

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2012. október 16.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámt, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

9. a)		
Az (1) állítás hamis.	1 pont	
Egy ötpontú egyszerű gráfban legfeljebb 10 él húzható, 11 éle tehát nem lehet.	2 pont	
A (2) állítás igaz.	1 pont	
(A gráf csúcsai legfeljebb negyedfokúak lehetnek.) Ha a gráf minden csúcsa harmadfokú volna, akkor a gráfban a foksámok összege páratlan lenne (15), ami lehetetlen.	2 pont	
Összesen:	6 pont	

9. b)		
Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó.	2 pont	
Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú (esetleg nem összefüggő) komponense lenne, akkor legfeljebb $1 + 3 = 4$ éle lehetne.	2 pont	
Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5.	2 pont	
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van,	1 pont	
ezek közül $\binom{10}{6} (= 210)$ -féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt.	2 pont	
A keresett valószínűség tehát $p = \frac{5}{210} (\approx 0,024)$.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

I.

1. a)		
A bevétel: $5 \cdot 10^6 \cdot 200 (= 10^9)$ (Ft).	1 pont	
A kifizetett nyeremény: $4 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^6 + 1,5 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^8$ ($= 6 \cdot 10^8$) (Ft),	1 pont	
tehát a különbözet 400 millió Ft.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

1. b)		
(Az 5 millió sorsjegy bármelyikét egyenlő valószínűséggel húzhatjuk.) A kedvező esetek száma 550 844,	2 pont	<i>Ha egyértelműen kiderül, hogy a vizsgázó jó számokat adott össze, de számolási hibát vétett, akkor 1 pontot kaphat.</i>
tehát a keresett valószínűség: $p = \frac{550844}{5 \cdot 10^6} \approx 0,11$.	2 pont	<i>A 0,1 is elfogadható válasz. A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	4 pont	

1. c) első megoldás		
A felvehető nyeremény várható értéke: $\frac{4 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^6 + 1,5 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6} =$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
$= 120$ (Ft).	1 pont	
A nyereség várható értéke tehát $(120 - 200) = -80$ Ft.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

1. c) második megoldás		
A sorsjegy kibocsátójának nyeresége a játékosok összes nyereségének ellentettje.	2 pont	
Egy játékos nyereségének várható értéke tehát $\frac{400\,000\,000}{5\,000\,000} =$	1 pont	
$= -80$ Ft.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

1. c) harmadik megoldás			
nyeremény	nyereség	valószínűség	2 pont <i>Egy hiba esetén 1 pont jár, ennél több hiba esetén nem jár pont.</i>
10 000 000	9 999 800	$\frac{4}{5 \cdot 10^6} (= 0,0000008)$	
50 000	49 800	$\frac{40}{5 \cdot 10^6} (= 0,000008)$	
10 000	9 800	$\frac{800}{5 \cdot 10^6} (= 0,00016)$	
1 000	800	$\frac{150\,000}{5 \cdot 10^6} (= 0,03)$	
500	300	$\frac{400\,000}{5 \cdot 10^6} (= 0,08)$	
200	0	$\frac{10^6}{5 \cdot 10^6} (= 0,2)$	
0	-200	$\frac{3\,449\,156}{5 \cdot 10^6} (= 0,6898312)$	
A várható értéket az $E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$ képlet segítségével is kiszámíthatjuk.			1 pont
A nyereség várható értéke -80 Ft.			1 pont
Összesen:			4 pont

2. első megoldás		
(Jelölje x azt a számot, amelyet 15-tel csökkentünk, y pedig a másikat.) $\left. \begin{array}{l} x + y = 29 \\ (x - 15)(y + 15) = 5xy \end{array} \right\}$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
Az első egyenletből (például) y -t kifejezve és azt a második egyenletbe helyettesítve: $(x - 15)(44 - x) = 5x(29 - x)$.	1 pont	<i>Ha x-et fejezte ki: $(14 - y)(y + 15) = 5(29 - y)y$.</i>
A műveleteket elvégezve: $-x^2 + 59x - 660 = 145x - 5x^2$.	3 pont	<i>Bal oldalon a zárójel felbontása 1 pont, összevonás 1 pont, jobb oldalon a zárójel felbontása 1 pont.</i>
Rendezve: $4x^2 - 86x - 660 = 0$. (Egyszerűsítve: $2x^2 - 43x - 330 = 0$.)	1 pont	<i>Ha y-ra írja fel a másodfokú egyenletet, akkor a $2y^2 - 73y + 105 = 0$ egyenlet adódik.</i>
Az egyenlet megoldásai a -6 és a 27,5.	2 pont	

A skaláris szorzat kétféle kifejezésének egyenlősége miatt:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$\frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{16 + (p+4)^2}}{2} = 5p$.	1 pont	
Mivel az egyenlet bal oldala pozitív, ezért $p > 0$.	1 pont	<i>Ezt a pontot úgy is megkaphatja a vizsgázó, ha a következmény-egyenlet két gyöke közül kizárja a negatívát.</i>
Rendezés, négyzetre emelés, majd nullára redukálás után kapjuk: $p^2 - 8p - 32 = 0$.	2 pont	
Ennek az egyenletnek a gyökei: $p_1 = 4 + 4\sqrt{3}$, $p_2 = 4 - 4\sqrt{3}$.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó közelítő értékekkel számol, akkor erre a részre legfeljebb 2 pontot kaphat.</i>
(Mivel $p > 0$, ezért) $p = 4 + 4\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	16 pont	

8. harmadik megoldás		
Az AB egyenes iránytangense: $\frac{1 - (-4)}{2 - 7} = -1$,	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
így irányszöge 135° (-45°).	1 pont	
Az AB egyenes, a BC egyenes és az x tengely által közrefogott háromszög két szöge 45° -os és 60° -os, ezért a harmadik szöge 75° -os.	2 pont	
Ebből következik, hogy a BC egyenes irányszöge 75° ,	1 pont	
iránytangense (meredeksége) $\operatorname{tg} 75^\circ$.	2 pont	
Ennek pontos értéke (például a megfelelő addíciós tétel alkalmazásával) $\operatorname{tg} 75^\circ = \left(\operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} \right) = 2 + \sqrt{3}$.	1 pont	
A BC egyenes egyenlete: $y + 4 = (2 + \sqrt{3})(x - 7)$.	2 pont*	
A C pont koordinátái kielégítik ezt az egyenletet,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
így $p + 4 = (2 + \sqrt{3})(11 - 7)$,	1 pont	
ahonnan $p = 4 + 4\sqrt{3}$.	1 pont*	
Összesen:	16 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó $\operatorname{tg} 75^\circ$ közelítő értékével számol, ezért p -re sem pontos értéket kap, a *-gal jelzett 3 pontot elveszíti. ($\operatorname{tg} 75^\circ \approx 3,732$, $p \approx 10,928$)

8. első megoldás		
Az ABC háromszög AC oldalára felírva a koszinusztételt: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot 0,5$.	2 pont	
$AB^2 = 50$	1 pont	
$BC^2 = 16 + (p+4)^2 =$	1 pont	
$= p^2 + 8p + 32$	1 pont	
$AC^2 = 81 + (p-1)^2 =$	1 pont	
$= p^2 - 2p + 82$	1 pont	
A kapott értékeket visszahelyettesítve a koszinusztételbe: $p^2 - 2p + 82 = p^2 + 8p + 82 - \sqrt{50} \cdot \sqrt{p^2 + 8p + 32}$.	1 pont	
Rendezve: $\sqrt{50}(p^2 + 8p + 32) = 10p$.	2 pont	
Mivel a bal oldalon pozitív szám áll, ezért $p > 0$.	1 pont	<i>Ezt a pontot úgy is megkaphatja a vizsgázó, ha a következmény-egyenlet két gyöke közül kizárja a negatívát.</i>
Négyzetre emelve és egyszerűsítve: $p^2 + 8p + 32 = 2p^2$,	1 pont	
amiből $p^2 - 8p - 32 = 0$ adódik.	1 pont	
Ennek az egyenletnek a gyökei: $p_1 = 4 + 4\sqrt{3}$, $p_2 = 4 - 4\sqrt{3}$.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó közelítő értékekkel számol, akkor erre a részre legfeljebb 2 pontot kaphat.</i>
(Mivel $p > 0$, ezért) $p = 4 + 4\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	16 pont	

8. második megoldás		
A $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok által bezárt szög 60° -os, ezért skaláris szorzatuk $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \cos 60^\circ =$	1 pont	
$= \frac{AB \cdot BC}{2}$,	1 pont	
ahol $AB = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$,	1 pont	
és $BC = \sqrt{4^2 + (p+4)^2}$.	1 pont	
A skaláris szorzat felírható a megfelelő koordináták szorzatának összegeként is.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Mivel $\overrightarrow{BA}(-5; 5)$ és $\overrightarrow{BC}(4; p+4)$,	1 pont	
ezért $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -20 + 5 \cdot (p+4) = 5p$.	2 pont	

Ha a 15-tel csökkentendő szám a -6 , akkor a másik szám a 35 .	1 pont	
Ha a 15-tel csökkentendő szám a $27,5$, akkor a másik szám az $1,5$.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: Ha a két szám a -6 és a 35 , akkor (az összegük 29 .) a szorzatuk -210 . A megváltoztatott számok a -21 és az 50 , ezek szorzata -1050 , ami valóban 5-szöröse a -210 -nek. Ha a két szám a $27,5$ és az $1,5$, akkor (az összegük 29 .) a szorzatuk $41,25$. A megváltoztatott számok a $12,5$ és a $16,5$, ezek szorzata $206,25$, ami valóban 5-szöröse a $41,25$ -nek.	1 pont	<i>Ha a vizsgázó a számolás leírása nélkül annyit ír, hogy a szöveg alapján ellenőrizte a megoldásokat, és azok megfelelőek, akkor ezért 1 pontot kaphat.</i>
Összesen:	13 pont	

2. második megoldás		
(Ha a 15-tel növelendő szám x , akkor a másik $29 - x$, c pedig jelölje az eredeti két szám szorzatát.) $\left. \begin{aligned} x(29 - x) &= c \\ (x + 15)(14 - x) &= 5c \end{aligned} \right\}$	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
A második egyenletből kivonva az elsőt: $-30x + 210 = 4c$.	1 pont	
Ebből x -et kifejezve: $x = 7 - \frac{2c}{15}$.	1 pont	<i>Ha c-t fejezte ki: $c = -\frac{15}{2}x + \frac{105}{2}$.</i>
Ezt visszaírva az első egyenletbe: $\left(7 - \frac{2c}{15}\right) \cdot \left(22 + \frac{2c}{15}\right) = c$.	1 pont	$x(29 - x) = -\frac{15}{2}x + \frac{105}{2}$
A műveleteket elvégezve: $154 - 2c - \frac{4c^2}{225} = c$.	1 pont	
225-tel szorozva és rendezve: $0 = 4c^2 + 675c - 34\,650$.	1 pont	$2x^2 - 73x + 105 = 0$
Az egyenlet megoldásai a -210 és a $41,25$.	2 pont	
Az első megoldásból $x = 35$, ekkor a másik szám a -6 ,	1 pont	
a másodikból $x = 1,5$, ekkor a másik szám a $27,5$.	1 pont	
Ellenőrzés: lásd az első megoldásnál.	2 pont	
Összesen:	13 pont	

3. a)		
(A négyzetgyök miatt) $x \geq 0$,	1 pont	
(a logaritmus miatt) $\sqrt{x} > 0$.	1 pont	
A keresett halmaz: $]0; +\infty[$.	1 pont	<i>Az $x > 0$ válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	3 pont	

3. b)		
(A logaritmus miatt) $\cos x > 0$,	1 pont	
és (a négyzetgyök miatt) $\log_2(\cos x) \geq 0$,	1 pont	
azaz $\cos x \geq 1$.	1 pont	
(A koszinusz függvény értékkészlete miatt) $\cos x = 1$.	1 pont	
Az értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbf{R} \mid x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.	1 pont	<i>Az $x = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ válasz is elfogadható. Ha a $k \in \mathbf{Z}$ nem szerepel, akkor ez a pont nem jár.</i>
Összesen:	5 pont	

3. c)		
(A logaritmus alapja miatt) $x > 0$ és $x \neq 1$.	1 pont	<i>Ez a pont csak akkor jár, ha mindkét feltétel szerepel.</i>
(A logaritmus miatt) $\cos^2 x > 0$,	1 pont	
tehát $\cos x \neq 0$, azaz	1 pont	
$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	1 pont	
Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\} \right)$, ahol $k \in \mathbf{N}$.	1 pont	<i>A $k \in \mathbf{N}$ helyett a $k \in \mathbf{Z}$ is elfogadható. Az $x > 0$, de $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) és $x \neq 1$ válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	5 pont	

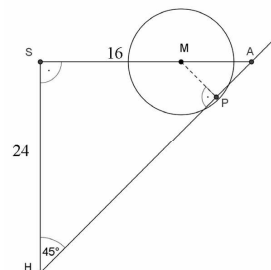
Megjegyzés: Ha k lehetséges értékei sehol sem szerepelnek, akkor legfeljebb 4 pont adható.

7. b) második megoldás		
Ha az edény magassága m cm, akkor $4000 = x^2 m$, és a zománcsal bevonandó felület területe (cm^2 -ben) $T = x^2 + 4xm$.	1 pont	
Az m -et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T -be: $T = x^2 + \frac{16000}{x}$.	1 pont	
$x^2 + \frac{16000}{x} = x^2 + \frac{8000}{x} + \frac{8000}{x}$, ahol $x > 0$.	1 pont	
Alkalmazzuk a jobb oldalon álló összeg három tagjára a számtani és a mértani közepük közötti egyenlőtlenséget: $x^2 + \frac{8000}{x} + \frac{8000}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8000}{x} \cdot \frac{8000}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{64 \cdot 10^6} = 1200$.	2 pont	
A zománcsal bevonandó felület területe tehát nem lehet kisebb 1200 cm^2 -nél.	1 pont	
Egyenlőség abban az esetben lehetséges, ha $x^2 = \frac{8000}{x}$, vagyis ha $x^3 = 8000$.	1 pont	
Ebből $x = 20$,	1 pont	
tehát a gyártott edények alapéle 20 cm .	1 pont	
Összesen:	9 pont	

7. c)		
Egy edényt véletlenszerűen kiválasztva az $0,02$ valószínűséggel selejtes lesz, tehát $0,98$ valószínűséggel jó.	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A kérdéses valószínűség a binomiális eloszlás alapján számolható:	1 pont	
$P(2 \text{ selejtes}) = \binom{50}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{48} \approx$	1 pont	
$\approx 0,186$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

7. a)		
Az edény alapéle legyen x cm hosszú. (Az edény térfogata 4000 cm^3 , ezért) $4000 = x^2 \cdot 6,4$.	1 pont	
$x = 25$	1 pont	
A zománccal bevonandó felület területe: ($625 + 4 \cdot 25 \cdot 6,4 =$) 1265 cm^2 .	1 pont	
Összesen:	3 pont	

7. b) első megoldás		
Ha az edény magassága m cm, akkor $4000 = x^2 m$, és a zománccal bevonandó felület területe (cm^2 -ben) $T = x^2 + 4xm$.	1 pont	
Az m -et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T -be: $T = x^2 + \frac{16000}{x}$.	1 pont	
Tekintsünk a $T: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$; $T(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$ függvényt.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha bármilyen módon (pl. $x > 0$) helyesen utal a függvény értelmezési tartományára.</i>
T -nek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$T'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$	1 pont	
$T'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$.	1 pont	
Mivel $T''(x) = 2 + \frac{32000}{x^3}$ pozitív az $x = 20$ -ban,	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol helyesen.</i>
ezért a T függvénynek az $x = 20$ helyen (abszolút) minimuma van.	1 pont	
A gyártott edények alapéle 20 cm.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

4. a) első megoldás		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra. A szigetet az S , a mentőcsónakot az M , a tengerjáró hajót a H pont jelöli. A hajó útjának és az SM egyenesnek a metszéspontját jelölje A .	2 pont	<i>Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a 2 pont.</i>
		
A HSA háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért $AS = 24$ (km), tehát	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez az ábrából derül ki.</i>
$MA = 8$ (km),	1 pont	
valamint az APM háromszög derékszögű és van 45° -os szöge (egyenlő szárú),	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez az ábrából derül ki.</i>
ezért $MP = 4\sqrt{2} (\approx 5,7)$ (km).	1 pont	
(Mivel $MP < 6$ km,) ezért a hajó legénysége észlelheti a veszjelzéseket.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

4. a) második megoldás		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra (lásd az első megoldásnál).	2 pont	<i>Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a 2 pont.</i>
Az SHM háromszögben $\text{tg } SHM \angle = \frac{16}{24}$,	1 pont	
ebből $SHM \angle \approx 33,7^\circ$.		
$MHP \angle \approx 45^\circ - 33,7^\circ = 11,3^\circ$	1 pont	
$MH = \sqrt{16^2 + 24^2} \approx 28,8$ (km)	1 pont	
$\sin 11,3^\circ \approx \frac{MP}{28,8}$, így $MP \approx 5,7$ (km).	1 pont	
(Mivel $MP < 6$ km,) ezért a hajó legénysége észlelheti a veszjelzéseket.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

4. a) harmadik megoldás		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra egy koordináta-rendszerben. A koordináta-rendszer origója legyen az S sziget, vízszintes tengelye a Ny-K-i, függőleges tengelye az D-É-i irány, egy egység legyen 1 km.	2 pont	<i>Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a 2 pont.</i>
A hajó útjának, tehát a HA egyenesnek az egyenlete: $y = x - 24$.	1 pont	
A segélykérő jelzés egy $(16; 0)$ középpontú, 6 egység sugarú körben észlelhető. E kör egyenlete: $(x - 16)^2 + y^2 = 36$.	1 pont	<i>A pont és egyenes távolságának képlete alapján a $(16; 0)$ pont távolsága az $x - y - 24 = 0$ egyenletű egyenestől:</i>
A kör egyenletébe behelyettesítve az egyenes egyenletéből nyert y -t: $(x - 16)^2 + (x - 24)^2 = 36$, azaz $x^2 - 40x + 398 = 0$.	1 pont	$d = \frac{ 16 - 0 - 24 }{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{2} < 6$.
Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa pozitív $(+8)$, ezért a kör és az egyenes metszi egymást.	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy a hajó legénysége észlelheti a vészjelzéseket.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

6. c)		
Ha a verseny kezdetétől eltelt egész órák száma n , akkor ennyi idő alatt a magyar autó által (akkumulátorcsere nélkül) megtett út a mértani sorozat első n tagjának összege:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$S_n = \frac{45 \cdot (0,955^n - 1)}{0,955 - 1}$.	1 pont	
Megoldandó (a pozitív egész számok halmazán) a $\frac{45 \cdot (0,955^n - 1)}{0,955 - 1} > 1100$ egyenlőtlenség.	1 pont*	
Rendezve a $0,955^n < -0,1$ egyenlőtlenséghez jutunk.	1 pont*	
Ennek nincs megoldása (mert minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0,955^n > 0$),	1 pont*	
tehát a világrekordot nem döntheti meg a magyar autó.	1 pont*	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik az egyenlőtlenség megoldása, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

*A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

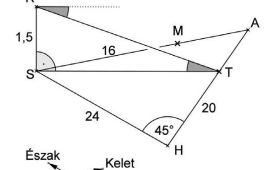
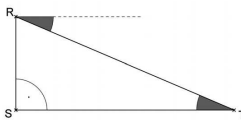
Az $\{S_n\} = \left\{ \frac{45 \cdot (0,955^n - 1)}{0,955 - 1} \right\}$ sorozat szigorúan monoton növekedő,	1 pont	
a határértéke $\frac{45}{0,045} = 1000$,	2 pont	
tehát a világrekordot nem döntheti meg a magyar autó.	1 pont	

6. a)		
Az egy óra alatt megtett úthosszak (km-ben mérve) egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai,	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
amelynek első tagja 45, hányadosa pedig 0,955.	1 pont	
$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 45 \cdot 0,955^9 (\approx 29,733)$	1 pont	
A magyar autó 10. órában megtett útja (egész km-re kerekítve) 30 km.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

6. b)		
Addig nem érdemes akkumulátort cserélni, amíg $45 \cdot 0,955^{n-1} \geq 20$ teljesül ($n \in \mathbf{N}$ és $n > 1$).	1 pont	
Mivel a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő,	1 pont	
ezért: $(n-1)\lg 0,955 \geq \lg \frac{20}{45}$.	1 pont	
$\lg 0,955 < 0$ miatt ebből adódik, hogy	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$n \leq \frac{\lg \frac{20}{45}}{\lg 0,955} + 1 \approx 18,61$.	1 pont	
(A 18. órában még teljesül, hogy legalább 20 km-t tesz meg az autó, de a 19. órában már nem.) Legkorábban a 19. órában érdemes akkumulátort cserélni.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzések:

- Ha a vizsgázó óráról órára (akár ésszerű kerekítésekkel) jól kiszámolja az autó által megtett utat és ez alapján jó választ ad, akkor jár a 4, illetve a 6 pont.
- Ha a vizsgázó a b) feladatban egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik az egyenlőtlenség megoldása, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat (egyenlet felírása 1 pont, jó megoldása 2 pont, jó válasz 1 pont).

4. b)		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra. A repülőgép (R), a sziget (S) és a tengerjáró hajó (T) egy S-nél derékszögű háromszög három csúcsában helyezkedik el.	1 pont	<i>Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a pont.</i>
		
(Az ST távolságot koszinusztétellel számolhatjuk ki.) $ST^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos 45^\circ$	2 pont	
$ST \approx 17,2$ (km).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem számítja ki az ST távolságot, de a depresszió szögére helyes számolással jó eredményt kap.</i>
 A depresszió szög nagysága megegyezik a TRS derékszögű háromszög RTS szögének nagyságával (váltószögek).	1 pont	<i>Akár az ábra, akár a szöveg alapján jár ez a pont.</i>
$\operatorname{tg} RTS \hat{=} \frac{RS}{TS} \left(\approx \frac{1,5}{17,2} \right)$	1 pont	
A depresszió szög $\approx 5^\circ$ nagyságú.	1 pont	<i>Ha a vizsgázó nem a feladat szövegének megfelelően kerekít, akkor a válaszáért nem kap pontot.</i>
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a depresszió szög pótszögét adja meg válaszként, akkor erre a részre legfeljebb 6 pontot kaphat.

II.

5. a)		
Az e egyenesen kijelölt 5 pont bármelyikét az f egyenesen kijelölt 4 pont bármelyikével összekötve megfelelő egyenest kapunk.	1 pont	
Így a megadott feltételnek megfelelő egyenesek száma $5 \cdot 4 = 20$.	1 pont	
Az adott feltételnek megfelelő háromszög két csúcsa az egyik, harmadik csúcsa a másik egyenesen van.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha az e egyenesen a háromszögnek két csúcsa van, akkor ez a két csúcs $\binom{5}{2}$ -féleképpen választható ki,	1 pont*	
így az ilyen háromszögek száma $(10 \cdot 4 =) 40$.	1 pont*	
Ha az f egyenesen van a háromszög két csúcsa, akkor ezek kiválasztására $\binom{4}{2}$ lehetőség van,	1 pont*	
így ebben az esetben $(6 \cdot 5 =) 30$ háromszög van.	1 pont*	
A megfelelő háromszögek száma: $40 + 30 = 70$.	1 pont*	
Az adott feltételnek megfelelő négyszögek két csúcsa az e , két csúcsa az f egyenesen van.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az e egyenesen két pontot $\binom{5}{2}$, az f egyenesen két pontot $\binom{4}{2}$ különböző módon lehet kiválasztani.	1 pont	
(Mivel bármely két e -beli csúcshoz bármely két f -beli csúcs választható), így a megfelelő négyszögek száma: $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$.	1 pont	
Összesen:	11 pont	

A *-gal jelölt 6 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

9 pontból 3-at $\binom{9}{3}$ -féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
Nincs háromszög, ha mindhárom pont egy egyenesről származik.	2 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a komplementerre vonatkozó gondolatmenet csak a megoldásból derül ki.</i>

Ezeket $\binom{5}{3}$, illetve $\binom{4}{3}$ -féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
Nincs háromszög $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} (=14)$ esetben.	1 pont	
Így a háromszögek száma: $\binom{9}{3} - \binom{5}{3} - \binom{4}{3} = 70$.	1 pont	

5. b) első megoldás		
Az egyenlően valószínű színezések száma: 2^9 .	2 pont	<i>Nem bontható.</i>
Az e egyenesen és az f egyenesen is kétféleképpen lehet egyforma színű az összes megjelölt pont,	1 pont	<i>Ha a csupa kék, illetve csupa piros pont eseteket nem tekinti, azaz két kedvező esettel számol, akkor itt csak 1 pontot kap.</i>
tehát 4 „kedvező” színezés van.	1 pont	
A kért valószínűség tehát: $\frac{4}{2^9} \left(= \frac{1}{2^7} \approx 0,0078 \right)$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. b) második megoldás		
Az e egyenesen az első pont színe tetszőleges, a másik 4 pont színének ezzel megegyezőnek kell lennie, ennek valószínűsége minden pont esetén $\frac{1}{2}$,	1 pont	
összesen tehát $\frac{1}{2^4}$.	1 pont	
Ugyanilyen gondolatmenet alapján $\frac{1}{2^3}$ annak valószínűsége, hogy az f egyenesen levő pontok azonos színűek.	1 pont	
(Mivel az e és az f egyenes jó színezése egymástól független események,) a keresett valószínűség az előző két érték szorzata,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
tehát $\frac{1}{2^7} (\approx 0,0078)$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	