 15\,000=541\,500$ Ft-ot költött.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A kerítésre költött összeg legalább 16,15 $m^2$, de legfeljebb 18,05 $m^2$ területű telekrész értékével egyezik meg.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A $FG=x$ jelöléssel: ha $\frac{x\cdot 30}{2}>18{,}05$ , akkor Zoli biztosan jobban járt.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Ebből (a kerekítésre való tekintettel) az adódik, hogy $x\geq 1{,}3$ (m).</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A 16,15 $m^2$-hez tartozó $FG$ távolság: $\frac{2\cdot 16{,}15}{30}\approx 1{,}08$ (m).<br>(A monotonitás miatt minden ennél kisebb $x$ esetén Zoli rosszabbul jár.)</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Azt kell már csak megvizsgálni, hogy az 1,1 m, illetve az 1,2 m hosszú $FG$ szakasz esetén jól járhatott-e Zoli.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>FG (m)</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>kerítés költsége (Ft)</td><td>531 857</td><td>531 059</td></tr>
<tr><td>telekrész értéke (Ft)</td><td>495 000</td><td>540 000</td></tr>
<tr><td>egyenleg Zoli szempontjából (Ft)</td><td>–36 857</td><td>+8941</td></tr>
</table></td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Látható, hogy $FG$=1,2 m is előnyös Zolinak.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összefoglalva: ha $FG$ legalább 1,2 m (és legfeljebb 8 m), akkor Zoli jól járt a kerítés megépítésével.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>12 pont</td><td></td></tr>
</table>

| **9. a)** | | |
|---|---|---|
| Az üzem napi haszna $n$ darab készlet gyártása esetén: $h(n)=18n-0{,}2\cdot n^{1{,}5}-12n-300=$ | 1 pont | |
| $=-0{,}2\cdot n^{1{,}5}+6n-300.$ | 1 pont | |
| Az $f:\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R};\ f(x)=-0{,}2\cdot x^{1{,}5}+6x-300$ függvény deriválható és $f'(x)=-0{,}3\cdot x^{0{,}5}+6$. | 1 pont | *Ha a h függvény deriváltját képezi, ez a pont nem jár.* |
| Az $f$ szélsőértékének létezéséhez szükséges, hogy $f'(x)=0$ teljesüljön. | 1 pont | |
| $-0{,}3\cdot x^{0{,}5}+6=0\Leftrightarrow x=400$. | 1 pont | |
| Mivel $f''(x)=-0{,}15\cdot x^{-0{,}5}=-\dfrac{0{,}15}{\sqrt{x}}<0$, | 1 pont | *Ha a vizsgázó a maximumot azzal indokolja, hogy az első derivált az $x=400$ környezetében előjelet vált (pozitívból negatívba megy át), ez a 2 pont jár.* |
| ezért $x=400$ esetén a napi haszon maximális, hiszen $f$ maximumhelye egyben $h$ maximumhelye is (mert a 400 eleme a $h$ értelmezési tartományának is). | 1 pont | |
| Napi 400 építőkészlet gyártása esetén lesz a haszon maximális. | 1 pont | |
| A maximális haszon: $h(400)=-0{,}2\cdot 400^{1{,}5}+6\cdot 400-300=500$ (euró). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

| **9. b)** | | |
|---|---|---|
| Az alapkocka térfogata: $V_k = 27\ \text{cm}^3$. | 1 pont | |
| A gyártás során ennek a kockának minden csúcsából egy olyan (derékszögű) tetraédert vágnak le, amelynek három lapja egybevágó, 1 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög, és ezek a lapok páronként merőlegesek egymásra. | 2 pont | *Ez a 2 pont világos rajz esetén akkor adható, ha arról leolvashatók az adatok is.* |
| Ezen lapok közül bármelyiket alaplapnak tekintve a tetraéder magassága 1 cm. | 1 pont | |
| A 8 csúcsnál levágott tetraéderek térfogatának összege: $V = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ $(\text{cm}^3)$. | 1 pont | |
| A visszamaradó test térfogata: $V_k - V = 25\frac{2}{3}\left(= \frac{77}{3}\text{cm}^3\right)$. | 1 pont | |
| Így $\frac{V_k - V}{V_k} = \frac{77}{81} \approx 95\%$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |