9. b)		
(Indirekt módon bizonyítunk.) Tegyük fel, hogy van 60º-os szöge a háromszögnek.	1 pont	
Mivel az oldalak páronként különböző hosszúságúak, és nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van,	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért ha van 60º-os szög, akkor az a $4+d$ hosszúságú oldallal szemközt van.	2 pont*	
Erre az oldalra felírva a koszinusztételt: $(4+d)^2=4^2+(4+2d)^2-2\cdot 4\cdot(4+2d)\cdot\cos 60^\circ$.	2 pont	
$16+8d+d^2=16+8d+4d^2$	1 pont	
Ebből $d^2=0$, azaz $d=0$.	1 pont	
Ez viszont ellentmond annak, hogy a háromszög nem szabályos ($d>0$).	2 pont	
Az eredeti feltételezésünk tehát hamis, azaz a háromszögnek valóban nincs 60º-os szöge.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

*A *-gal jelölt 3 pont jár, ha a vizsgázó a 4 és a 4 + 2d egység hosszú oldalakra is felírja a koszinusztételt és helyes gondolatmenettel azokban az esetekben is ellentmondásra jut.*

Megjegyzés: Teljes pontszám jár az alábbi gondolatmenetért is.
Indirekt tegyük fel, hogy van a háromszögnek 60º-os szöge a 4 + d hosszú oldallal szemben. Ha ekkor a 4 egység hosszú oldallal szemben 0 < α < 60°, akkor a 4 + 2d egység hosszú oldallal szemben 120° – α nagyságú szög lesz. (4 pont)
A szinusztételt felírva 2-2 oldalra:

$$\frac{\sin(120°-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{4+2d}{4}, \textit{ illetve } \frac{\sin 60°}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}=\frac{4+d}{4}.$$

Mindkettőből (addíciós tételek segítségével) d-t kifejezve:

$$d=\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha-1, \textit{ illetve } d=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha}-4. \textit{ (4 pont)}$$

Ezeket egymással egyenlővé téve és rendezve:

$$1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\sin(\alpha+30°).$$

Ez azonban ellentmondás, mert semmilyen 0 < α < 60° esetén nem teljesülhet. Az eredeti feltételezésünk tehát hamis, azaz a háromszögnek valóban nincs 60º-os szöge. (3 pont)

ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2012. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

*A *-gal jelölt 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Ha $\overline{A}$ jelöli azt az eseményt, hogy a második gépsoron készült a pohár, akkor $P(B)=P(B\|A)\cdot P(A)+P(B\|\overline{A})\cdot P(\overline{A})=$	1 pont	
$=0{,}1\cdot 0{,}6+0{,}04\cdot 0{,}4=0{,}076$.	2 pont	

8. c) második megoldás		
Az n db elkészült pohár között $0{,}6n$ az első gépsoron és $0{,}4n$ a második gépsoron készült.	2 pont	
Az első gépsoron készült $0{,}6n$ pohár között a selejtesek száma $0{,}6n\cdot 0{,}1=0{,}06n$,	1 pont	
a második gépsoron készült $0{,}4n$ pohár között a selejtesek száma $0{,}4n\cdot 0{,}04=0{,}016n$.	1 pont	
Az összes selejtes pohár száma tehát $0{,}076n$.	1 pont	
Ezek közül egyet választva $\frac{0{,}06n}{0{,}076n}\approx 0{,}789$ a valószínűsége annak, hogy az első gépsoron készült selejtes poharat választottunk.	2 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy konkrét n értékkel helyesen számol, akkor is teljes pontszámot kaphat.

9. a)		
Ha d a számtani sorozat differenciája, akkor a háromszög oldalhosszai 4, $4+d$, $4+2d$ (és $0<d$).	1 pont	
A háromszög derékszögű, ezért $4^2+(4+d)^2=(4+2d)^2$.	1 pont	
A négyzetre emeléseket elvégezve, rendezés után kapjuk: $3d^2+8d-16=0$.	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei: $d_1=-4$, $d_2=\frac{4}{3}$.	1 pont	
A negatív gyök nem ad megoldást, tehát a háromszög oldalai 4, $\frac{16}{3}$ és $\frac{20}{3}$ egység hosszúak.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó (pl. próbálgatással vagy a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármas elemeit $\frac{4}{3}$-dal megszorozva) megadja a háromszög oldalainak hosszát, de nem mutatja meg, hogy a feladatnak nincs más megoldása, akkor 2 pontot kaphat.

8. a)		
Az egyenlően valószínű kimenetelek száma: $\binom{50}{10}$.	1 pont	
A kedvező kimenetelek száma: $\binom{45}{10}+\binom{45}{9}\binom{5}{1}$.	2 pont	
A kérdezett valószínűség: $\dfrac{\binom{45}{10}+\binom{45}{9}\binom{5}{1}}{\binom{50}{10}}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}742$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül binomiális eloszlással számol, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat. Ha említi, hogy az így kapott eredmény közelítés, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

8. b)		
0,9 annak a valószínűsége, hogy az első gépsoron készült pohár jó.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kérdezett valószínűség $\binom{15}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{13}\approx$	2 pont	
$\approx 0{,}267$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem a megfelelő modellt használja (például hipergeometrikus eloszlást használ), akkor erre a részre nem kaphat pontot.

8. c) első megoldás		
Jelölje A azt az eseményt, hogy az első gépsoron készült a pohár, B pedig azt az eseményt, hogy selejtes a pohár.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.	1 pont	
$P(AB)=0{,}6\cdot 0{,}1=0{,}06$.	1 pont	
Ha összesen n darab pohár van, akkor $0{,}6\cdot n\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot n\cdot 0{,}04=0{,}076n$ darab selejtes van közöttük.	2 pont*	
Egy selejtes választásának valószínűsége: $P(B)=\dfrac{0{,}076n}{n}=0{,}076$.	1 pont*	
Tehát $P(A\mid B)=\dfrac{0{,}06}{0{,}076}\approx 0{,}789$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

I.

1. a) első megoldás		
A New York-i átlagfizetés $\dfrac{150\,000}{0{,}236}$ ($\approx 635\,593$) forint,	2 pont	
ami $\dfrac{150\,000}{0{,}236\cdot 190}\approx$	1 pont	
≈ 3345 \$-nak felel meg.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**4 pont**	

1. a) második megoldás		
150 000 Ft megfelel $\dfrac{150\,000}{190}$ ($\approx 789{,}5$) dollárnak.	1 pont	
Ez 23,6%-a a New York-i átlagfizetésnek, amely így $\dfrac{150\,000}{190\cdot 0{,}236}\approx$	2 pont	
≈ 3345 \$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó 789 dollárral számolva 3343 \$-t kap eredményül. Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**4 pont**	

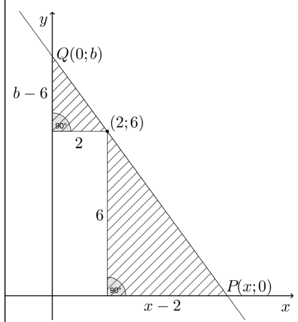
1. b) első megoldás		
New Yorkban 3345 \$-ért 100 kg vásárolható, ezért 1 kg ára 33,45 \$.	1 pont	*Forintban is elfogadható a számítás: 6356 Ft.*
Budapesten 1 kg árut ennek 70,9%-áért lehet vásárolni, azaz $33{,}45\cdot 0{,}709$ ($\approx 23{,}72$) \$-ért.	2 pont	*Más helyes kerekítés (pl. 23,7 \$) is elfogadható.*
Ez megfelel $33{,}45\cdot 0{,}709\cdot 190$ (≈ 4506) Ft-nak.	1 pont	*Más, helyesen kerekített érték is elfogadható (pl. $23{,}7\cdot 190=4503$).*
A budapesti átlagfizetésből ennyi pénzért $\dfrac{150\,000}{33{,}45\cdot 0{,}709\cdot 190}\approx$	2 pont	
$\approx 33{,}3$ kg terméket lehet vásárolni.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) második megoldás		
Ha a termék egységára e \$/kg, akkor a 100 kg termékért $100e$ \$-t kell fizetni New Yorkban.	1 pont	
Ez egyben a New York-i átlagkereset is.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A termék egységára Budapesten $0{,}709e$ \$/kg,	1 pont	
az átlagkereset pedig $0{,}236 \cdot 100e$ \$, ami $23{,}6e$ \$.	1 pont	
Ennyi pénzért Budapesten $\frac{23{,}6e}{0{,}709e} \approx$	2 pont	
$\approx 33{,}3$ kg terméket lehet vásárolni.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) harmadik megoldás		
Ha a New York-i átlagfizetés x \$, akkor a budapesti átlagfizetés $x \cdot 190 \cdot 0{,}236 = 44{,}84x$ Ft.	1 pont	
Az x \$-os New-York-i átlagfizetésből ott 100 kg terméket tudunk venni, ezért 1 kg ára $\frac{x}{100}$ \$.	1 pont	
Budapesten 1 kg árut ennek 70,9%-áért lehet vásárolni, tehát $\frac{x}{100} \cdot 0{,}709 = 0{,}00709x$ dollárért.	1 pont	
Ez megfelel $0{,}00709x \cdot 190 = 1{,}3471x$ Ft-nak.	1 pont	
A budapesti átlagfizetésből tehát $\frac{44{,}84x}{1{,}3471x} \approx$	2 pont	
$\approx 33{,}3$ kg terméket lehet vásárolni.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Más, ésszerű (legfeljebb két tizedesjegy pontosságú) és helyesen kerekített érték (például 33 kg) is elfogadható válaszként.

2. a) első megoldás		
(Jelölje q a mértani sorozat hányadosát.) A negyedik helyezett 25, a harmadik $25q$, a második $25q^2$ pontot ért el.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első helyezett pontszáma $\frac{4}{3} \cdot 25q^2 = \frac{100q^2}{3}$.	1 pont	
A szöveg szerint: $\frac{100q^2}{3} + 25q^2 + 25q + 25 = 139$.	1 pont	
Összevonás és rendezés után: $175q^2 + 75q - 342 = 0$.	1 pont	

7. második megoldás		
A Q pont második koordinátája b, és legyen a P pont első koordinátája x ($b > 6$ és $x > 2$).	1 pont	
 A (2; 6) ponton át párhuzamost húzunk a tengelyekkel, és az OPQ háromszög területét a kapott két kisebb háromszög és a téglalap területének összegeként írjuk fel:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{(x-2) \cdot 6}{2} + \frac{(b-6) \cdot 2}{2} + 12 =$	1 pont	
$= 3x + b$.	1 pont	
(A hasonló derékszögű háromszögek miatt:) $\frac{x-2}{6} = \frac{2}{b-6}$,	1 pont	
ahonnan $b = \frac{12}{x-2} + 6$.	1 pont	
Ezt visszaírva a területre kapott kifejezésbe: $T(x) = 3x + \frac{12}{x-2} + 6$.	1 pont	
Ennek ott lehet minimuma, ahol az $x \mapsto T(x)$ $(x > 2)$ függvény deriváltja nulla.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(x) = 3 - \frac{12}{(x-2)^2}$.	2 pont	
ez 0, ha $x = 0$ vagy $x = 4$.	1 pont	
Mivel $x > 2$, azért $x = 4$.	1 pont	
Ez valóban minimumhely, mert $T''(4) > 0$.	1 pont	
Ha $x = 4$, akkor $b = 12$ és a QP egyenes meredeksége -3.	1 pont	
A keresett egyenes egyenlete: $y = -3x + 12$.	1 pont	
A legkisebb terület 24 egység.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

Mivel $a < 0$, ezért $2-\frac{6}{a}$ és $6-2a$ is pozitív.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha jó ábrát készít és azon a P és Q pontok a tengelyek pozitív felén helyezkednek el.*
A levágott háromszög területe: $T(a)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{6}{a}\right)(6-2a)$.	1 pont	$T(b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b}{b-6}\cdot b$
A szorzásokat elvégezve kapjuk, hogy $T(a)=12-2a-\frac{18}{a}$.	1 pont	$T(b)=\frac{b^2}{b-6}$
Ennek ott lehet minimuma, ahol az $a\mapsto T(a)$ ($a<0$) függvény deriváltja nulla.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(a)=-2+\frac{18}{a^2}$,	2 pont*	$T'(b)=\frac{b^2-12b}{(b-6)^2}$
ez 0, ha $a = 3$ vagy $a = –3$.	1 pont*	*$b = 0$ vagy $b = 12$*
Mivel $a < 0$, azért $a = –3$.	1 pont*	
Ez valóban minimumhely, mert $T''(-3) > 0$.	1 pont*	
Ha $a = –3$, akkor $b = 12$.	1 pont	
A keresett egyenes egyenlete: $y = –3x + 12$.	1 pont	
A legkisebb terület 24 egység.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

*A *-gal jelölt 6 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Mivel $a<0$, ezért $0<-a$, így a $T(a)=12+2\cdot(-a)+\frac{18}{(-a)}$ kifejezés utolsó két tagja pozitív.	2 pont	
Ezért alkalmazhatjuk rá a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T(a)=12+2\cdot(-a)+\frac{18}{(-a)}\geq$ $\geq 12+2\cdot\sqrt{2\cdot(-a)\cdot\frac{18}{(-a)}}=12+2\cdot\sqrt{36}=24$.	2 pont	
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2\cdot(-a)=\frac{18}{(-a)}$, azaz ha $a=-3$.	1 pont	

Ennek két megoldása van: a $\frac{6}{5}$, illetve a $-\frac{57}{35}$.	1 pont	
Ez utóbbi a szövegnek nem felel meg (hiszen ekkor a pontszámok nem alkotnának monoton sorozatot),	1 pont	
tehát a 3. helyezett pontszáma 30, a másodiké 36, az első helyezetté pedig 48.	1 pont	
(Ellenőrzés:) A kapott pontszámok összege 139, tehát ezek valóban megoldásai a feladatnak.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2. a) második megoldás

A második helyezett x, az első $\frac{4}{3}x$ pontot ért el.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A második x, a negyedik 25 pontot ért el, így a mértani sorozat miatt a 3. helyezett pontszáma $\sqrt{25x}$.	1 pont	
A szöveg szerint: $\frac{4}{3}x+x+\sqrt{25x}+25=139$.	1 pont	
Hárommal beszorozva és nullára rendezve egy $\sqrt{x}$-ben másodfokú egyenletet kapunk: $7\left(\sqrt{x}\right)^2+15\sqrt{x}-342=0$.	1 pont*	
Ennek pozitív gyöke $\sqrt{x}=6$ (a negatív gyök $\sqrt{x}=-\frac{57}{7}$, ami nem lehetséges),	1 pont*	
így $x = 36$.	1 pont*	
Tehát a 2. helyezett pontszáma 36, a harmadiké 30, az első helyezetté pedig 48.	1 pont	
(Ellenőrzés:) A kapott pontszámok összege 139, tehát ezek valóban megoldásai a feladatnak.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

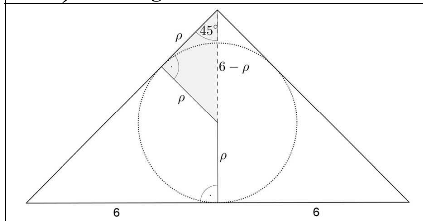
Rendezve: $5\sqrt{x}=114-\frac{7}{3}x$. Ezt négyzetre emelve és nullára rendezve: $49x^2-5013x+116\,964=0$.	1 pont	
Ennek két megoldása van: $x_1=\frac{3249}{49}$ ($\approx 66{,}3$), ez azonban az eredeti négyzetgyökös egyenletnek ($114-\frac{7}{3}x<0$ miatt) nem megoldása.	1 pont	
$x_2 = 36$.	1 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó (pl. próbálgatással) megadja a helyes pontszámokat, de nem mutatja meg, hogy a feladatnak nincs más megoldása, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

2. b) első megoldás		
A lehetséges (egyenlően valószínű) kimenetelek száma: $\binom{20}{3}$ (= 1140).	2 pont	*Nem bontható.*
A kedvező kimenetelek száma: $\binom{4}{3}\cdot 5^3$ (= 500).	2 pont	
A kérdezett valószínűség: $\frac{500}{1140}$ (≈ 0,439).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. b) második megoldás		
Az utalványok sorsolásának (a nyertesek sorrendjét is figyelembe véve) $20\cdot 19\cdot 18$ (egyenlően valószínű) kimenetele van.	2 pont	*Nem bontható.*
Először 20, majd 15, végül 10 főiskolásból kell kiválasztani 1-1 résztvevőt, ezek lehetséges száma: $20\cdot 15\cdot 10$.	2 pont	
a kérdezett valószínűség $\frac{20\cdot 15\cdot 10}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{25}{57}$ (≈ 0,439).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a)		
A kúp alapkörének sugara 6 (cm),	1 pont	
alkotójának hossza $6\sqrt{2}$ (≈ 8,49 cm),	1 pont	
térfogata $V=\frac{T\cdot m}{3}=\frac{6^2\cdot\pi\cdot 6}{3}=72\pi\approx 226$ (cm³),	1 pont	
felszíne $A=r\pi(r+a)=6\pi\left(6+6\sqrt{2}\right)=$ $=36\left(1+\sqrt{2}\right)\pi\approx 273$ (cm²).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) első megoldás		
 Jó ábra.	2 pont	*Ha a vizsgázó ábra nélkül is jól használja az adatokat a megoldása során, akkor is jár ez a 2 pont.*
Ha a beírt gömb sugara ρ, akkor $\rho\sqrt{2}=6-\rho$,	1 pont	
amiből $\rho=6(\sqrt{2}-1)$ (≈ 2,49 cm).	1 pont	

A *B* csapat a *C*, *D*, *E* elleni 3 mérkőzésből 3 pontot ért el, tehát vagy 1 győzelme, 1 döntetlenje és 1 veresége vagy pedig 3 döntetlenje volt.	2 pont*	
Ha 1 győzelme és 1 veresége lenne *B*-nek, akkor a *B*, *C*, *D*, *E* csapatok egymás elleni 6 mérkőzéséből legfeljebb 4 végződhetett volna döntetlennel.	1 pont*	
Ez azonban nem lehetséges, tehát *B* mindhárom mérkőzése, így a *D* elleni is döntetlen lett.	1 pont*	
Összesen:	**8 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az egyes csapatok az egymás elleni 3-3 mérkőzésükből a következő pontokat szerezték: a *B* osztály 3 pontot, a *C* 4-et, a *D* 3-at és az *E* 2 pontot.	1 pont	
Mivel csak egy mérkőzés volt ezek közül, amelyik nem döntetlenre végződött,	1 pont	
ezért csak a *C* nyerhette meg az *E* osztály elleni találkozóját.	1 pont	
A *B* és *D* közötti mérkőzés tehát valóban döntetlenre végződött.	1 pont	

Megjegyzés: A mérkőzések eredményét mutatja az alábbi táblázat, amelyben a mérkőzésen győztes csapat neve, illetve a döntetlen eredmény látható. Ha ezt a táblázatot (vagy egy ezzel egyenértékű eredményleírást) elkészíti a vizsgázó, de nem indokolja, hogy másképpen nem tölthető ki a táblázat, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**pont**
A		B	A	A	A	A	**8**
B	B		dönt.	dönt.	dönt.	B	**7**
C	A	dönt.		dönt.	C	C	**6**
D	A	dönt.	dönt.		dönt.	D	**5**
E	A	dönt.	C	dönt.		E	**4**
F	A	B	C	D	E		**0**

7. első megoldás		
Mivel a (2; 6) pont rajta van az egyenesen, azért $6=2a+b$, tehát $b=6-2a$.	1 pont	$a=3-\frac{b}{2}$ *(mivel a < 0, ezért b > 6)*
Ezzel az egyenes egyenlete: $y=ax+6-2a$.	1 pont	$y=\left(3-\frac{b}{2}\right)x+b$
Ez az egyenes az *x* tengelyt a $P\left(2-\frac{6}{a};0\right)$ pontban,	1 pont	$P\left(\frac{2b}{b-6};0\right)$
az *y* tengelyt a $Q(0;\ 6-2a)$ pontban metszi.	1 pont	$Q(0;\ b)$

6. a) második megoldás		
Az A, B sorrendje az első 2 helyen kétféleképpen alakulhatott.	1 pont	
A C, D, E, F osztályok a fennmaradó négy helyen 4!-féle sorrendben végezhettek.	1 pont	
Előzőek közül nem megfelelő, amikor D az utolsó, ez 3!-féleképpen fordulhat elő.	1 pont	
A különböző lehetőségek száma tehát $2\cdot(4!-3!)=36$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

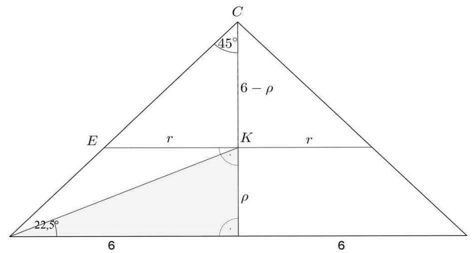
6. b) első megoldás		
Az összes eset felében az E osztály megelőzi F-et, a másik felében pedig F előzi meg E-t.	2 pont	
A megfelelő esetek száma tehát $\frac{6!}{2}=360$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. b) második megoldás		
Ha az E osztály első, akkor az F osztály 5-féle, ha az E második, akkor az F 4-féle, ha az E harmadik, akkor az F 3-féle, ha az E negyedik, akkor az F 2-féle, végül ha az E ötödik, akkor az F osztály csak 1-féle helyen végezhetett. Ez összesen 15 lehetőség.	2 pont*	*E és F* $\binom{6}{2}=15$*-féle helyre kerülhet, ezeken belül E és F sorrendje rögzített.*
A maradék négy helyen az A, B, C és D osztályok $4! = 24$-féleképpen végezhettek.	1 pont	
A megfelelő esetek száma tehát $15\cdot 24=360$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatért is megkaphatja a vizsgázó:*
A, B, C és D bármely rögzített sorrendje esetén 5 helyre lehet az E és F osztályt elhelyezni. Az 5 hely közül 2-t ismétléssel (hiszen A, B, C és D egy rögzített sorrendjén belül ugyanoda is kerülhet E és F) kiválasztva a lehetőségek száma: $\binom{5+2-1}{2}=\binom{6}{2}=15$. *(Mindegyik kiválasztáshoz pontosan egy olyan eset tartozik, amelyben az E osztály megelőzi az F-et.)*

6. c)		
Az A csapat a B ellen veszített, a többi mérkőzését megnyerte (nincs döntetlenje).	1 pont	
Az F-nek nincs egyetlen pontja sem, tehát ők nem érhettek el döntetlent.	1 pont	
A B, C, D, E csapatok egymás ellen összesen 6 mérkőzést játszottak,	1 pont	
ebből (az összes mérkőzés harmada) 5 végződött döntetlenre.	1 pont	

A lemetszett kisebb kúp magassága $m_1=6-\rho$ ($\approx 3{,}51$ cm).	1 pont	
A lemetszett kúp V_1 térfogatára (a hasonló testek térfogatának aránya miatt) felírható: $\frac{V_1}{V}=\left(\frac{m_1}{m}\right)^3=$	1 pont	
$=\left(\frac{12-6\sqrt{2}}{6}\right)^3$,	1 pont	
amiből $V_1=72\left(2-\sqrt{2}\right)^3\pi$ ($\approx 45{,}5$ cm^3).	1 pont	
A csonkakúp térfogata tehát ≈ 181 (cm^3).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

3. b) második megoldás		
 Jó ábra, amely tartalmazza a gömb sugarát (ρ), a 45°-os szöget, és a síkmetszet sugarát (r).	2 pont	*Ha a vizsgázó ábra nélkül is jól használja az adatokat a megoldása során, akkor is jár ez a 2 pont.*
$\rho=6\cdot\mathrm{tg}\,22{,}5°$,	1 pont	
amiből $\rho\approx 2{,}49$ (cm).	1 pont	
A KCE egyenlő szárú derékszögű háromszögből $r=6-\rho$,	1 pont	
azaz $r\approx 3{,}51$ (cm).	1 pont	
A csonkakúp magassága (megegyezik a gömb sugarával): $m\approx 2{,}49$ (cm).	1 pont	
A csonkakúp térfogata: $V=\frac{m\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)\approx$ $\approx\frac{2{,}49\pi}{3}\left(6^2+6\cdot 3{,}51+3{,}51^2\right)\approx$	1 pont	*A képletért önmagában nem, csak a jó behelyettesítésért jár ez a pont.*
≈ 181 (cm^3).	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor a feladatban összesen legfeljebb 1 pontot veszítsen.
Ha a vizsgázó a beírt gömb sugarának meghatározásakor elvi hibát követ el (például a gömb középpontját a magasság felezőpontjának tekinti), akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

4. a)		
Ha $p=3$, akkor $f(x)=-3x^3+9x-6$.	1 pont	
$\int_0^2(-3x^3+9x-6)dx=[-0{,}75x^4+4{,}5x^2-6x]_0^2=$	2 pont	*A primitív függvény megjelenítése nélkül ez a 2 pont nem jár.*
$=-6$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b)		
$-3+(p-3)+p^2-6=0$.	1 pont	
Rendezve: $p^2+p-12=0$.	1 pont	
Ennek megoldásából adódik, hogy $p=3$ vagy $p=-4$ esetén lesz a megadott függvénynek zérushelye az 1.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. c)		
A deriváltfüggvény hozzárendelési szabálya: $f'(x)=-9x^2+2(p-3)x+p^2$.	2 pont	
Ennek az $x=1$-hez tartozó helyettesítési értéke: $p^2+2p-15$.	1 pont	
Megoldandó tehát a $p^2+2p-15>0$ egyenlőtlenség.	1 pont	
A $p^2+2p-15=0$ egyenlet megoldásai a 3 és a –5,	1 pont	
s mivel a $p^2+2p-15>0$ egyenlőtlenség bal oldalán álló polinom főegyütthatója pozitív,	1 pont	*Ez a pont jár más helyes indoklás (pl. jó ábra) esetén is.*
ezért az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $p<-5$ vagy $p>3$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

II.

5. a)		
Ha a jelöli a négyzetes oszlop alapélének hosszát, és k darabból készítjük a hasábokat, akkor H_1 felszíne: $A_{H_1}=2\cdot 2a^2+2\cdot k\cdot a^2+2\cdot k\cdot 2a^2\left(=2a^2(3k+2)\right)$.	2 pont	
H_2 felszíne: $A_{H_2}=2a^2+4\cdot k\cdot 2a^2\left(=2a^2(4k+1)\right)$.	2 pont	
Az $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}}=0{,}8$ feltételből ($2a^2$-tel történő egyszerűsítés és rendezés után): $3k+2=0{,}8\cdot(4k+1)$.	2 pont	
Az egyenlet megoldása $k=6$,	1 pont	

tehát 6-6 négyzetes oszlopot használtunk a hasábok építéséhez.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó (pl. próbálgatással) megadja a jó eredményt, de nem bizonyítja, hogy más megoldás nincs, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

5. b) első megoldás		
$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3n+5)(4n+1)}{(4n+5)(3n+2)}=$	1 pont	
$=\frac{12n^2+23n+5}{12n^2+23n+10}\left(=1-\frac{5}{12n^2+23n+10}\right)$.	1 pont	
A fenti hányados minden pozitív egész n esetén 1-nél kisebb,	1 pont	
és a sorozat minden tagja pozitív,	1 pont	
ezért a sorozat szigorúan monoton csökkenő.	1 pont	
Ebből következik, hogy a sorozat felülről korlátos.	1 pont	
Mivel a sorozat minden tagja pozitív, ezért a sorozat alulról is korlátos,	1 pont	
tehát a sorozat korlátos.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

5. b) második megoldás		
Vizsgáljuk az $a_{n+1}-a_n$ különbséget!	1 pont	
$\frac{3n+5}{4n+5}-\frac{3n+2}{4n+1}=$	1 pont	
$=\frac{12n^2+23n+5-12n^2-23n-10}{(4n+5)(4n+1)}=-\frac{5}{(4n+5)(4n+1)}$.	1 pont	
A kapott tört minden pozitív egész n esetén negatív,	1 pont	
ezért a sorozat szigorúan monoton csökkenő.	1 pont	
A $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ sorozat konvergens (határértéke 0,75),	1 pont	
s mivel minden konvergens sorozat korlátos,	1 pont	
tehát a sorozat egyben korlátos is.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. a) első megoldás		
Az A, B sorrendje az első 2 helyen kétféleképpen alakulhatott.	1 pont	
A D osztály a 3., 4., és 5. hely bármelyikén végezhetett, ez 3 lehetőség.	1 pont	
A C, E, F osztályok a fennmaradó három helyen 3!-féle sorrendben végezhettek.	1 pont	
A különböző lehetőségek száma tehát $2\cdot 3\cdot 3!=36$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	