ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
Egy, a feltételeknek megfelelő szám.	1 pont	*Ha ez a megoldásból derül ki, a pont jár.*
A feltételnek megfelelően a következő esetek lehetségesek: 1. eset: 6 darab 6-os jegy: 1 darab hatjegyű szám van.	1 pont	
2. eset: 5 darab 5-ös, 1 darab 1-es jegy.	1 pont	
6 ilyen szám van.	1 pont	
3. eset: 4 darab 4-es, 2 darab 2-es jegy.	1 pont	
Ezekből a számjegyekből $\binom{6}{4}$,	1 pont	
azaz 15 szám képezhető.	1 pont	
4. eset: 3 darab 3-as, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy.	1 pont	
Ebben az esetben $\frac{6!}{3!\cdot 2!}=$	1 pont	
$=60$ megfelelő szám van.	1 pont	
(Más eset nincs,) tehát összesen 82, a feltételnek megfelelő hatjegyű szám képezhető.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

2.		
$x-1\geq 0$ és $5-x\geq 0$,	1 pont	
ezért az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $[1;5]$.	1 pont	
Mindkét oldal nem negatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás (a megállapított értelmezési tartományon). Azt kapjuk, hogy $x\geq 3$.	1 pont	*Indokolt négyzetre emelés esetén jár ez a pont.*
Így $A=[3;5]$.	1 pont	*Ha nem írt értelmezési tartományt, akkor ez a pont nem jár.*
Az $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-2$ egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $]2;\infty[$.	1 pont	
Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő,	1 pont	
ezért $2x-4<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$,	1 pont	
így $2x-4<4$.	1 pont	
Innen $x<4$.	1 pont	
Így $B=]2;4[$.	1 pont	*Ha nem írt értelmezési tartományt, akkor ez a pont nem jár.*
$A\cup B=]2;5]$	1 pont	*A rosszul felírt A és B halmazokból helyesen képzett válaszok esetén is jár az 1-1 pont.*
$A\cap B=[3;4[$	1 pont	
$B\setminus A=]2;3[$	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

Megjegyzések:
1. A megfelelő pontszámok járnak akkor is, ha a vizsgázó egyenlőtlenségekkel adja meg jól a megfelelő halmazokat.
2. Csak a pontosan (végpontok, zártság, nyitottság) megadott halmazok esetén jár a megfelelő pontszám.
3. A halmazjelölés hibája (pl. $B=2<x<4$) miatt egy alkalommal vonjunk le 1 pontot.

3.		
Jelölje f a sportklub felnőtt tagjainak számát. Ekkor a diákok száma a sportklubban $640-f$.	1 pont	
A rendszeresen sportolók száma 640-nek az 55%-a, $0{,}55\cdot 640=352$ fő.	1 pont	
A rendszeresen sportolók aránya a teljes tagságban 0,55. Ennek a $\frac{8}{11}$-ed része, vagyis $0{,}55\cdot\frac{8}{11}=0{,}4$ a rendszeresen sportolók aránya a felnőttek között.	2 pont	
A rendszeresen sportolók aránya a diákok között ennek az arányszámnak a kétszerese, vagyis 0,8.	1 pont	
A rendszeresen sportoló felnőttek száma: $0{,}4\cdot f$.	1 pont	
A rendszeresen sportoló diákok száma: $0{,}8\cdot(640-f)$.	1 pont	
A rendszeresen sportolók száma e két létszám összege: $0{,}4f+0{,}8\cdot(640-f)=352$.	2 pont	
Innen $f=400$	1 pont	
és $640-f=240$.	1 pont	
A felnőtt tagok száma 400, a diákok száma 240.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó <u>számolással</u> jelzi, hogy az eredmény megfelel a szöveg feltételeinek. (A sportoló felnőttek száma 160, a nem sportoló felnőtteké 240, a sportoló diákoké 192, a nem sportoló diákoké 48.)*
Összesen:	**13 pont**	

4. a)		
$n = 8$	1 pont	
$p = 0{,}05$	1 pont	
a várható érték: $n \cdot p = 0{,}4$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
Minden gép $1 - p = 0{,}95$ valószínűséggel indul be a reggeli munkakezdéskor.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy mind a 8 gép beindul: $0{,}95^8$,	2 pont	
ami $\approx 0{,}6634 \quad (66{,}34\%)$.	1 pont	*Bármely, legalább egy tizedesjegyre kerekített helyes érték elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

4. c) első megoldás		
A kérdéses esemény (A) komplementerének (B) valószínűségét számoljuk ki, azaz hogy legfeljebb 2 gép romlik el.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha csak a megoldásból látszik, hogy komplementerrel számol.*
$P(B) = 0{,}95^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^7 + \binom{8}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^6 =$	2 pont	*Akkor is megkapja a 2 pontot, ha ez nincs leírva, de kiderül a helyes megoldásból.*
$= 0{,}95^8 + 8 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^7 + 28 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^6 \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}66342 + 0{,}27933 + 0{,}05146 \approx 0{,}9942$	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha nem írja fel, de jól számolja ki az összeget.*
$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9942 = 0{,}0058$. Tehát valóban 0,0058 (0,58%) a termelés leállításának valószínűsége.	1 pont	*E nélkül a mondat nélkül is jár az 1 pont a helyes kivonásért.*
Összesen:	**7 pont**	

4. c) második megoldás		
A kérdéses esemény (A) pontosan akkor következik be, ha a meghibásodott gépek száma 3, 4, 5, 6, 7, vagy 8. Ha A_k jelöli azt az eseményt, hogy pontosan k db gép hibásodik meg, akkor $A = A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$ (Az A_k események páronként kizárják egymást, ezért) $P(A) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8)$.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha csak a megoldásból látszik, hogy jó modellel számol.*
$P(A) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^5 + \binom{8}{4} \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^4 + \binom{8}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^3 + \binom{8}{6} \cdot 0{,}05^6 \cdot 0{,}95^2 + \binom{8}{7} \cdot 0{,}05^7 \cdot 0{,}95^1 + \binom{8}{8} \cdot 0{,}05^8$	2 pont	*Ez, ha nincs explicit leírva, de kiderül a helyes megoldásból, akkor is megkapja a 2 pontot. Ha az összeg 1 tagja hiányzik vagy hibás, 1 pontot kap.*
(Az összeg tagjait öt tizedesjegy pontossággal számítva az utolsó két tag már 0,00000-nak adódik,) $P(A) \approx (0{,}00542 + 0{,}00036 + 0{,}00002 + 0{,}00001 =)\, 0{,}00581$.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha nem írja fel, de jól számolja ki az összeget.*
Tehát négy tizedesjegyre kerekítve valóban 0,0058 (0,58%) a termelés leállításának valószínűsége.	1 pont	*E nélkül a mondat nélkül is jár az 1 pont a helyes közelítésért.*
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés:
Ha számolási hiba miatt nem kapja meg P(A) értékére közelítően a 0,0058-et, az utolsó 1 pontot nem kaphatja meg.

II.

5. a)		
Az $A_1C_0C_1$ háromszög területe: $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$.	1 pont	
Az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszöget $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arányú hasonlósággal lehet átvinni az $A_{n+1}C_nC_{n+1}$ háromszögbe ($n \in \mathbf{N}^+$).	1 pont	*Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával következetesen és jól számol a későbbiekben.*
A hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel szerint	1 pont	*Ha a tételt a megoldásban helyesen alkalmazza, jár a pont.*
az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszög területe: $t_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 t_{n-1} = \frac{1}{3}t_{n-1}$ (ha $n > 1$).	1 pont	*Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával következetesen és jól számol a későbbiekben.*
A területek összegéből képezett $(t_1 + t_2 + ... + t_n + ...)$ tehát olyan mértani sor,	1 pont	
amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$.	1 pont	
A végtelen sok háromszög területének összege: $T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $(\approx 0{,}433)$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés:
Teljes pontszámot kap a vizsgázó, ha a számításai során kerekített értékeket (is) használ. Ha nem a kerekítési szabályoknak megfelelően kerekít, akkor 1 pontot veszítsen.

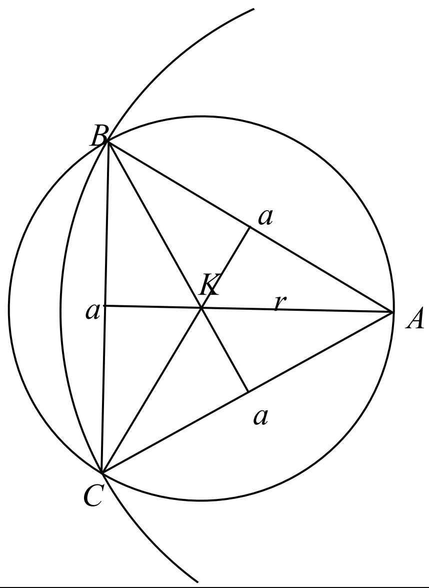
5. b) **első megoldás**		
Jelölje d_n a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát ($n \in \mathbf{N}^+$) $d_1 = C_0C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
A hasonlóság miatt minden $n > 1$ esetén $d_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}$.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *következetesen és jól számol a későbbiekben.*
A $\{d_n\}$ sorozat tehát olyan mértani sorozat,	1 pont	
amelynek első tagja és hányadosa is $\frac{1}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
Vizsgáljuk az $S_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$ összegeket! A $d_1 + d_2 + ... + d_n + ...$ olyan mértani sor, melynek hányadosa $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tehát van határértéke.	1 pont	
Az $\{S_n\}$ sorozat határértéke (a mértani sor összege): $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$.	1 pont	
$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Mivel $\sqrt{3}$ kisebb, mint 1,8, ezért $\{S_n\}$ határértéke kisebb, mint 1,4.	1 pont	$\frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1{,}366 < 1{,}4$
Az $\{S_n\}$ sorozat szigorúan növekedő,	1 pont	
ezért az $\{S_n\}$ sorozat egyetlen tagja sem lehet nagyobb a sorozat határértékénél (tehát igaz az állítás).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	
Megjegyzés: *Ha a vizsgázó kerekített értékekkel számol, és nem indokolja, hogy ez miért nem okoz hibát a bizonyításban, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.*		

5. b) második megoldás		
Jelölje d_n a $C_{n-1}C_n$ szakasz hosszát ($n \in \mathbf{N}^+$) $d_1 = C_0C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
A hasonlóság miatt minden $n > 1$ esetén $d_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d_{n-1}$.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha a második és első háromszög közötti hasonlóságot említi csak, de a hasonlóság arányával* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *következetesen és jól számol a későbbiekben.*
A $\{d_n\}$ sorozat tehát olyan mértani sorozat,	1 pont	
amelynek első tagja és hányadosa is $\frac{1}{\sqrt{3}}$.	1 pont	
$S_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n} - 1}{1 - \sqrt{3}}$.	1 pont	*S_n bármely helyesen felírt alakjáért jár a pont.*
Azt kell belátni, hogy minden pozitív egész n esetén $\frac{\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n} - 1}{1 - \sqrt{3}} < 1{,}4$ teljesül.	2 pont	
Átrendezve: $\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n} > 2{,}4 - 1{,}4\sqrt{3}\ (\approx -0{,}025)$	1 pont	
Mivel a bal oldalon pozitív szám áll, és $2{,}4 - 1{,}4\sqrt{3}\ (\approx -0{,}025)$ negatív szám, ezért az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	
Megjegyzés: *Ha a vizsgázó kerekített értékekkel számol, és nem indokolja, hogy ez miért nem okoz hibát a bizonyításban, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.*		

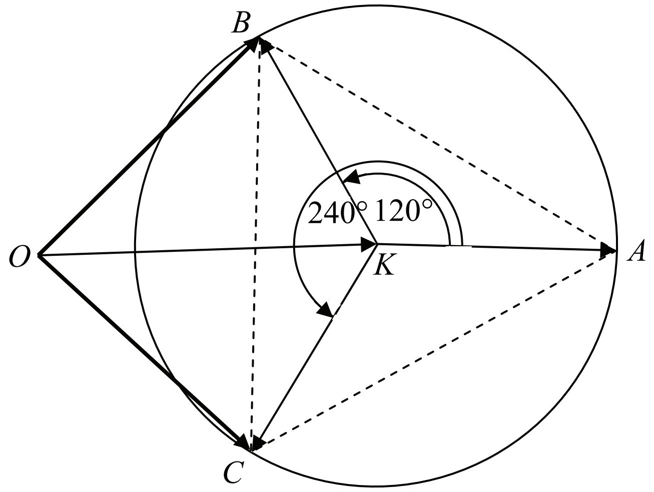
6. a) első megoldás		
Teljes négyzetté kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja: $(x+3)^2+(y+2)^2=16$,	1 pont	
ahonnan a kör középpontja: $K(-3; -2)$. (sugara: $r=4$)	1 pont	
A kör K középpontja az ABC szabályos háromszög súlypontja.	1 pont	
Az AK szakasz a háromszög AF súlyvonalának kétharmada,	1 pont	
ahonnan $F(-5\,;-2)$.	1 pont	
A szabályos háromszög AF súlyvonala egyben oldalfelező merőleges is,	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, jár ez a 2 pont.*
így a BC oldalegyenes az AF súlyvonalra F-ben állított merőleges egyenes.	1 pont	
A BC egyenes egyenlete tehát $x=-5$.	1 pont	
A kör egyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy $y_1=2\sqrt{3}-2$ és $y_2=-2\sqrt{3}-2$.	2 pont	
A szabályos háromszög másik két csúcsa: $B(-5\,;2\sqrt{3}-2)$ és $C(-5\,;-2\sqrt{3}-2)$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	*Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.*

6. a) második megoldás		
Teljes négyzetté kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja: $(x+3)^2+(y+2)^2=16$,	1 pont	
ahonnan a kör középpontja: $K(-3; -2)$. (sugara: $r=4$)	1 pont	
Mivel *KA* szimmetriatengelye a háromszögnek, ezért *KAB* és *KAC* szögek 30 fokosak.	1 pont	
A *BA* egyenes meredeksége így $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.	1 pont	
A *BA* egyenes meredekségét és egy pontját ismerjük, ebből az egyenlete $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)-2$.	1 pont	
Ezt beírva a kör egyenletébe: $(x+3)^2+(y+2)^2-16=$ $=(x+3)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-16=$	1 pont	
$=x^2+6x+9+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}-16$.	1 pont	
Hárommal szorozva és rendezve: $4x^2+16x-20=0$.	1 pont	
Ennek gyökei az 1 és a -5.	1 pont	
(Az $x=1$ az *A* ponthoz tartozik.) Az $x=-5$-höz tartozó *y* érték a $2\sqrt{3}-2$, tehát $B(-5\,;\,2\sqrt{3}-2)$,	1 pont	
C pont pedig a *B* pontnak az $y=-2$ egyenesre vett tükörképe, azaz $C(-5\,;\,-2\sqrt{3}-2)$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	*Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.*

6. a) harmadik megoldás



Teljes négyzetté kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja: $(x+3)^2+(y+2)^2=16$,	1 pont	
ahonnan a kör középpontja: $K(-3; -2)$ és sugara: $r=4$.	1 pont	
A körbe írt szabályos háromszög oldalának hosszát jelölje *a*. A kör középpontja a szabályos háromszög súlypontja,	1 pont	
ezért $\frac{a\sqrt{3}}{3}=4$,	1 pont	
ahonnan $a=4\sqrt{3}$.	1 pont	
A szabályos háromszög másik két csúcsa illeszkedik az eredeti körre, és az $A(1; -2)$ középpontú, $a=4\sqrt{3}$ sugarú körre is, ezért koordinátáik a két kör egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként adódnak.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki, akkor is jár a pont.*
Ennek a körnek az egyenlete: $(x-1)^2+(y+2)^2=48$, vagy más alakban $x^2+y^2-2x+4y-43=0$.	1 pont	
A két kör egyenletét kivonva egymásból adódik, hogy $x=-5$.	1 pont	
Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy $y_1=2\sqrt{3}-2$ és $y_2=-2\sqrt{3}-2$.	2 pont	
A szabályos háromszög másik két csúcsa: $B(-5\,;2\sqrt{3}-2)$ és $C(-5\,;-2\sqrt{3}-2)$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	*Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.*

6. a) negyedik megoldás		
		
Teljes négyzetté kiegészítéssel és rendezéssel adódik a kör egyenletének másik alakja: $(x+3)^2+(y+2)^2=16$,	1 pont	
ahonnan a kör középpontja: $K(-3;-2)$. (sugara: $r=4$)	1 pont	
A körbe írt (pozitív körüljárású) ABC szabályos háromszög B, illetve C csúcsát megkapjuk, ha az adott kör K középpontja körül elforgatjuk az A csúcsot $+120°$-kal, illetve $+240°$-kal.	2 pont	
Forgassuk a $\overrightarrow{KA}$ vektort. $\overrightarrow{KA}=4\mathbf{i}$, azaz $\overrightarrow{KA}(4;0)$.	1 pont	
Ekkor $\overrightarrow{KB}=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-2\mathbf{i}+2\sqrt{3}\mathbf{j}$,	1 pont	
$\overrightarrow{KC}=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-2\mathbf{i}-2\sqrt{3}\mathbf{j}$.	1 pont	
Így a B csúcs helyvektora $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB}=$	1 pont	
$=-5\mathbf{i}+\left(2\sqrt{3}-2\right)\mathbf{j}$, azaz a háromszög B csúcsa: $B\left(-5;2\sqrt{3}-2\right)$.	1 pont	
A C csúcs helyvektora $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KC}=$	1 pont	
$=-5\mathbf{i}-\left(2\sqrt{3}+2\right)\mathbf{j}$, azaz a háromszög C csúcsa: $C\left(-5;-2\sqrt{3}-2\right)$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	*Aki helyesen számol, de közelítő értéket használ, 2 pontot veszít.*

6. b)		
A kérdéses valószínűség a beírt szabályos háromszög és a kör területének hányadosa.	2 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, akkor is jár a 2 pont.*
A kör területe: $T_k = r^2\pi$.	1 pont	*Ha a vizsgázó a területek számszerű értékével számol* ($T_k \approx 50{,}27$ *és* $T_h \approx 20{,}78$)*, akkor is járnak ezek a pontok.*
Az r sugarú körbe írt szabályos háromszög területe: $T_h = 3\cdot\frac{r^2\cdot\sin 120°}{2} = \frac{3r^2\cdot\sqrt{3}}{4}$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $P = \frac{T_h}{T_k} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}41$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó százalékként adja meg két tizedesjegy pontossággal a választ (41,35%).*
Összesen:	**5 pont**	

7. a)		
16 nyomólemez óránként 1600 plakát elkészítését teszi lehetővé,	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki, akkor is jár a pont.*
ezért a teljes mennyiséghez $\frac{14\ 400}{1600} = 9$ óra szükséges.	1 pont	
A nyomólemezek előállítási költsége és a munkaidő további költségének összege: $16\cdot 2500 + 9\cdot 40\ 000 = 400\ 000$ Ft.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b) első megoldás		
Ha a nyomda x db nyomólemezt alkalmaz, akkor ennek költsége $2500x$ forint.	1 pont	
Az x db lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14 400 darab kinyomtatása $\frac{14400}{100x} = \frac{144}{x}$ órát vesz igénybe,	1 pont	
és ez további $\frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$ forint költséget jelent.	1 pont	
A két költség összege: $K(x) = 2500x + \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$ forint, ahol az x pozitív egész.	1 pont	
Tekintsük a pozitív valós számok halmazán a K utasítása szerint értelmezett függvényt!	1 pont*	
(Az így megadott K függvénynek a minimumát keressük. A K függvény deriválható, és minden $0 < x$ esetén) $K'(x) = 2500 - \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x^2}$.	1 pont	
A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $K'(x) = 0$ legyen.	1 pont	
$2500 - \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x^2} = 0$, innen $x^2 = 2304$,	1 pont	
$x = 48$ (mert $0<x$).	1 pont	
Annak igazolása, hogy az $x = 48$ (abszolút) minimumhely.	1 pont	*A második derivált:* $K''(x) = \frac{1{,}152 \cdot 10^7}{x^3}$.
Azaz 48 nyomólemez alkalmazása esetén lesz minimális a költség.	1 pont	
48 darab nyomólemez alkalmazása esetén a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege: $K(48) = 240\ 000$ (forint).	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

**Megjegyzés:*
Egy pont jár annak említéséért, hogy bár a valós számokon értelmezett függvényt írtunk fel, a feladat megoldása csak pozitív egész lehet (például: a 48 pozitív egész szám, ezért megoldása a feladatnak).

7. b) második megoldás		
Ha a nyomda x db nyomólemezt alkalmaz, akkor ezek ára $2500x$ forint.	1 pont	
Az x db lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14 400 darab kinyomtatása $\frac{14400}{100x} = \frac{144}{x}$ órát vesz igénybe,	1 pont	
és ez további $\frac{5{,}76\cdot 10^6}{x}$ forint költséget jelent.	1 pont	
A két költség összege: $K(x) = 2500x + \frac{5{,}76\cdot 10^6}{x}$ forint (ahol $0 < x$ és x egész).	1 pont	
(Ennek a minimumát keressük.) Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséggel:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha csak a megoldásból derül ki, hogy ezt alkalmazza.*
$2500x + \frac{5{,}76\cdot 10^6}{x} \ge 2\cdot\sqrt{2500x\cdot\frac{5{,}76\cdot 10^6}{x}}$,	2 pont	
$2500x + \frac{5{,}76\cdot 10^6}{x} \ge 2\cdot\sqrt{1{,}44\cdot 10^{10}} = 2{,}4\cdot 10^5$.	1 pont	
(A két költség összege tehát nem lehet kevesebb 240 000 forintnál.) A 240 000 Ft akkor lehetséges, ha $2500x = \frac{5{,}76\cdot 10^6}{x}$,	1 pont	
amiből ($x > 0$ miatt) $x = 48$ adódik.	1 pont	
A legkisebb költség tehát 48 darab nyomólemez alkalmazása esetén lép fel.	1 pont	
A nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költség ekkor összesen 240 000 forint. (A nyomdai előállítás 3 óráig tart, a nyomólemezek ára 120 000 forint, és ugyanennyi a ráfordított időből adódó további költség is.)	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

Megjegyzés:
Ha a vizsgázó véges sok (akár csak néhány) eset vizsgálatával (pl. táblázattal, szisztematikus próbálkozással) arra a megállapításra jut, hogy 48 nyomólemez alkalmazása esetén lesz a legkisebb a költség, akkor erre a sejtésére kapjon 2 pontot.
A 48-hoz tartozó kétféle költség összegét kiszámolja: 240 ezer Ft. 1 pont
Ha a nyomólemezek száma 24 vagy kevesebb, akkor már csak a munkaórák száma miatt (legalább 6 munkaóra) legalább 240 ezer forint költség keletkezik, tehát ezeket az eseteket nem kell külön vizsgálni. 1 pont
Ha a nyomólemezek száma 96 vagy több, akkor már csak a nyomólemezek ára miatt is legalább 240 ezer Ft költség keletkezik, ezért ezeket az eseteket sem kell külön vizsgálni. 1 pont
Tehát a nyomólemezek száma több mint 24 és kevesebb, mint 96. 1 pont
A 25 és 95 közötti összes érték kiszámolása 5 pont
Evvel egyenértékű bármely helyes indoklás is 5 pontot ér (például a vizsgázó kevesebb lépésben, hibátlan logikával szűkíti a nyomólemezek lehetséges számát). Ha a monotonitást csak az egyik irányban sikerül bizonyítania, akkor 3 pontot kapjon, ha a monotonitást egyik irányban sem tudja bizonyítani, akkor ne kapjon pontot erre a részre.
A legkisebb költség tehát 48 darab nyomólemez alkalmazása esetén lép fel. 1 pont
Az utolsó pontot nem kaphatja meg, ha az előző, 5 pontos részre nem kapott pontot.

8.		
Legyen a négyzetes oszlop alapéleinek hossza *a* (cm) és a magasság hossza *b* (cm). (Az *a* és *b* számok 2-nél nagyobb egészek.) Mivel minden él hossza legalább 3,	1 pont	*Ha ezt a gondolatot a megoldás során jól használja, ez a 2 pont jár.*
azoknak az egységkockáknak lesz pontosan két lapja piros, melyek az élek mentén, de nem a csúcsokban helyezkednek el.	1 pont	
A két db négyzetlap 8 élén $8\cdot(a-2)$,	1 pont	
a 4 oldalélen $4\cdot(b-2)$ ilyen festett kocka van.	1 pont	
$8\cdot(a-2)+4\cdot(b-2)=28$,	1 pont	
innen $2a+b=13$.	1 pont	
Az élhosszak megfelelő értékei: *a*: 5, 4, 3 *b*: 3, 5, 7	6 pont	*A 6 pont a felírt diophantikus egyenlet helyes megoldásáért jár. Megfelelő (a; b) értékpáronként 2-2 pont.*
A három lehetséges négyzetes oszlop	1 pont	*Ez a pont csak a három helyes adatpár esetén jár.*
térfogata rendre 75 cm^3, 80 cm^3 és 63 cm^3.	3 pont	
Összesen:	**16 pont**	*Ha a vizsgázó indoklás nélkül közli a három lehetséges négyzetes oszlop méreteit, és megadja a térfogatokat, legfeljebb 6 pontot kaphat.*

9.		
$\sin x \cdot \cos y = 0$ (1) $\sin x + \sin^2 y = \frac{1}{4}$ (2) Az (1) egyenletből, felhasználva, hogy egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik szorzótényezője 0, adódnak a következő esetek: a) $\sin x = 0$	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldásaira vonatkozó feltétel miatt három x érték tesz eleget az (1) egyenletnek $(x_1 = 0; \quad x_2 = \pi; \quad x_3 = 2\pi)$.	1 pont	
A $\sin x = 0$ feltételt behelyettesítve a (2) egyenletbe: $\sin^2 y = \frac{1}{4}$,	1 pont	
tehát $\sin y = \frac{1}{2}$ (*),	1 pont	
vagy $\sin y = -\frac{1}{2}$. (**)	1 pont	
Az első (*) egyenletnek a feltétel miatt két y érték tesz eleget $\left(y_1 = \frac{\pi}{6}; \quad y_2 = \frac{5\pi}{6}\right)$.	1 pont	
A második (**) egyenletnek a feltétel miatt két y érték tesz eleget $\left(y_3 = \frac{7\pi}{6}; \quad y_4 = \frac{11\pi}{6}\right)$.	1 pont	
Így összesen négy y érték tesz eleget az egyenletrendszernek ebben az esetben.	1 pont	
Tehát ebben az esetben összesen $3 \cdot 4 = 12$ darab $(x; y)$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha rossz eredményt ad meg a lehetséges x és az y értékek számára, de helyesen összeszorozza ezeket a számokat.*

b) $\cos y = 0$	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldásaira vonatkozó feltétel miatt két y érték tesz eleget a (1) egyenletnek $\left(y_5 = \frac{\pi}{2};\quad y_6 = \frac{3\pi}{2}\right)$.	1 pont	
Ha $\cos y = 0$, akkor $\sin^2 y = 1$,	1 pont	
amit behelyettesítve a (2) egyenletbe: $\sin x = -\frac{3}{4}$,	1 pont	
ami a $[0;2\pi]$ intervallumban két x értékre teljesül $(x_1 \approx 3{,}9897 \quad x_2 \approx 5{,}4351)$.	1 pont	
Ebben az esetben $2 \cdot 2 = 4$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek.	1 pont	*Ezt a pontot akkor is kapja meg, ha rossz eredményt ad meg a lehetséges x és az y értékek számára, de helyesen összeszorozza ezeket a számokat.*
(Az a) és b) esetben különböző számpárokat kaptunk, így) összesen $12 + 4 = 16$ rendezett számpár tesz eleget az egyenletrendszernek.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a vizsgázó megoldása során feltétel nélkül oszt $\sin x$ *vagy* $\cos y$ *kifejezéssel, megoldására legfeljebb 11 pontot kaphat.*
2. A feladat megoldásához nem tartozik hozzá a számpárok megadása. Ezért a „visszakeresésnél” elkövetett hibákért ne vonjunk le pontot!
3. Ha a vizsgázó fokokban helyesen végezte a számításokat, akkor is teljes pontszámot kaphat.