ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011. október 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. első megoldás		
A havi zsebpénzek értékei (forintban számolva) egy számtani sorozat tagjai,	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a 2 pont.*
ahol $d = 50$, $a_n = 1850$, $S_n = 35100$.	1 pont	
$1850 = a_1 + (n - 1)\cdot 50$,	1 pont	
azaz $a_1 = 1900 - 50n$.	1 pont	
$S_n = 35100 = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{1900 - 50n + 1850}{2}\cdot n$,	2 pont	*Az összegképlet felírásáért önmagában nem jár pont.*
($70200 = 3750n - 50n^2$) rendezve: $n^2 - 75n + 1404 = 0$.	2 pont	
Megoldva: $n = 36$ vagy 39.	1 pont	
$n = 39$ nem megoldás, mert ekkor a_1 negatív.	1 pont	
Ha $n = 36$, akkor $a_1 = 1900 - 50\cdot 36 = 100$.	1 pont	
Kinga induló zsebpénze 100 Ft volt, és a 10. születésnapja óta 35 hónap telt el. (Vagy más megfogalmazással: a 36. hónapban volt 1850 Ft a havi zsebpénze.)	1 pont	*A pont nem jár, ha a válasz: 36 hónap telt el a 10. születésnap óta.*
Összesen:	**12 pont**	

1. második megoldás		
A havi zsebpénzek értékei (forintban számolva) egy számtani sorozat tagjai,	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a 2 pont.*
ahol $d = 50$, $a_n = 1850$, $S_n = 35100$.	1 pont	
$1850 = a_1 + (n - 1)\cdot 50$,	1 pont	
azaz $n = \frac{1900 - a_1}{50}$.	1 pont	
$S_n = 35100 = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{(a_1 + 1850)\cdot(1900 - a_1)}{100}$,	2 pont	*Az összegképlet felírásáért önmagában nem jár pont.*
($3510000 = -a_1^2 + 50a_1 + 3515000$) rendezve: $a_1^2 - 50a_1 - 5000 = 0$.	2 pont	
Megoldva: $a_1 = 100$ vagy $a_1 = -50$.	1 pont	
Mivel a_1 csak pozitív lehet, ezért $a_1 = 100$.	1 pont	
Ekkor $n = 36$.	1 pont	
Kinga induló zsebpénze 100 Ft volt, és a 10. születésnapja óta 35 hónap telt el. (Vagy más megfogalmazással: a 36. hónapban volt 1850 Ft a havi zsebpénze.)	1 pont	*A pont nem jár, ha a válasz: 36 hónap telt el a 10. születésnap óta.*
Összesen:	**12 pont**	

Megjegyzés: Jár a teljes pontszám akkor is, ha a vizsgázó nem a megfelelő összefüggések alkalmazásával jut el a jó eredményig, hanem a sorozat tagjainak egyenkénti felírásával.

2. a)		
Pakisztán lakosságszáma az előrejelzés alapján 147 millióról 357 millióra nő 62 év alatt.	1 pont	
Így ha az évi növekedés p százalékos, akkor $357 = 147 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{62}$,	1 pont	
ahonnan $p = 100 \cdot \left(\sqrt[62]{\frac{357}{147}} - 1\right)$.	1 pont	
Kiszámolva (a kért kerekítéssel) $p \approx 1{,}44\%$.	1 pont	
A vizsgált növekedési időszak 32 év,	1 pont	
így a feltételezés és az előrejelzés alapján 2020-ban Pakisztán lakossága $147 \cdot 1{,}0144^{32} \approx$	1 pont	
≈ 232 (millió fő).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. b)		
Hat ország szerepel mindkét oszlopban: Kína, India, Egyesült Államok, Indonézia, Pakisztán, Brazília.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás menetéből derül ki, akkor is jár ez a pont.*
Erre a hat országra nézve a népesség átlaga (millió főben) 1988-ban: $\frac{1255+976+274+207+165+147}{6} = 504$, és 2050-ben: $\frac{1533+1517+357+348+318+243}{6} \approx 719{,}33$.	1 pont	*Ha valamelyik adat hiányzik, vagy hibás, ez az 1 pont nem jár.*
Az átlagos népességszám közelítőleg 215,33 (millió fő)-vel nő.	1 pont	
(Mivel a minta hatelemű, ezért a medián a rendezett adatsokaság két középső elemének átlaga.) Így a medián 1988-ban: $\frac{274+207}{2} = 240{,}5$, és 2050-ben: $\frac{357+348}{2} = 352{,}5$.	1 pont	*Ha valamelyik adat hiányzik, vagy hibás, ez az 1 pont nem jár.*
A medián is nő, 112 (millió fő)-vel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a)		
Mivel minden fiú legfeljebb egy táncban lépett fel, ezért a fiúk száma a táblázat alapján 15,	1 pont	
a lányok száma pedig 17.	1 pont	
A 17 lányból kettőt $\binom{17}{2}=136$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
6 lány táncolt kán-kánt, közülük kettőt $\binom{6}{2}=15$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
A keresett valószínűség: $P=\frac{15}{136}(\approx 0{,}11)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b)		
A pontosan két táncban fellépő diák csak lány lehet.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a 2 pont.*
Mivel 2 lány egyik táncban sem lépett fel, ezért 15 lány között kell keresnünk a pontosan kétszer táncolókat.	1 pont	
Ha a pontosan kétszer táncolók közül x a keringőző és kán-kánozó, y a kán-kánozó és hip-hopozó, z pedig a keringőző és hip-hopozó lányok száma, akkor a csak keringőző lányok száma $9-x-z-2$,	1 pont	*Ha jól kitöltött Venn-diagramm alapján, vagy más logikai úton jut el a helyes részeredményhez, akkor is jár az 5 pont.*
a csak kán-kánozó lányok száma $6-x-y-2$,	1 pont	
csak hip-hopozó lányok száma $10-y-z-2$.	1 pont	
A logikai szita formula alapján $(9-x-z-2)+(6-x-y-2)+(10-y-z-2)+$ $+x+y+z+2=15$.	1 pont	
ahonnan $x+y+z=6$.	1 pont	
Az osztály tanulói közül egy diák kiválasztására 32 lehetőségünk van,	1 pont	
így a keresett valószínűség: $P=\frac{6}{32}\left(=\frac{3}{16}=0{,}1875\right)$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

4.		
(Azonos alapú logaritmusra áttérve:) $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 2$.	2 pont	
Mivel egy (pozitív) számnak és a szám reciprokának összege pontosan akkor 2, ha a szám 1,	2 pont	*Ez a 4 pont akkor is jár, ha a másodfokúra visszavezethető egyenletet írja fel, és oldja meg jól a vizsgázó.*
ezért $\log_x y = 1$,	1 pont	
azaz $x = y$.	1 pont	
Behelyettesítve a második egyenletbe: $2\sin 5x = 1$, azaz $\sin 5x = \frac{1}{2}$.	1 pont	
Innen $5x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,	1 pont	*Ez a 2 pont nem jár, ha a vizsgázó fokban vagy vegyesen írja fel a megoldásokat, vagy nem veszi figyelembe a periódust.*
vagy $5x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$,	1 pont	
ahol $k \in \mathbf{N}$ és $l \in \mathbf{N}$.	1 pont	*Ha $k \in \mathbf{N}$ szerepel mindkét helyen, akkor is jár a pont.*
A megoldások így: $x_1 = y_1 = \frac{\pi}{30} + \frac{2}{5} \cdot k \cdot \pi \quad (k \in \mathbf{N})$,	1 pont	*Ez a 2 pont jár akkor is, ha a vizsgázó fokban vagy vegyesen írja fel a megoldásokat, de figyelembe veszi a periódust. Periódus nélküli megoldások esetén nem jár a 2 pont.*
$x_2 = y_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{5} \cdot l \cdot \pi \quad (l \in \mathbf{N})$.	1 pont	
A kapott értékek (melyek egyike sem 1) kielégítik az eredeti egyenleteket.	1 pont	*Ez az 1 pont akkor jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz, vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozik.*
Összesen:	**13 pont**	

II.

5. első megoldás		
A feltételek és az adatok alapján a keresett egyenes nem lehet párhuzamos az y tengellyel, ezért egyenletét kereshetjük $y = mx + b$ alakban.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha indoklás nélkül használja az $y = mx + b$ alakot.*
Mivel a $P(2; 5)$ pont illeszkedik az egyenesre, ezért $5 = 2m + b$,	1 pont	
ahonnan $b = 5 - 2m$, és így a keresett egyenes egyenlete $y = mx + 5 - 2m$.	1 pont	
Az adott egyenletű egyenesek és a keresett egyenes metszéspontjának első koordinátáját a megfelelő egyenletekből álló paraméteres egyenletrendszerekből határozhatjuk meg.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
$x + y = 4$ $y = mx + 5 - 2m$	1 pont	
y-t az első egyenletbe helyettesítve és rendezve: $(m+1)x = 2m - 1$.	1 pont	
Mivel $m = -1$ esetén a két adott egyenessel párhuzamos egyenest kapunk, ezért $m \neq -1$, és	1 pont	
$x_1 = \frac{2m-1}{m+1}$.	1 pont	
Az $x + y = 6$ $y = mx + 5 - 2m$ egyenletrendszerből az előzőhöz hasonló módon kapjuk, hogy $x_2 = \frac{2m+1}{m+1}$.	1 pont	*Ha a vizsgázó az előző egyenletrendszert rosszul oldja meg, ez utóbbit pedig helyesen, akkor a megfelelő 4x1 pontot <u>itt</u> kapja meg.*
A feltétel szerint $x_1 - x_2 = 3$,	1 pont	
vagy $x_2 - x_1 = 3$.	1 pont	
Az első esetben $m_1 = -\frac{5}{3}$,	1 pont	
a második esetben $m_2 = -\frac{1}{3}$.	1 pont	
A kapott értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy $b_1 = \frac{25}{3}$, illetve $b_2 = \frac{17}{3}$.	1 pont	
A feltételeknek eleget tevő egyenesek egyenlete: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}$ $(5x + 3y = 25)$,	1 pont	
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$ $(x + 3y = 17)$.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

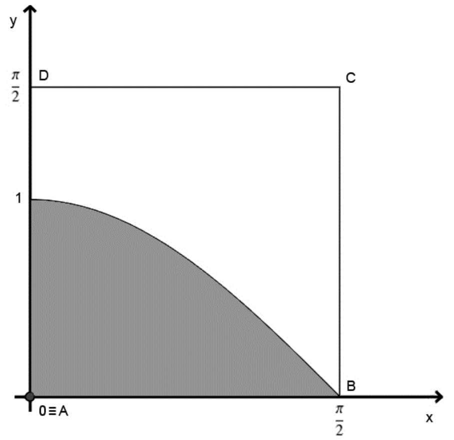
Megjegyzés: Ha a két első koordináta különbségeként csak az egyik esettel foglalkozik, akkor legfeljebb 12 pontot kaphat.

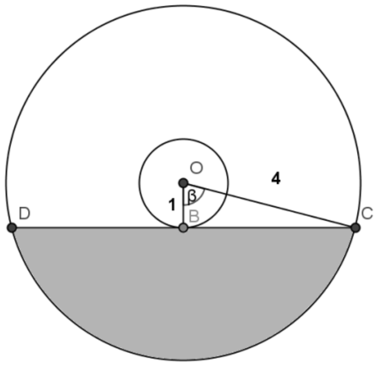
5. második megoldás		
A feltételek és az adatok alapján a keresett egyenes nem lehet párhuzamos az y tengellyel, ezért egyenletét keressük $y = mx + b$ alakban.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha indoklás nélkül használja az y = mx + b alakot.*
A meredekség meghatározása végett keressünk olyan egyenest, amely nem feltétlenül megy át a (2; 5) ponton, de a második feltételt teljesíti, azaz az adott egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek abszcisszáinak különbsége 3.	1 pont	*Kevésbé részletes, de helyes indoklás esetén is jár ez a pont.*
Ha a keresett egyenes az $x + y = 4$ egyenletű egyenesnek például a (4; 0) pontján megy át,	1 pont	*Bármely más, az adott egyenesre illeszkedő pont kijelöléséért is jár az 1 pont.*
akkor az $x + y = 6$ egyenletű egyenesnek az 1	1 pont	
vagy 7 abszcisszájú pontjára,	1 pont	
tehát az (1; 5),	1 pont	
vagy a (7; −1) pontra kell illeszkednie.	1 pont	
A (4; 0) és (1; 5) pontokra illeszkedő egyenes meredeksége: $m_1 = \frac{5-0}{1-4} = -\frac{5}{3}$.	1 pont	
A (4; 0) és (7; −1) pontokra illeszkedő egyenes meredeksége: $m_2 = \frac{-1-0}{7-4} = -\frac{1}{3}$.	1 pont	
A keresett egyenesek biztosan párhuzamosak e kettő valamelyikével.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
Így a keresett egyenesek egyenlete: $y = -\frac{5}{3}x + b_1$, illetve $y = -\frac{1}{3}x + b_2$.	1 pont	
A keresett egyenesek illeszkednek a (2; 5) pontra,	1 pont	
ezért behelyettesítéssel kapjuk, hogy $b_1 = \frac{25}{3}$,	1 pont	
illetve $b_2 = \frac{17}{3}$.	1 pont	
A feltételeknek eleget tevő egyenesek egyenlete: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}$ ($5x + 3y = 25$),	1 pont	
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$ ($x + 3y = 17$).	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

Megjegyzés: Ha a két első koordináta különbségeként csak az egyik esettel foglalkozik, akkor legfeljebb 12 pontot kaphat.
A kapott egyenesek metszéspontjai a két megadott egyenessel (6,5; –2,5) és (3,5; 2,5), illetve (–2,5; 6,5) és (0,5; 5,5).

6. a)		
A dobott pontok összege a következő esetekben lesz prím: 1+1, 1+2, 1+4, 2+3, 1+6, 2+5, 3+4, 5+6.	1 pont	
Az 1+1 eset kivételével mindegyik összeg kétféleképpen valósulhat meg, így az *A* eseményt 15 elemi esemény valósítja meg.	1 pont	
(Az összes elemi esemény száma $6\cdot 6=36$, ezért) $P(A)=\frac{15}{36}$.	1 pont	
A dobott pontok összege a következő esetekben lesz 3-mal osztható: 1+2, 1+5, 2+4, 3+3, 3+6, 4+5, 6+6.	1 pont	
A 3+3 és 6+6 esetek egyféleképpen, a többi kétféleképpen valósulhat meg,	1 pont	
így $P(B)=\frac{12}{36}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

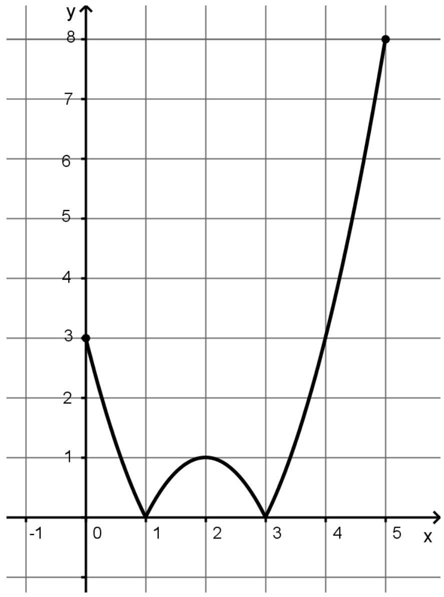
6. b)		
A hat számjegyből hármat $\binom{6}{3}=20$ különböző módon tudunk kiválasztani.	1 pont	
A 4-gyel oszthatóság szabálya alapján kedvező esetet kapunk, ha a kiválasztott három számjegy között van kettő olyan, amelyekből 4-gyel osztható kétjegyű szám képezhető.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
Ezek között négy olyan hármas van, amely nem tartalmaz két megfelelő számjegyet: (1, 3, 5); (1, 3, 4); (1, 4, 5); (3, 4, 5).	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megfelelő számhármasokat (16 db) sorolja fel vagy számolja össze helyesen. Egy pont jár, ha legfeljebb két számhármast téveszt el.*
Így a keresett valószínűség: $P=\frac{20-4}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. c)		
A négyzet és az f függvény grafikonjának felvétele közelítő pontossággal.  	1 pont	*Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a pont.*
A négyzet területe $\frac{\pi^2}{4}$.	1 pont	
A koordinátatengelyek és az f függvény grafikonja által határolt tartomány területe: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$	1 pont	*Ha a vizsgázó indoklás nélkül közli, hogy a keresett terület 1, akkor 1 pontot kap.*
$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.	1 pont	
(A valószínűség kiszámításának geometriai modelljét alkalmazva, a keresett valószínűség:) $P = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2} (\approx 0{,}405)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a)		
A fedőkör tengelyre merőleges síkmetszete, jó ábra. 	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha jó ábra nélkül helyesen számol. Ha a megadott átmérőkkel, mint sugarakkal számol a vizsgázó, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*
$\cos\beta = \frac{1}{4}$, amiből $\beta \approx 75{,}52°$.	1 pont	
(Így a kérdéses terület az O középpontú 2β középponti szögű körcikk és az ODC háromszög területének különbségeként adódik.) $T_{\text{körcikk}} = \frac{2\beta}{360°} \cdot 4^2\pi \approx 21{,}09\ (\text{cm}^2)$,	1 pont	*A pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó egyből a körszelet területképletével számol helyesen. Ha a képletet rosszul alkalmazza, akkor ez a 3 pont nem jár.*
$T_{\text{ODC}\Delta} = \frac{4^2 \sin 2\beta}{2} \approx 3{,}87\ (\text{cm}^2)$,	1 pont	
$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{\text{ODC}\Delta} \approx 17{,}22\ (\text{cm}^2)$.	1 pont	
Amiből a folyadék térfogata: $V_{\text{folyadék}} = T_{\text{körszelet}} \cdot m_{\text{palack}} = 17{,}22 \cdot 30 = 516{,}6\ (\text{cm}^3)$.	1 pont	
Azaz 5,2 dl folyadék van a palackban.	2 pont	*1 pont a mértékegység átváltásért, 1 pont a feladatban kért kerekítésért.*
Összesen:	**9 pont**	

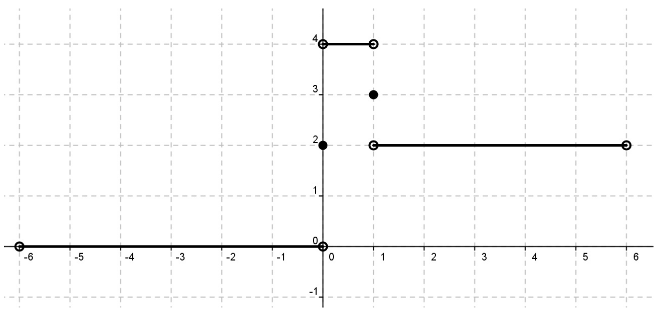
Megjegyzés: Helyes gondolatmenet alapján, más, helyes kerekítésből adódó (rész)eredmények esetén is járnak a feltüntetett pontok.

7. b)		
A feltételek szerint $\left(1-\frac{2p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right) = 0{,}195$, (ahol $p < 50$).	2 pont	
A zárójeleket felbontva, az egyenletet rendezve kapjuk: $p^2 - 150p + 4025 = 0$,	2 pont	
melynek gyökei: $p_1 = 35$, $p_2 = 115$.	1 pont	
Az utóbbi nem megoldása a feladatnak, (mert csak $p < 50$-nek van értelme).	1 pont	
Tehát $p = 35$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">8. a)</td></tr>
<tr><td>$f(x)=\left|x^2-4x+3\right|=\left|(x-2)^2-1\right|$</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Az $y=(x-2)^2-1$ parabola tengelypontja (2; −1),</td><td>1 pont</td><td rowspan="4">Ha valamelyik egész x koordinátájú pontban helytelen a függvény-érték, erre a részre legfeljebb 3 pontot kaphat.</td></tr>
<tr><td>az x tengelyt az (1; 0) és (3; 0) pontokban metszi.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Jó ábrázolás: leszűkítés a [0; 5] intervallumra;</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>az abszolút érték figyelembe vétele.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Helyes ábra:

</td><td></td><td>Jó ábrázolásért jár az 5 pont akkor is, ha a vizsgázó a fentieket nem írja le.
Ha a vizsgázó nem tünteti fel mindkét tengelyen az egységet, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.*</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

**Megjegyzés: Az egységek fel nem tüntetése miatt csak egy alkalommal vonjunk le pontot.*

8. b)		
A megoldások számát az $f(x)$ **teljes** grafikonja (nem csak a [0; 5] intervallumra eső leszűkítése!) és az $y = k$ egyenes közös pontjainak száma adja.	2 pont	*1 pont jár, ha az a)-beli grafikonnal dolgozik.*
Ha $k > 1$, akkor két közös pont van.	1 pont	*Ez az 5 pont (vagy az 5 pont megfelelő része) jár az ábrázolás alapján is, ha az ábrázolás módját az első mondatnak megfelelő pontossággal ismerteti a vizsgázó.*
Ha $k = 1$, akkor három közös pont van.	1 pont	
Ha $1 > k > 0$, akkor négy közös pont van.	1 pont	
Ha $k = 0$, akkor két közös pont van.	1 pont	
Ha $0 > k$, akkor nincs közös pont.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. c)		
 Helyes ábra.	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont adható, egynél több hiba esetén nem jár pont. (Az egyes szakaszok határának helytelen jelölése is hiba.) Ha a vizsgázó nem tünteti fel mindkét tengelyen az egységet, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.**
Összesen:	**2 pont**	

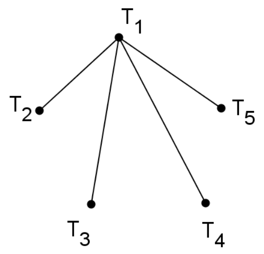
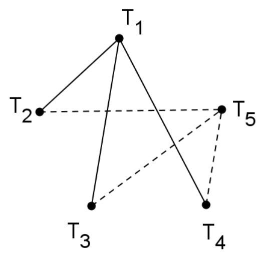
8. d)		
Értékkészlete: $R = \{0; 2; 3; 4\}$.	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont adható, egynél több hiba esetén nem jár pont. Nem jár pont akkor sem, ha a vizsgázó intervallumot ad meg felsorolás helyett.*
Összesen:	**2 pont**	

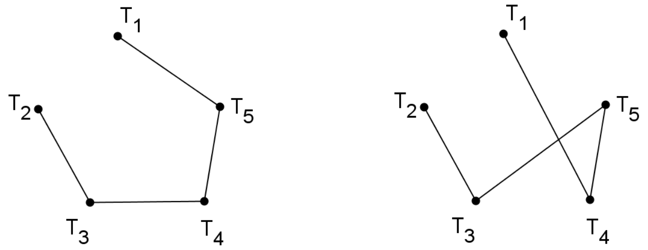
**Megjegyzés: Az egységek fel nem tüntetése miatt csak egy alkalommal vonjunk le pontot.*

9. a) első megoldás		
Az öt tanyát tekintsük egy gráf csúcsainak. Két csúcsot éllel kötünk össze, ha van az általuk reprezentált tanyák között kábel-összeköttetés.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.*
Egy ötpontú egyszerű gráfban legfeljebb 10 él húzható, ezek mindegyike vagy szerepel a gráfban, vagy nem.	1 pont	
Így minden élhez két értéket rendelhetünk.	1 pont	
A különböző hálózatok száma ezért $2^{10} = 1024$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. a) második megoldás		
A tanyák között legfeljebb 10 összeköttetés alakítható ki. Ezeket az összeköttetéseket tekinthetjük egy halmaz elemeinek. Meg kell határozni egy 10 elemű halmaz összes részhalmazainak a számát.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás menetéből derül ki.*
A k elemű részhalmazok száma: $\binom{10}{k}$.	1 pont	
A 0, 1, 2, …, 10 elemű részhalmazok számát összeadva kapjuk: $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=$	1 pont	
$= 2^{10} = 1024$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) első megoldás		
A csúcsokat nem megkülönböztetve három eset lehetséges.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
I. Egy csúcsot összekötünk a négy másikkal.	1 pont	
II. A csúcsokat egymás után sorba kötjük.	1 pont	
III. Egy csúcsot három másikkal, ez utóbbiak közül pedig egyet az ötödikkel kötünk össze.	1 pont	
Ha a csúcsokat megkülönböztetjük egymástól, akkor az I. esetben ezt 5-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
A II. esetben 5!=120-féleképpen rakhatjuk az 5 tanyát sorba,	1 pont	
de így minden lehetőséget kétszer számolunk, azaz 60 különböző összekötés lehetséges.	1 pont	
A III. esetben a 3 fokszámú csúcsot 5, a 2 fokszámú csúcsot 4-féleképpen, az ehhez kapcsolódó 1 fokszámú csúcsot 3-féleképpen választhatjuk ki,	2 pont	
így a lehetőségek száma $5\cdot4\cdot3=60$.	2 pont	
Ez összesen 5 + 60 + 60 = 125 különböző hálózatot jelent.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

9. b) **második megoldás**		
A csúcsok fokszámának összege 8, ezt kell öt pozitív egész összegére felbontani.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
Első eset: $8=4+1+1+1+1$ 	1 pont	
Ebből a fajtából 5 különböző van, mert a negyedfokú csúcs 5-féleképpen választható meg (az ábrán T_1-et választottuk).	1 pont	
Második eset: $8=3+2+1+1+1$ 	1 pont	
A harmadfokú csúcsot 5-féleképpen választhatjuk meg (az ábrán T_1-et választottuk). A másik négy csúcs közül 4-féleképpen választhatjuk ki azt a 3-at, amelyikkel a harmadfokú csúcs össze van kötve (az ábrán T_2, T_3 és T_4).	1 pont	
A három kiválasztott csúcs közül az egyiket összekötjük az utolsó, ötödik csúccsal (az ábrán T_5); ezt 3-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
Összesen $5\cdot 4\cdot 3=60$ különböző lehetőség van a második esetben.	1 pont	

Harmadik eset: $8 = 2+2+2+1+1$  	1 pont	
Legyen a két elsőfokú csúcs például T_1 és T_2. Ekkor a négy kábel lefektethető úgy, hogy T_1-ből kiindulva valamilyen sorrendben egymás után fűzzük a T_3, T_4, T_5 tanyákat, a harmadikként felfűzött tanyából pedig T_2-be vezetjük a negyedik kábelt. Ez $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ különböző módon tehető meg. (A két ábrán a 6 lehetőség közül kettőt tüntettünk fel: T_1-T_5-T_4-T_3-T_2, illetve T_1-T_4-T_5-T_3-T_2).	1 pont	
A T_1 és T_2 helyett bármelyik két pont választható elsőfokú pontnak, így a két elsőfokú pontot $\binom{5}{2} = 10$ különböző módon választhatjuk, ezért a harmadik esetben a különböző lehetőségek száma $6 \cdot 10 = 60$.	1 pont	
Mivel a 8 nem bontható fel a követelményeknek megfelelően más, az eddigiektől különböző módon, ezért nincs több lehetőség.	1 pont	*Ha ez a gondolat a megoldás során derül ki, akkor is jár ez a pont.*
A kábelfektetésre tehát összesen $5+60+60=125$ különböző lehetőség van.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

Megjegyzés: Az n pontú számozott fák számára (n^{n-2}) vonatkozó tételre való indokolt, pontos hivatkozás esetén is jár a 12 pont.