ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2012. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2012. május 8. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	13			
	3.	13			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum — javító tanár

	elért pontszám **egész számra** kerekítve	programba beírt **egész** pontszám
I. rész		
II. rész		

javító tanár — jegyző

dátum — dátum

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!**
   Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 9. feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

I.

1. Egy 2011-ben készült statisztikai összehasonlításban az alábbiakat olvashattuk:
„Ha New York-ban az átlagfizetést és az átlagos árszínvonalat egyaránt 100%-nak veszszük, akkor Budapesten az átlagfizetés 23,6%, az átlagos árszínvonal pedig 70,9%. (Az árszínvonal számításához 122 áru és szolgáltatás árát hasonlították össze.)”[1]
Feltételezve, hogy az idézet megállapításai igazak, válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) Ha Budapesten a havi átlagfizetés 150 ezer forint, akkor hány dollár ($) a havi átlagfizetés New York-ban, 190 forint/dollár (Ft/$) árfolyammal számolva? Válaszát egész dollárra kerekítve adja meg!

b) Ha a New York-i havi átlagfizetésből egy bizonyos termékből 100 kg-ot vásárolhatunk New York-ban, akkor körülbelül hány kg-ot vásárolhatunk ugyanebből a termékből a budapesti havi átlagfizetésből Budapesten? (Feltehetjük, hogy a szóban forgó termék budapesti egységára 70,9%-a a termék New York-i egységárának.)

a)	4 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	11 pont	

[1] http://www.penzcentrum.hu/vasarlas/egy_hetig_sem_birnank_magyar_fizetesbol_a_legdragabb_varosokban.1029425.html

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. **a)** Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát!

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge!

a)	5 pont	
b)	11 pont	
Ö.:	16 pont	

2. A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139.

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!

Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai?

a)	8 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

a) Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!

A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, **visszatevéssel** kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!

A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.

c) Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Matematika — emelt szint Azonosító jel:

3. Egy forgáskúp nyílásszöge 90°, magassága 6 cm.

a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm^3-ben) és felszínét (cm^2-ben)!

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm^3-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján?

Válaszait egészre kerekítve adja meg!

a)	4 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	13 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a (2; 6) pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

Ö.:	16 pont	

4. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$.

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 3$.

b) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!

c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az A, B, C, D, E és F osztály egy-egy csapattal vett részt.

a) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és valamilyen sorrendben az A és a B osztály végzett az első két helyen, a D osztály pedig nem lett utolsó?

b) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az E osztály megelőzte az F osztályt?

A bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott, a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Végül az osztályok sorrendje A, B, C, D, E, F lett, az elért pontszámaik pedig rendre 8, 7, 6, 5, 4 és 0. Tudjuk, hogy a mérkőzéseknek éppen a harmada végződött döntetlenre, és a második helyezett B osztály legyőzte a bajnok A osztályt.

c) Mutassa meg, hogy a B és a D osztály közötti mérkőzés döntetlenre végződött!

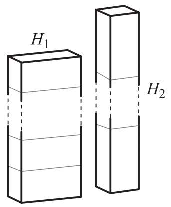
a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Matematika — emelt szint
Azonosító jel:

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Két egyenes hasábot építünk: H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alakú alaplapjukkal – az **ábra** szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa: $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0{,}8$.

Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?

b) Igazolja, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

a)	8 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	16 pont	