ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. a)

Csak olyan x szám lehet megoldás, amelyre $0{,}5 < x$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha csak a helyes végeredményt veti össze az értelmezhetőséggel.*
Mivel $0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$,	1 pont	
és az $\frac{1}{5}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő, ezért $2x-1>1$,	1 pont	
azaz $x>1$. (Ezek a valós számok eleget tesznek a kezdeti feltételnek is.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

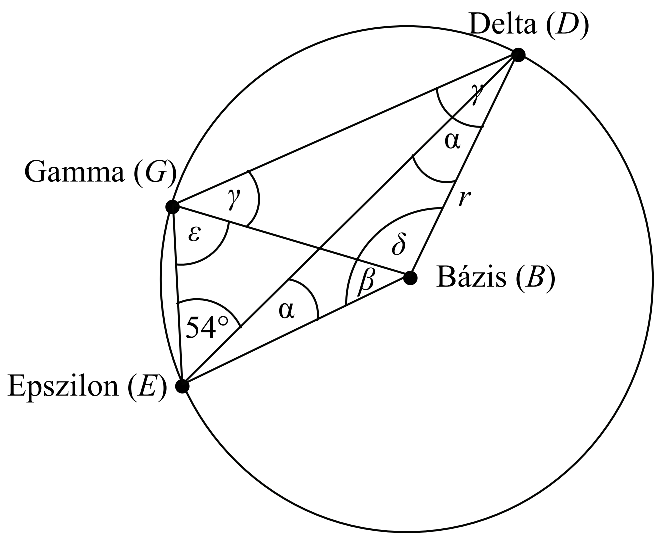
1. b)

$1=2^0$, és	1 pont	*Az egyenlőtlenség felírásáért indoklás nélkül is jár a két pont.*
mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan növekvő, ezért $\lvert 2x-1\rvert - 2 > 0$,	1 pont	
azaz $\lvert 2x-1\rvert > 2$. Ez az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $2x-1>2$, vagy	1 pont	*Ez a 4 pont akkor is jár, ha grafikonról olvassa le a megoldást (2 pont), és ellenőrzi, hogy a leolvasott határok pontosak (2 pont).*
$2x-1<-2$.	1 pont	
Azaz $x>1{,}5$, vagy	1 pont	
$x<-0{,}5$. (A megoldáshalmaz: $]-\infty\,;-0{,}5\,[\cup]\,1{,}5\,;+\infty\,[$)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a)

Az 1 : 500 000 kicsinyítés azt jelenti, hogy a térképen 1 cm a valóságban 500 000 cm,	1 pont	
vagyis 5 km.	1 pont	
Így a bázis és a tornyok távolsága $3{,}5\cdot 5=17{,}5$ km.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Helyes végeredmény közlése indoklás nélkül is 3 pont.*

2. b) első megoldás



A vázlat jelöléseivel: az *EBD,* a *BEG* és a *BGD* háromszögek egyenlő szárúak, mivel a *B* pont egyenlő távolságra van mindhárom másik ponttól.	1 pont	
$\beta+\delta=142°$, $\alpha=\dfrac{180°-142°}{2}=19°$,	1 pont	
$\varepsilon=54°+19°=73°$,	1 pont	
$\beta=180°-2\cdot73°=34°$,	1 pont	
$\delta=142°-34°=108°$.	1 pont	
Például a koszinusz-tétel alapján:	1 pont	
$GD=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot17{,}5^2\cdot\cos108°}\approx28{,}3$ (km),	1 pont	
$EG=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot17{,}5^2\cdot\cos34°}\approx10{,}2$ (km),	1 pont	
$ED=\sqrt{17{,}5^2+17{,}5^2-2\cdot17{,}5^2\cdot\cos142°}\approx33{,}1$ (km).	1 pont	
A hétfői teljes úthossz: $BE+EG+GD+DB=17{,}5+10{,}2+28{,}3+17{,}5=$ $=73{,}5\approx74$ km.	1 pont	
A csütörtöki teljes úthossz: $BG+GE+ED+DB=17{,}5+10{,}2+33{,}1+17{,}5=$ $=78{,}3\approx78$ km.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

2. b) második megoldás		
Az *EDG* háromszög köré írt körének középpontja *B*, sugara $r = 17{,}5$ (km), mivel a *B* pont ekkora távolságra van mindhárom másik ponttól.	1 pont	
A *GBD* középponti szög 108°,	1 pont	
mert kétszerese az 54°-os *GED* kerületi szögnek.	1 pont	
Az *EBG* középponti szög 142° – 108°= 34°.	1 pont	
A kerületi-középponti szögek összefüggése alapján $EDG\angle = 17°$,	1 pont	
és $EGD\angle = 109°$.	1 pont	
Az *EDG* háromszög oldalait az $a = 2r\sin\alpha$ összefüggés alapján számítva: $GD = 35 \cdot \sin 54° \approx 28{,}32$ km,	1 pont	
$EG = 35 \cdot \sin 17° \approx 10{,}23$ km,	1 pont	
$ED = 35 \cdot \sin 109° \approx 33{,}09$ km.	1 pont	
A hétfői teljes úthossz: $BE + EG + GD + DB = 17{,}5 + 10{,}23 + 28{,}32 + 17{,}5 =$ $= 73{,}55 \approx 74$ km.	1 pont	
A csütörtöki teljes úthossz: $BG + GE + ED + DB \approx 17{,}5 + 10{,}23 + 33{,}09 + 17{,}5 =$ $= 78{,}32 \approx 78$ km.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	
Ha az EGD háromszög oldalait egészre kerekíjük, akkor DG=28, EG=10; ED=33, a hétfői úthossz így 73 km, a csütörtöki 78 km. Ezt a számítást is fogadjuk el.		

3. a)		
A hármas számrendszerben az abb_3 háromjegyű számban a b számjegy háromféle, az a számjegy kétféle lehet, ezért 6 db abb_3 alakú szám van.	1 pont	
Írjuk fel ezeket a hármas és a tízes számrendszerben is:	3 pont	*Legalább 8 db jó szám a 12-ből 1 pont, 11 db jó szám a 12-ből 2 pont.*
Három szám felel meg a feladat követelményeinek: a $200_3 = 18$, a $211_3 = 22$ és a $222_3 = 26$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

a	b	abb_3	tízesben
1	0	100	9
1	1	111	13
1	2	122	17
2	0	200	18
2	1	211	22
2	2	222	26

3. b) első megoldás		
Az ötelemű halmaznak $2^5 = 32$ darab részhalmaza van,	1 pont	
ezek között nulla elemű 1 darab,	1 pont	
egy elemű 5 darab van,	1 pont	
vagyis legalább kételemű részhalmazok száma: $32 - 6 = 26$.	1 pont	
Pontosan azokban a halmazokban **nem** osztható hárommal az elemek szorzata, amelyeknek elemei között csak a 2, 4 és az 5 számok szerepelnek.	1 pont	
Ilyen kételemű halmaz $\binom{3}{2} = 3$ darab,	1 pont	
ilyen háromelemű 1 darab van.	1 pont	
A megfelelő részhalmazok száma tehát $(26 - 4 =)\,22$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

3. b) második megoldás		
Összeszámoljuk, hány olyan legalább kételemű részhalmaza van a {2; 3; 4; 5; 6} halmaznak, amelyben az elemek szorzata osztható hárommal,	1 pont	
vagyis amelyben az elemek között van 3-mal osztható is (a 3 vagy a 6).	1 pont	
8 olyan részhalmaz van, amelynek eleme a 3, de nem eleme a 6, ($8=2^3$, a 3 mellé a 2, 4, 5 elemek közül választhatunk),	1 pont	
ezek között legalább kételemű 7 db, mert a $\{3\}$ egyelemű halmaz is ott van a 8 fenti részhalmaz között.	1 pont	
8 olyan részhalmaz van, amelynek eleme a 6, de nem eleme a 3 ($8=2^3$, a 6 mellé a 2, 4, 5 elemek közül választhatunk),	1 pont	
ezek között legalább kételemű 7 db, mert a $\{6\}$ egyelemű halmaz is ott van a 8 fenti részhalmaz között.	1 pont	
Azoknak a legalább kételemű részhalmazoknak a száma, amelyeknek eleme a 3, és eleme a 6 is, összesen szintén 8 ($=2^3$, a 3 és a 6 mellé a 2, 4, 5 elemek közül választhatunk).	1 pont	
A megfelelő részhalmazok száma tehát $(7+7+8=)\ 22$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

3. b) harmadik megoldás		
A legalább kételemű részhalmaz elemeinek szorzata pontosan akkor osztható 3-mal, ha az elemei között van 3-mal osztható (tehát a 3 vagy a 6 legalább egyike az elemek között szerepel).	1 pont	
Kételemű részhalmaz $\binom{5}{2}=10$ darab van,	1 pont	
ezek között $\binom{3}{2}=3$-ban nem szerepel sem a 3, sem a 6.	1 pont	
Háromelemű részhalmaz $\binom{5}{3}=10$ darab van,	1 pont	
ezek között csak 1 olyan van (a $\{2\,;4\,;5\}$), amelyben nem szerepel sem a 3, sem a 6.	1 pont	
A legalább négyelemű részhalmazok mindegyikében szerepel a 3 és a 6 közül legalább az egyik, tehát ezek mindegyike megfelel.	1 pont	
A legalább négyelemű részhalmazok száma $\left(\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=\right)6$.	1 pont	
Az összes megfelelő részhalmazok száma tehát: 7+9+6=22.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:

1. Az alábbi táblázatban felsoroljuk az összes legalább kételemű részhalmazt, és azokat, amelyek megfelelnek a feladat követelményeinek:

részhalmaz	összes	elemek szorzata osztható 3-mal
2 elemű	$\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{2;6\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{3;6\}$, $\{4;5\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$.	$\{2;3\}$, $\{2;6\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$, $\{3;6\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$.
3 elemű	$\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;5\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.	$\{2;3;4\}$, $\{2;3;5\}$, $\{2;3;6\}$, $\{2;4;6\}$, $\{2;5;6\}$, $\{3;4;5\}$, $\{3;4;6\}$, $\{3;5;6\}$, $\{4;5;6\}$.
4 elemű	$\{2;3;4;5\}$, $\{2;3;4;6\}$, $\{2;3;5;6\}$,. $\{2;4;5;6\}$, $\{3;4;5;6\}$.	$\{2;3;4;5\}$, $\{2;3;4;6\}$, $\{2;3;5;6\}$, $\{2;4;5;6\}$, $\{3;4;5;6\}$.
5 elemű	{2; 3; 4; 5; 6}	{2; 3; 4; 5; 6}

2. Teljes értékű az a megoldás is, amelyben a vizsgázó az összesből azokat a részhalmazokat válogatja ki (sorolja fel), amelyek nem felelnek meg a feladat követelményeinek.

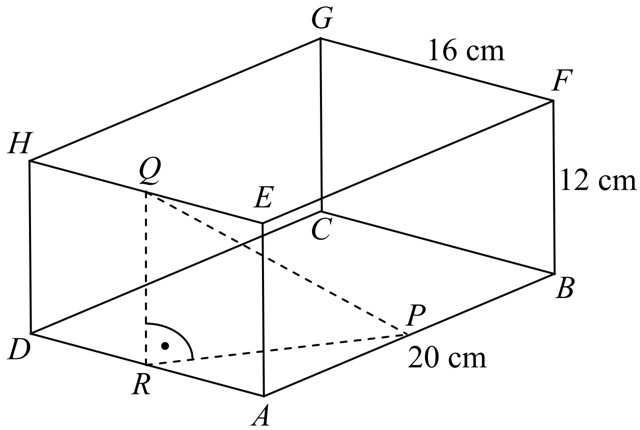
3. Ha a vizsgázó csak a megfelelő részhalmazokat sorolja fel, és nem tesz arra utalást, hogy miért teljes a felsorolása, megoldására legfeljebb 6 pontot kaphat.

4. Ha logikai szitát alkalmaz a vizsgázó, így pontozzunk:

„benne van a 3” + „benne van a 6” – „benne van a 3 és a 6” *4 pont*

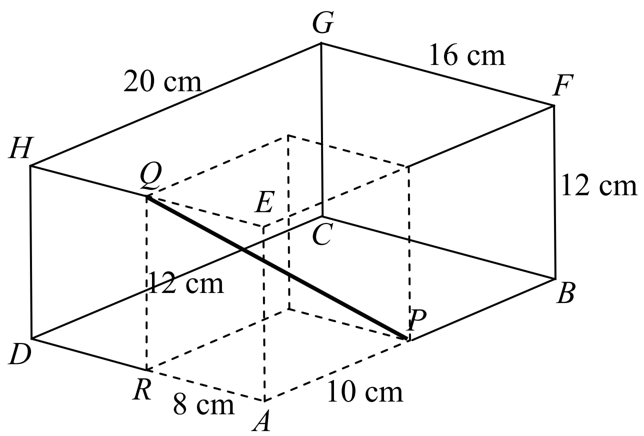
$(2^4-1)+(2^4-1)-2^3=15+15-8=22$ *4 pont*

4. a) első megoldás



Legyen az AD él felezőpontja R. Ekkor a PRQ háromszögnek R-nél derékszöge van.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, ez a pont jár.*
A PAR derékszögű háromszögből (Pitagorasz-tétellel): $PR^2 = 10^2 + 8^2 (= 164)$.	1 pont	
Mivel $QR = AE = 12$ (cm), ezért a PRQ derékszögű háromszögből (Pitagorasz-tétellel):	1 pont	
$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = 12^2 + 10^2 + 8^2$. $PQ = \sqrt{308}\ (\approx 17{,}55)$ (cm).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a) **második megoldás**		



PQ egy olyan téglatest egyik testátlója, amelynek egyik csúcsa az *A*, az *A*-ból kiinduló három élének hossza pedig 10 cm, 8 cm és 12 cm.	2 pont	
A *PQ* testátló hossza tehát: $PQ=\sqrt{12^2+10^2+8^2}=\sqrt{304}$ $(\approx 17{,}55)$ (cm).	2 pont	*1 pont a testátlóra vonatkozó képlet helyes alkalmazásáért, 1 pont pedig a jó számolásért jár.*
Összesen:	**4 pont**	

4. b)		
Különböző élpárokat kiválasztani annyiféleképpen lehet, ahányféleképpen 12 különböző elemből 2 elemet ki tudunk választani sorrendre való tekintet nélkül.	1 pont	*Ez az 1 pont helyes megoldás esetén akkor is jár, ha a vizsgázó a magyarázatot nem írja le.*
Ezért a különböző egyenespárok száma: $\binom{12}{2}$,	1 pont	
ennek értéke pedig $\left(\frac{12\cdot 11}{2}=\right)66$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. c)		
Minden egyes élegyenest 4 további élegyenes metsz, ezért a metsző egyenespárok száma: $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$.	2 pont	*1 pont a helyes összeszámlálási módszer megtalálásáért jár akkor is, ha csak a megoldásából derül ki a helyes gondolatmenet.*
Minden egyes élegyenessel 3 további élegyenes párhuzamos, ezért a párhuzamos egyenespárok száma: $\frac{12 \cdot 3}{2} = 18$.	1 pont	
Minden egyes élegyenessel 4 további élegyenes kitérő, ezért a kitérő egyenespárok száma: $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
A három eset közül kettőt kiszámítva és a b) feladat eredményét felhasználva megkapható a harmadik esethez tartozó szám. Ha a vizsgázó így jár el, de a b)-ben kapott hibás eredményével jól számolva adja meg a (hibás) válaszát úgy, hogy újabb hibát nem követ el, a c) részben adható teljes pontszámot megkapja.		

4. d)		
Két kitérő élegyenes távolsága a mindkettőt merőlegesen metsző harmadik élegyenesre illeszkedő él (normál transzverzális) hossza.	1 pont	*Ez a pont jár akkor is, ha az ábrán jelölve vannak a távolságok, de szöveges indok nincs.*
Az *AE* élegyenes és az *FG* (vagy *BC)* élegyenes távolsága $(EF = AB =)$ 20 cm.	1 pont	
Az *AE* élegyenes és a *HG* (vagy *DC)* élegyenes távolsága $(EH = AD =)$ 16 cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II.

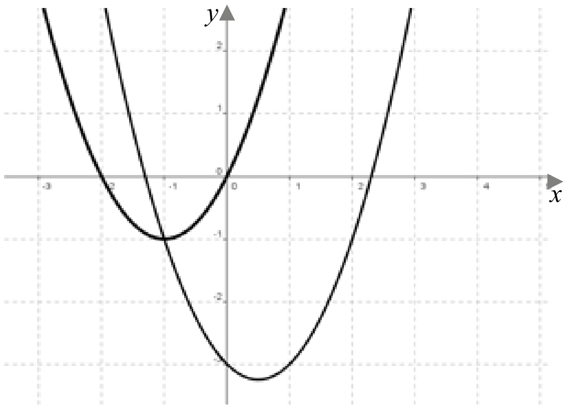
5. a) első megoldás		
A mértani sorozat hányadosa egynél kisebb pozitív szám, ezért az összegekből képzett S_n sorozat konvergens,	1 pont	
határértéke: $s=\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{32}{1-\dfrac{1}{128}}=\dfrac{4096}{127}\left(\approx 32{,}25\right).$	2 pont	
(Mivel a mértani sorozat minden tagja pozitív, az S_n sorozat növekvő, így), $S_n<s=\dfrac{4096}{127}<32{,}5$, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. a) második megoldás		
A mértani sorozat első *n* tagjának összege: $S_n=\dfrac{32\cdot\left(\dfrac{1}{128^n}-1\right)}{\dfrac{1}{128}-1}$, $S_n=\dfrac{2^{12}}{127}\cdot\left(1-\dfrac{1}{128^n}\right).$	1 pont	
Az $\{S_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekedő, (mert az $\left\{\dfrac{1}{128^n}\right\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő),	1 pont	
és minden *n*-re $S_n<\dfrac{2^{12}}{127}$.	1 pont	
$\left(S_n<\right)\dfrac{2^{12}}{127}=\dfrac{4096}{127}<32{,}5$, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b)		
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n =$ $= \frac{1}{128} \cdot \frac{32}{128} \cdot \frac{32^2}{128} \cdot \ldots \cdot \frac{32^{k-1}}{128} \cdot \ldots \cdot \frac{32^{n-1}}{128} =$	1 pont	
$= \frac{32^{1+2+3+\ldots+n-1}}{128^n}$	1 pont	
A számláló kitevője az első $n-1$ pozitív egész összege, ami zárt alakban $\frac{n(n-1)}{2}$.	2 pont	
Mivel $32 = 2^5$ és $128 = 2^7$, ezért $\frac{32^{1+2+3+\ldots+n-1}}{128^n} = \frac{2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}}$.	1 pont	
Mivel $2048 = 2^{11}$, megoldandó tehát a $\frac{2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}}}{2^{7n}} = \left(2^{11}\right)^{3n}$ egyenlet.	1 pont	
Innen $2^{5 \cdot \frac{n(n-1)}{2}} = 2^{7n} \cdot 2^{33n} = 2^{40n}$,	1 pont	
ahonnan az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű volta (szigorú monotonitása) miatt az	1 pont	
$5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 40n$ következik.	1 pont	
(Az n értéke pozitív egész,) n-nel oszthatunk, ezért $\frac{5}{2}(n-1) = 40$.	1 pont	
Ennek pedig egyetlen gyöke az $n = 17$.	1 pont	
Az eredeti egyenlőség egyetlen megoldása tehát az $n = 17$.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

6. a) első megoldás		
A két parabolának pontosan akkor van közös pontja az x tengelyen, ha az $x^2+px+1=0$ és $x^2-x-p=0$ másodfokú egyenleteknek van közös gyöke.	1 pont	
A közös gyök megoldása az $x^2+px+1=x^2-x-p$ egyenletnek.	2 pont	
Rendezés után: $x(p+1)=-(p+1)$.	1 pont	
Ha $p=-1$, akkor az egyenletnek minden x valós szám megoldása, tehát a két parabola azonos ($y=x^2-x+1$). Ez az eset tehát nem felel meg.	1 pont	
Ha $p\neq-1$,	1 pont	
akkor $x=-1$ lehet csak. Ekkor $p=2$.	1 pont	
Így a két parabola egyenlete $y=x^2+2x+1$, illetve $y=x^2-x-2$. (Közös pontjuk a (–1; 0) pont.)	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

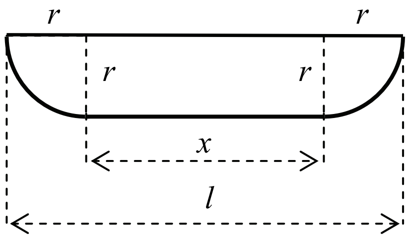
6. a) második megoldás		
A két parabolának pontosan akkor van közös pontja az x tengelyen, ha az $x^2+px+1=0$ és $x^2-x-p=0$ másodfokú egyenleteknek van közös gyöke.	1 pont	
Jelölje az $x^2+px+1=0$ egyenlet két (nem feltétlen különböző) gyökét x_1 és x_2, az $x^2-x-p=0$ egyenlet gyökeit pedig x_1' és x_2'. Viète formulákat alkalmazva:	1 pont	
$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=1 \end{array}\right\}$ illetve $\left.\begin{array}{l} x_1'+x_2'=1 \\ x_1'\cdot x_2'=-p \end{array}\right\}$	1 pont	
(1.) A két egyenletnek ugyanazok a számok a megoldásai ($x_1=x_1'$, és $x_2=x_2'$). Ekkor $p=-1$ lehet csak. Viszont így a két egyenlet ugyanazt az $y=x^2-x+1$ egyenletű parabolát írja le, amit a feltétel kizár.	1 pont	
(2.) Ha nem egyenlő a két megoldáshalmaz, de van közös elemük, pl. $x_1=x_1'$. A Viète-formulákból adódó egyenletek második egyenletei szerint $x_1\cdot x_2=1$ és $x_1\cdot x_2'=-p$. Ezekből $x_2'=-px_2$. A Viète-formulákból adódó egyenletek első egyenletei ezek szerint: $x_1+x_2=-p$ és $x_1-px_2=1$. A két egyenlet megfelelő oldalainak különbségéből $x_2(p+1)=-(p+1)$ adódik.	1 pont	
Ha $p=-1$, akkor az (1.) eset valósul meg.	1 pont	
Ha $p\neq-1$, akkor $x_2=-1$. Ekkor $p=2$.	1 pont	
Így a két parabola egyenlete $y=x^2+2x+1$, illetve $y=x^2-x-2$. (Közös pontjuk a (-1; 0) pont.)	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. b)		
		
Az $y = x^2 + 2x$ és az $y = x^2 - x - 3$ egyenletű parabolák vázlatos rajza.	2 pont	*Jól ábrázolt parabolánként 1-1 pont.*
A parabolák közös pontjának első koordinátája –1.	1 pont	
Tekintsük az $f:[-1;0] \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x$, és $g:[-1;0] \to \mathbf{R}, g(x) = x^2 - x - 3$ függvényeket. A kérdéses síkidom területe: $T = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx$.	1 pont	*Ha a vizsgázó külön integrálja a két függvényt, és azután végez kivonást, helyes számolás esetén jár az 5 pont.*
$T = \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x - (x^2 - x - 3)\right)dx = \int_{-1}^{0} (3x + 3)dx =$	2 pont	
$= \left[\frac{3x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{0} =$	1 pont	
$= 0 - \left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{3}{2}$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. a)		
1. hamis	1 pont	*Egyértelműen megadott helyes válaszokért adható pont.*
2. hamis	1 pont	
3. igaz	1 pont	
4. igaz	1 pont	
5. hamis	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. b)		
A statisztika szerint egy elküldött SMS $\frac{1}{60}$, azaz körülbelül 0,0167 valószínűséggel nem érkezik meg,	1 pont	*Ezt a 2 pontot akkor is megkapja a vizsgázó, ha ez a gondolat csak a megoldásából olvasható ki.*
és így 1–0,0167=0,9833 valószínűséggel megérkezik a címzetthez.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy 3 darab SMS közül pontosan 1 nem érkezik meg: $\binom{3}{1}\cdot 0{,}9833^2 \cdot 0{,}0167$,	1 pont	*Ha a binomiális együttható hiányzik, vagy hibás, akkor az utolsó két pontból legfeljebb 1-et kaphat.*
ami közelítőleg 0,0484 (azaz 4,84%).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha $\frac{1}{60}$-dal és $\frac{59}{60}$-dal számol, akkor $\frac{3481}{72000} \approx$ $\approx 0{,}0483$ adódik.*

7. c)		
Ha n darab SMS-t küldünk, akkor annak a valószínűsége, hogy ezek mindegyike megérkezik: $0{,}9833^n$.	1 pont	
Ezért $1-0{,}9833^n$ valószínűséggel legalább egy SMS nem érkezik meg.	1 pont	*2 pont jár a következő megállapításért: Legfeljebb 2 % annak a valószínűsége, hogy mindegyik SMS megérkezik a címzettjéhez.*
Azt a legkisebb n természetes számot keressük, amelyekre: $1-0{,}9833^n \geq 0{,}98$.	1 pont	
Rendezve: $0{,}02 \geq 0{,}9833^n$.	1 pont	
Ebből: $\log_{0,9833} 0{,}02 \leq n$ (mert az 1-nél kisebb alapú logaritmusfüggvények szigorúan monoton csökkenők),	1 pont	
$n \geq 232{,}3$.	1 pont	*Ha $\frac{1}{60}$-dal és $\frac{59}{60}$-dal számol, akkor $n \geq 232{,}8$-at kap az egyenlőtlenség megoldásaként.*
Tehát, ha legalább 233 SMS-t küldünk, akkor legalább 0,98 annak a valószínűsége, hogy ezek közül legalább 1 nem érkezik meg a címzettjéhez.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	*Ha egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja azt, hogy a legkisebb értéket kapta meg (pl. monotonitásra való hivatkozással), akkor a c) rész megoldására legfeljebb 4 pontot kaphat.*

8. a)		
		
Jelöljük x-szel a lekerekített szélű csatorna-keresztmetszet vízszintes szakaszát, ekkor a csatorna l szélessége: $l = 2r + x$. A feltételek szerint: $\frac{2r\pi}{2} + x = 20$	1 pont	
és $\frac{r^2\pi}{2} + rx = 55$.	1 pont	
Az első egyenletből: $x = 20 - r\pi$, amit behelyettesítve a második egyenletbe: $\frac{r^2\pi}{2} + r(20 - r\pi) = 55$.	1 pont	
$r^2\pi - 40r + 110 = 0$ $r_1 \approx 8{,}7$, ekkor $x_1 < 0$, így ez nem megoldás.	1 pont	
$r_2 \approx 4{,}0$, ahonnan $r = 4{,}0\,\text{cm}$.	1 pont	
Így $x = 20 - 4\pi = 7{,}434... \approx 7{,}4$. A csatorna szélessége $l = 2r + x \approx 8{,}0 + 7{,}4 = 15{,}4$ cm.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	*Ha nem egy tizedesre kerekítve adja meg a válaszokat, csak egyszer vonjunk le 1 pontot.*

8. b)		
A feltételek szerint: $r \cdot \pi + x = 20$, valamint $T = r \cdot x + \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$ maximális. $(x = 20 - r\pi)$ A $T(r) = r\,(20 - r\pi) + \frac{r^2\pi}{2} = -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ ($0 < r \le \frac{20}{\pi}$) függvény maximumát keressük.	1 pont	
$T(r) = -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$, teljes négyzetté kiegészítéssel: $T(r) = -\frac{\pi}{2}\left(r - \frac{20}{\pi}\right)^2 + \frac{200}{\pi}$	2 pont*	
(Az összeg első tagja nem pozitív, második tagja állandó, ezért) az összeg akkor maximális, ha az első tag nullával egyenlő, vagyis $r - \frac{20}{\pi} = 0$.	1 pont*	
A maximum helye: $r = \frac{20}{\pi}$.	1 pont*	
Innen $x = 20 - r\pi = 0$ miatt: a maximális áteresztőképességű csatorna keresztmetszetének szélessége $l = 2r + x = 2r$, amit bizonyítani kellett.	1 pont	
A maximális áteresztőképességű csatorna keresztmetszete egy olyan félkör, amelynek a sugara $r = \frac{20}{\pi} \approx 6{,}4$ (cm).	1 pont	
A feladat egy $r = \frac{20}{\pi} \approx 6{,}4$ cm sugarú, $l = 250$ cm magasságú félhenger térfogatának kiszámítása. $V = \frac{\left(\frac{20}{\pi}\right)^2 \pi \cdot 250}{2}$	1 pont	*Ha r=6,4 értékkel számol:* $V = \frac{6{,}4^2 \cdot \pi \cdot 250}{2} \approx 16084{,}95$ (cm^3) *értéket kap, amelyből szintén következik a 16 liter helyes válasz.*
$V \approx 15915{,}5$ (cm^3)	1 pont	
≈ 16 liter	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontos részre adunk még két megoldási módszert:*

II. módszer		
Az $r \mapsto -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$ egy olyan másodfokú függvény, amelyben a főegyüttható $(-\frac{\pi}{2})$ negatív, vagyis a függvény maximummal rendelkezik.	1 pont	
A függvény két zérushelye: $r_1 = 0$ és $r_2 = \frac{40}{\pi}$.	1 pont	
A maximumhely a két zérushely számtani közepe, vagyis $r = \frac{20}{\pi}$.	1 pont	
Ez $0 < r \le \frac{20}{\pi}$ miatt a vizsgált T függvénynek is (abszolút) maximumhelye.	1 pont	

III. módszer		
Az $r \mapsto -\frac{r^2\pi}{2} + 20r$ $(r \in \mathbf{R}^+)$ függvény deriváltfüggvénye: $r \mapsto -r\pi + 20$ $(r \in \mathbf{R}^+)$.	1 pont	
Ennek zérushelyére: $-r\pi + 20 = 0$, ekkor $r = \frac{20}{\pi}$ lehetséges szélsőérték hely.	1 pont	
Mivel a második deriváltfüggvény : $r \mapsto -\pi$ ezen a helyen negatív, így $r = \frac{20}{\pi}$ maximumhely.	1 pont	
Ez $0 < r \le \frac{20}{\pi}$ miatt a vizsgált T függvénynek is (abszolút) maximumhelye.	1 pont	

9.		
A bajnokság első felében, (az első öt mérkőzésen) az András által dobott pontok átlaga legyen a. Az első öt fordulóban összesen dobott pontok száma így: $5a$.	2 pont	
A hatodik, hetedik, nyolcadik és kilencedik mérkőzésen András összesen $23+14+11+20=68$ pontot dobott.	1 pont	
A kilencedik forduló utáni pontátlag: $\frac{5a+68}{9}$.	1 pont	
A feltétel alapján ez az átlag nagyobb, mint az első öt mérkőzésen dobott átlag,	1 pont	
azaz $\frac{5a+68}{9} > a$	1 pont	
ahonnan $a<17$.	2 pont	
A tizedik mérkőzésen András által dobott pontok száma legyen x. A bajnokság végén András mérkőzésenkénti pontátlaga: $\frac{5a+68+x}{10}$.	2 pont	
A feltétel alapján: $\frac{5a+68+x}{10} \geq 18$,	1 pont	
azaz $5a+68+x \geq 180$,	1 pont	
ahonnan $x \geq 112-5a$.	1 pont	
Mivel $a<17$, ezért $x \geq 112-5a > 112-5\cdot 17 = 112-85 = 27$.	2 pont	
Mivel $x>27$, ezért Andrásnak legalább 28 pontot kellett dobnia az utolsó fordulóban.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	