ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2012. október 16.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)		
A bevétel: $5\cdot10^6\cdot200\ \left(=10^9\right)$ (Ft).	1 pont	
A kifizetett nyeremény: $4\cdot10^7+2\cdot10^6+8\cdot10^6+1{,}5\cdot10^8+2\cdot10^8+2\cdot10^8$ $(=6\cdot10^8)$ (Ft),	1 pont	
tehát a különbözet 400 millió Ft.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. b)		
(Az 5 millió sorsjegy bármelyikét egyenlő valószínűséggel húzhatjuk.) A kedvező esetek száma 550 844,	2 pont	*Ha egyértelműen kiderül, hogy a vizsgázó jó számokat adott össze, de számolási hibát vétett, akkor 1 pontot kaphat.*
tehát a keresett valószínűség: $p=\dfrac{550844}{5\cdot10^6}\approx0{,}11$.	2 pont	*A 0,1 is elfogadható válasz. A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

1. c) első megoldás		
A felvehető nyeremény várható értéke: $\dfrac{4\cdot10^7+2\cdot10^6+8\cdot10^6+1{,}5\cdot10^8+2\cdot10^8+2\cdot10^8}{5\cdot10^6}=$	2 pont	*Nem bontható.*
= 120 (Ft).	1 pont	
A nyereség várható értéke tehát (120 – 200 =) –80 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. c) második megoldás		
A sorsjegy kibocsátójának nyeresége a játékosok összes nyereségének ellentettje.	2 pont	
Egy játékos nyereségének várható értéke tehát $-\dfrac{400\,000\,000}{5\,000\,000}=$	1 pont	
= –80 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. c) harmadik megoldás		
nyeremény / nyereség / valószínűség: 10 000 000 / 9 999 800 / $\frac{4}{5\cdot 10^6} (= 0{,}0000008)$ 50 000 / 49 800 / $\frac{40}{5\cdot 10^6} (= 0{,}000008)$ 10 000 / 9 800 / $\frac{800}{5\cdot 10^6} (= 0{,}00016)$ 1 000 / 800 / $\frac{150\,000}{5\cdot 10^6} (= 0{,}03)$ 500 / 300 / $\frac{400\,000}{5\cdot 10^6} (= 0{,}08)$ 200 / 0 / $\frac{10^6}{5\cdot 10^6} (= 0{,}2)$ 0 / –200 / $\frac{3\,449\,156}{5\cdot 10^6} (= 0{,}6898312)$	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont jár, egynél több hiba esetén nem jár pont.*
A várható értéket az $E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$ képlet segítségével is kiszámíthatjuk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A nyereség várható értéke –80 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. első megoldás		
(Jelölje x azt a számot, amelyet 15-tel csökkentünk, y pedig a másikat.) $\left.\begin{aligned} x + y &= 29 \\ (x-15)(y+15) &= 5xy \end{aligned}\right\}$	2 pont	*Nem bontható.*
Az első egyenletből (például) y-t kifejezve és azt a második egyenletbe helyettesítve: $(x-15)(44-x) = 5x(29-x)$.	1 pont	*Ha x-et fejezte ki:* $(14-y)(y+15) =$ $= 5(29-y)y$.
A műveleteket elvégezve: $-x^2 + 59x - 660 = 145x - 5x^2$.	3 pont	*Bal oldalon a zárójel felbontása 1 pont, összevonás 1 pont, jobb oldalon a zárójel felbontása 1 pont.*
Rendezve: $4x^2 - 86x - 660 = 0$. (Egyszerűsítve: $2x^2 - 43x - 330 = 0$.)	1 pont	*Ha y-ra írja fel a másodfokú egyenletet, akkor a* $2y^2 - 73y + 105 = 0$ *egyenlet adódik.*
Az egyenlet megoldásai a –6 és a 27,5.	2 pont	

Ha a 15-tel csökkentendő szám a –6, akkor a másik szám a 35.	1 pont	
Ha a 15-tel csökkentendő szám a 27,5, akkor a másik szám az 1,5.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: Ha a két szám a –6 és a 35, akkor (az összegük 29,) a szorzatuk –210. A megváltoztatott számok a –21 és az 50, ezek szorzata –1050, ami valóban 5-szöröse a –210-nek.	1 pont	*Ha a vizsgázó a számolás leírása nélkül annyit ír, hogy a szöveg alapján ellenőrizte a megoldásokat, és azok megfelelőek, akkor ezért 1 pontot kaphat.*
Ha a két szám a 27,5 és az 1,5, akkor (az összegük 29,) a szorzatuk 41,25. A megváltoztatott számok a 12,5 és a 16,5, ezek szorzata 206,25, ami valóban 5-szöröse a 41,25-nek.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

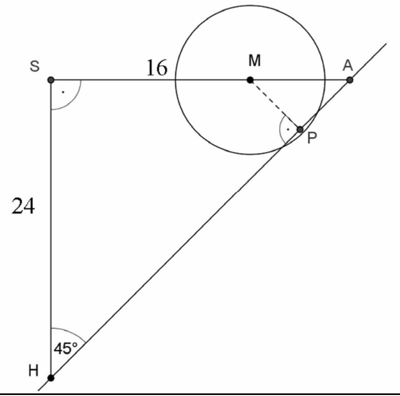
2. második megoldás		
(Ha a 15-tel növelendő szám x, akkor a másik $29-x$, c pedig jelölje az eredeti két szám szorzatát.) $\left.\begin{aligned} x(29-x)&=c \\ (x+15)(14-x)&=5c \end{aligned}\right\}$	2 pont	*Nem bontható.*
A második egyenletből kivonva az elsőt: $-30x+210=4c$.	1 pont	
Ebből x-et kifejezve: $x=7-\frac{2c}{15}$.	1 pont	*Ha c-t fejezte ki:* $c=-\frac{15}{2}x+\frac{105}{2}$.
Ezt visszaírva az első egyenletbe: $\left(7-\frac{2c}{15}\right)\cdot\left(22+\frac{2c}{15}\right)=c$.	1 pont	$x(29-x)=-\frac{15}{2}x+\frac{105}{2}$
A műveleteket elvégezve: $154-2c-\frac{4c^2}{225}=c$.	1 pont	
225-tel szorozva és rendezve: $0=4c^2+675c-34\,650$.	1 pont	$2x^2-73x+105=0$
Az egyenlet megoldásai a –210 és a 41,25.	2 pont	
Az első megoldásból $x=35$, ekkor a másik szám a –6,	1 pont	
a másodikból $x=1{,}5$, ekkor a másik szám a 27,5.	1 pont	
Ellenőrzés: lásd az első megoldásnál.	2 pont	
Összesen:	**13 pont**	

3. a)		
(A négyzetgyök miatt) $x \geq 0$,	1 pont	
(a logaritmus miatt) $\sqrt{x} > 0$.	1 pont	
A keresett halmaz: $]0;+\infty[$.	1 pont	*Az x > 0 válasz is elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

3. b)		
(A logaritmus miatt) $\cos x > 0$,	1 pont	
és (a négyzetgyök miatt) $\log_2(\cos x) \geq 0$,	1 pont	
azaz $\cos x \geq 1$.	1 pont	
(A koszinusz függvény értékkészlete miatt) $\cos x = 1$.	1 pont	
Az értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbf{R} \mid x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.	1 pont	*Az $x = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ válasz is elfogadható. Ha a $k \in \mathbf{Z}$ nem szerepel, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

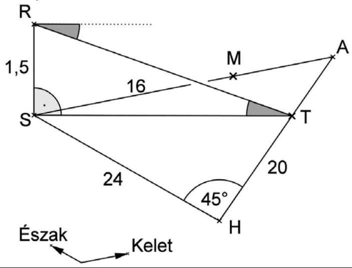
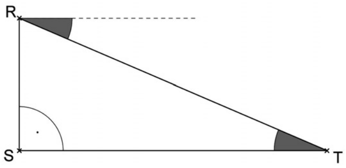
3. c)		
(A logaritmus alapja miatt) $x > 0$ és $x \neq 1$.	1 pont	*Ez a pont csak akkor jár, ha mindkét feltétel szerepel.*
(A logaritmus miatt) $\cos^2 x > 0$,	1 pont	
tehát $\cos x \neq 0$, azaz	1 pont	
$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	1 pont	
Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}\right)$, ahol $k \in \mathbf{N}$.	1 pont	*A $k \in \mathbf{N}$ helyett a $k \in \mathbf{Z}$ is elfogadható. Az x > 0, de $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) és $x \neq 1$ válasz is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha k lehetséges értékei sehol sem szerepelnek, akkor legfeljebb 4 pont adható.

4. a) első megoldás		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra. A szigetet az *S*, a mentőcsónakot az *M*, a tengerjáró hajót a *H* pont jelöli. A hajó útjának és az *SM* egyenesnek a metszéspontját jelölje *A*. 	2 pont	*Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a 2 pont.*
A *HSA* háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért $AS = 24$ (km), tehát	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez az ábrából derül ki.*
$MA = 8$ (km),	1 pont	
valamint az APM háromszög derékszögű és van 45°-os szöge (egyenlő szárú),	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez az ábrából derül ki.*
ezért $MP = 4\sqrt{2}\,(\approx 5{,}7)$ (km).	1 pont	
(Mivel $MP < 6$ km,) ezért a hajó legénysége észlelheti a vészjelzéseket.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a) második megoldás		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra (lásd az első megoldásnál).	2 pont	*Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a 2 pont.*
Az *SHM* háromszögben $\operatorname{tg} SHM\sphericalangle = \frac{16}{24}$, ebből $SHM\sphericalangle \approx 33{,}7°$.	1 pont	
$MHP\sphericalangle \approx 45° - 33{,}7° = 11{,}3°$	1 pont	
$MH = \sqrt{16^2+24^2} \approx 28{,}8$ (km)	1 pont	
$\sin 11{,}3° \approx \frac{MP}{28{,}8}$, így $MP \approx 5{,}7$ (km).	1 pont	
(Mivel $MP < 6$ km,) ezért a hajó legénysége észlelheti a vészjelzéseket.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a) harmadik megoldás		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra egy koordináta-rendszerben. A koordináta-rendszer origója legyen az S sziget, vízszintes tengelye a Ny-K-i, függőleges tengelye az D-É-i irány, egy egység legyen 1 km.	2 pont	*Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a 2 pont.*
A hajó útjának, tehát a HA egyenesnek az egyenlete: $y = x - 24$.	1 pont	
A segélykérő jelzés egy (16; 0) középpontú, 6 egység sugarú körben észlelhető. E kör egyenlete: $(x-16)^2 + y^2 = 36$.	1 pont	*A pont és egyenes távolságának képlete alapján a (16; 0) pont távolsága az $x - y - 24 = 0$ egyenletű egyenestől:* $d = \frac{\lvert 16-0-24 \rvert}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4\sqrt{2} < 6$.
A kör egyenletébe behelyettesítve az egyenes egyenletéből nyert y-t: $(x-16)^2 + (x-24)^2 = 36$, azaz $x^2 - 40x + 398 = 0$.	1 pont	
Ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa pozitív (+8), ezért a kör és az egyenes metszi egymást.	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy a hajó legénysége észlelheti a vészjelzéseket.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. b)		
A feladat feltételeit feltüntető jó ábra. A repülőgép (R), a sziget (S) és a tengerjáró hajó (T) egy S-nél derékszögű háromszög három csúcsában helyezkedik el. 	1 pont	*Ha ábra nélkül is jó a megoldása, akkor is jár ez a pont.*
(Az ST távolságot koszinusztétellel számolhatjuk ki.) $ST^2 = 24^2 + 20^2 - 2\cdot 24\cdot 20\cdot \cos 45°$	2 pont	
$ST \approx 17{,}2$ (km).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem számítja ki az ST távolságot, de a depresszió szögre helyes számolással jó eredményt kap.*
 A depresszió szög nagysága megegyezik a TRS derékszögű háromszög RTS szögének nagyságával (váltószögek).	1 pont	*Akár az ábra, akár a szöveg alapján jár ez a pont.*
tg $RTS\sphericalangle = \dfrac{RS}{TS} \left(\approx \dfrac{1{,}5}{17{,}2}\right)$	1 pont	
A depresszió szög ≈ 5° nagyságú.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem a feladat szövegének megfelelően kerekít, akkor a válaszért nem kap pontot.*
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a depresszió szög pótszögét adja meg válaszként, akkor erre a részre legfeljebb 6 pontot kaphat.

II.

5. a)		
Az e egyenesen kijelölt 5 pont bármelyikét az f egyenesen kijelölt 4 pont bármelyikével összekötve megfelelő egyenest kapunk.	1 pont	
Így a megadott feltételnek megfelelő egyenesek száma $5 \cdot 4 = 20$.	1 pont	
Az adott feltételnek megfelelő háromszög két csúcsa az egyik, harmadik csúcsa a másik egyenesen van.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha az e egyenesen a háromszögnek két csúcsa van, akkor ez a két csúcs $\binom{5}{2}$-féleképpen választható ki,	1 pont*	
így az ilyen háromszögek száma $(10 \cdot 4 =)\ 40$.	1 pont*	
Ha az f egyenesen van a háromszög két csúcsa, akkor ezek kiválasztására $\binom{4}{2}$ lehetőség van,	1 pont*	
így ebben az esetben $(6 \cdot 5 =)\ 30$ háromszög van.	1 pont*	
A megfelelő háromszögek száma: 40 + 30 = 70.	1 pont*	
Az adott feltételnek megfelelő négyszögek két csúcsa az e, két csúcsa az f egyenesen van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az e egyenesen két pontot $\binom{5}{2}$, az f egyenesen két pontot $\binom{4}{2}$ különböző módon lehet kiválasztani.	1 pont	
(Mivel bármely két e-beli csúcshoz bármely két f-beli csúcs választható), így a megfelelő négyszögek száma: $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

*A *-gal jelölt 6 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

9 pontból 3-at $\binom{9}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
Nincs háromszög, ha mindhárom pont egy egyenesről származik.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a komplementerre vonatkozó gondolatmenet csak a megoldásból derül ki.*

Ezeket $\binom{5}{3}$, illetve $\binom{4}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	
Nincs háromszög $\binom{5}{3}+\binom{4}{3}$ (=14) esetben.	1 pont	
Így a háromszögek száma: $\binom{9}{3}-\binom{5}{3}-\binom{4}{3}=70$.	1 pont	

5. b) **első megoldás**		
Az egyenlően valószínű színezések száma: 2^9.	2 pont	*Nem bontható.*
Az *e* egyenesen és az *f* egyenesen is kétféleképpen lehet egyforma színű az összes megjelölt pont,	1 pont	*Ha a csupa kék, illetve csupa piros pont eseteket nem tekinti, azaz két kedvező esettel számol, akkor itt csak 1 pontot kap.*
tehát 4 „kedvező” színezés van.	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát: $\frac{4}{2^9}\left(=\frac{1}{2^7}\approx 0{,}0078\right)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b) **második megoldás**		
Az *e* egyenesen az első pont színe tetszőleges, a másik 4 pont színének ezzel megegyezőnek kell lennie, ennek valószínűsége minden pont esetén $\frac{1}{2}$,	1 pont	
összesen tehát $\frac{1}{2^4}$.	1 pont	
Ugyanilyen gondolatmenet alapján $\frac{1}{2^3}$ annak valószínűsége, hogy az *f* egyenesen levő pontok azonos színűek.	1 pont	
(Mivel az *e* és az *f* egyenes jó színezése egymástól független események,) a keresett valószínűség az előző két érték szorzata,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
tehát $\frac{1}{2^7}(\approx 0{,}0078)$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a)		
Az egy óra alatt megtett úthosszak (km-ben mérve) egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai,	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
amelynek első tagja 45, hányadosa pedig 0,955.	1 pont	
$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 45 \cdot 0{,}955^9$ ($\approx 29{,}733$)	1 pont	
A magyar autó 10. órában megtett útja (egész km-re kerekítve) 30 km.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. b)		
Addig nem érdemes akkumulátort cserélni, amíg $45 \cdot 0{,}955^{n-1} \geq 20$ teljesül ($n \in \mathbf{N}$ és $n > 1$).	1 pont	
Mivel a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő,	1 pont	
ezért: $(n-1)\lg 0{,}955 \geq \lg\frac{20}{45}$.	1 pont	
$\lg 0{,}955 < 0$ miatt ebből adódik, hogy	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$n \leq \frac{\lg\frac{20}{45}}{\lg 0{,}955} + 1 \approx 18{,}61$.	1 pont	
(A 18. órában még teljesül, hogy legalább 20 km-t tesz meg az autó, de a 19. órában már nem.) Legkorábban a 19. órában érdemes akkumulátort cserélni.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó óráról órára (akár ésszerű kerekítésekkel) jól kiszámolja az autó által megtett utat és ez alapján jó választ ad, akkor jár a 4, illetve a 6 pont.

2. Ha a vizsgázó a b) feladatban egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik az egyenlőtlenség megoldása, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat (egyenlet felírása 1 pont, jó megoldása 2 pont, jó válasz 1 pont).

6. c)		
Ha a verseny kezdetétől eltelt egész órák száma *n*, akkor ennyi idő alatt a magyar autó által (akkumulátorcsere nélkül) megtett út a mértani sorozat első *n* tagjának összege:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$S_n = \frac{45 \cdot (0{,}955^n - 1)}{0{,}955 - 1}$.	1 pont	
Megoldandó (a pozitív egész számok halmazán) a $\frac{45 \cdot (0{,}955^n - 1)}{0{,}955 - 1} > 1100$ egyenlőtlenség.	1 pont*	
Rendezve a $0{,}955^n < -0{,}1$ egyenlőtlenséghez jutunk.	1 pont*	
Ennek nincs megoldása (mert minden $n \in \mathrm{N}^+$ esetén $0{,}955^n > 0$),	1 pont*	
tehát a világrekordot nem döntheti meg a magyar autó.	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik az egyenlőtlenség megoldása, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

*A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az $\{S_n\} = \left\{ \frac{45 \cdot (0{,}955^n - 1)}{0{,}955 - 1} \right\}$ sorozat szigorúan monoton növekedő,	1 pont	
a határértéke $\frac{45}{0{,}045} = 1000$,	2 pont	
tehát a világrekordot nem döntheti meg a magyar autó.	1 pont	

7. a)		
Az edény alapéle legyen x cm hosszú. (Az edény térfogata 4000 cm^3, ezért) $4000 = x^2 \cdot 6{,}4$.	1 pont	
$x = 25$	1 pont	
A zománccal bevonandó felület területe: $(625 + 4 \cdot 25 \cdot 6{,}4 =)\ 1265\,\text{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b) első megoldás		
Ha az edény magassága m cm, akkor $4000 = x^2 m$, és a zománccal bevonandó felület területe (cm^2-ben) $T = x^2 + 4xm$.	1 pont	
Az m-et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T-be: $T = x^2 + \dfrac{16000}{x}$.	1 pont	
Tekintsünk a $T: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R};\ T(x) = x^2 + \dfrac{16\,000}{x}$ függvényt.	1 pont	*Ez a pont jár, ha bármilyen módon (pl. x > 0) helyesen utal a függvény értelmezési tartományára.*
T-nek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T'(x) = 2x - \dfrac{16000}{x^2}$	1 pont	
$T'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$.	1 pont	
Mivel $T''(x) = 2 + \dfrac{32000}{x^3}$ pozitív az $x = 20$-ban,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol helyesen.*
ezért a T függvénynek az $x = 20$ helyen (abszolút) minimuma van.	1 pont	
A gyártott edények alapéle 20 cm.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. b) második megoldás		
Ha az edény magassága m cm, akkor $4000 = x^2 m$, és a zománccal bevonandó felület területe (cm^2-ben) $T = x^2 + 4xm$.	1 pont	
Az m-et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T-be: $T = x^2 + \frac{16000}{x}$.	1 pont	
$x^2 + \frac{16000}{x} = x^2 + \frac{8000}{x} + \frac{8000}{x}$, ahol $x > 0$.	1 pont	
Alkalmazzuk a jobb oldalon álló összeg három tagjára a számtani és a mértani közepük közötti egyenlőtlenséget: $x^2 + \frac{8000}{x} + \frac{8000}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8000}{x} \cdot \frac{8000}{x}} =$ $= 3 \cdot \sqrt[3]{64 \cdot 10^6} = 1200$.	2 pont	
A zománccal bevonandó felület területe tehát nem lehet kisebb 1200 cm^2-nél.	1 pont	
Egyenlőség abban az esetben lehetséges, ha $x^2 = \frac{8000}{x}$, vagyis ha $x^3 = 8000$.	1 pont	
Ebből $x = 20$,	1 pont	
tehát a gyártott edények alapéle 20 cm.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. c)		
Egy edényt véletlenszerűen kiválasztva az 0,02 valószínűséggel selejtes lesz, tehát 0,98 valószínűséggel jó.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kérdéses valószínűség a binomiális eloszlás alapján számolható:	1 pont	
$P(2\,\text{selejtes}) = \binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}186$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. első megoldás		
Az ABC háromszög AC oldalára felírva a koszinusztételt: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot 0{,}5$.	2 pont	
$AB^2 = 50$	1 pont	
$BC^2 = 16 + (p+4)^2 =$	1 pont	
$= p^2 + 8p + 32$	1 pont	
$AC^2 = 81 + (p-1)^2 =$	1 pont	
$= p^2 - 2p + 82$	1 pont	
A kapott értékeket visszahelyettesítve a koszinusztételbe: $p^2 - 2p + 82 = p^2 + 8p + 82 - \sqrt{50}\cdot\sqrt{p^2+8p+32}$.	1 pont	
Rendezve: $\sqrt{50(p^2+8p+32)} = 10p$.	2 pont	
Mivel a bal oldalon pozitív szám áll, ezért $p > 0$.	1 pont	*Ezt a pontot úgy is megkaphatja a vizsgázó, ha a következmény-egyenlet két gyöke közül kizárja a negatívat.*
Négyzetre emelve és egyszerűsítve: $p^2 + 8p + 32 = 2p^2$,	1 pont	
amiből $p^2 - 8p - 32 = 0$ adódik.	1 pont	
Ennek az egyenletnek a gyökei: $p_1 = 4 + 4\sqrt{3}$, $p_2 = 4 - 4\sqrt{3}$.	2 pont	*Ha a vizsgázó közelítő értékekkel számol, akkor erre a részre legfeljebb 2 pontot kaphat.*
(Mivel $p > 0$, ezért) $p = 4 + 4\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

8. második megoldás		
A $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok által bezárt szög 60°-os, ezért skaláris szorzatuk $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \lvert\overrightarrow{BA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert\cdot\cos 60^\circ =$	1 pont	
$= \dfrac{AB\cdot BC}{2}$,	1 pont	
ahol $AB = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$,	1 pont	
és $BC = \sqrt{4^2 + (p+4)^2}$.	1 pont	
A skaláris szorzat felírható a megfelelő koordináták szorzatának összegeként is.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mivel $\overrightarrow{BA}(-5; 5)$ és $\overrightarrow{BC}(4; p+4)$,	1 pont	
ezért $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -20 + 5\cdot(p+4) = 5p$.	2 pont	

A skaláris szorzat kétféle kifejezésének egyenlősége miatt:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\dfrac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{16+(p+4)^2}}{2}=5p$.	1 pont	
Mivel az egyenlet bal oldala pozitív, ezért $p>0$.	1 pont	*Ezt a pontot úgy is megkaphatja a vizsgázó, ha a következmény-egyenlet két gyöke közül kizárja a negatívat.*
Rendezés, négyzetre emelés, majd nullára redukálás után kapjuk: $p^2-8p-32=0$.	2 pont	
Ennek az egyenletnek a gyökei: $p_1=4+4\sqrt{3}$, $p_2=4-4\sqrt{3}$.	2 pont	*Ha a vizsgázó közelítő értékekkel számol, akkor erre a részre legfeljebb 2 pontot kaphat.*
(Mivel $p>0$, ezért) $p=4+4\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

8. harmadik megoldás		
Az *AB* egyenes iránytangense: $\dfrac{1-(-4)}{2-7}=-1$,	2 pont	*Nem bontható.*
így irányszöge 135° (–45°).	1 pont	
Az *AB* egyenes, a *BC* egyenes és az *x* tengely által közrefogott háromszög két szöge 45°-os és 60°-os,	2 pont	
ezért a harmadik szöge 75°-os.	1 pont	
Ebből következik, hogy a *BC* egyenes irányszöge 75°,	2 pont	
iránytangense (meredeksége) tg 75º.	1 pont	
Ennek pontos értéke (például a megfelelő addíciós tétel alkalmazásával) $\operatorname{tg}75^\circ=\left(\operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ}=\right)2+\sqrt{3}$.	2 pont*	
A *BC* egyenes egyenlete: $y+4=(2+\sqrt{3})(x-7)$.	2 pont	
A *C* pont koordinátái kielégítik ezt az egyenletet,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így $p+4=(2+\sqrt{3})(11-7)$,	1 pont	
ahonnan $p=4+4\sqrt{3}$.	1 pont*	
Összesen:	**16 pont**	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó tg 75º közelítő értékével számol, ezért p-re sem pontos értéket kap, a *-gal jelzett 3 pontot elveszíti. (tg 75º ≈ 3,732, p ≈ 10,928)*

9. a)		
Az (1) állítás hamis.	1 pont	
Egy ötpontú egyszerű gráfban legfeljebb 10 él húzható, 11 éle tehát nem lehet.	2 pont	
A (2) állítás igaz.	1 pont	
(A gráf csúcsai legfeljebb negyedfokúak lehetnek.) Ha a gráf minden csúcsa harmadfokú volna, akkor a gráfban a fokszámok összege páratlan lenne (15), ami lehetetlen.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. b)		
Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó.	2 pont	
Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú (esetleg nem összefüggő) komponense lenne, akkor legfeljebb $1 + 3 = 4$ éle lehetne.	2 pont	
Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5.	2 pont	
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van,	1 pont	
ezek közül $\binom{10}{6}$ (= 210)-féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt.	2 pont	
A keresett valószínűség tehát $p = \frac{5}{210}$ (≈ 0,024).	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	