ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2013. október 15.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

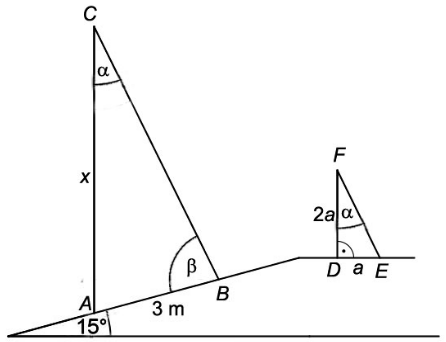
I.

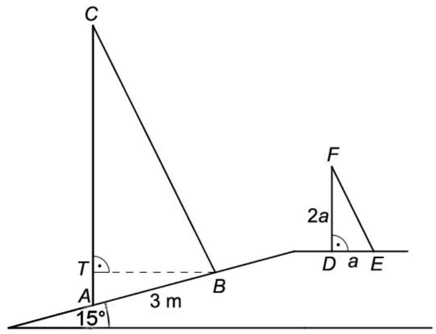
1. a) első megoldás		
(A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya és értékkészlete miatt:) $x \in [-2; 0]$.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem adja meg az ismeretlen lehetséges értékeit, de a gyökök helyességét behelyettesítéssel vizsgálja, akkor ez a pont jár.*
Négyzetre emelés után: $x + 2 = x^2$.	1 pont	
Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei: 2 és –1.	1 pont	
Közülük csak a –1 eleme a fenti intervallumnak (és az átalakítások ezen az intervallumon ekvivalensek), ezért ez az egyetlen megoldás.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. a) második megoldás		
Az $x \mapsto \sqrt{x+2}$ ($x \geq -2$), és az $x \mapsto -x$ függvények ábrázolása közös koordinátarendszerben.	1-1 pont	*Ha a vizsgázó ábrázolás nélkül a függvények szigorú monotonitására hivatkozik, akkor ez a 2 pont jár.*
A metszéspontjuk első koordinátája $x = -1$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
Közös alapra hozva a két oldalt: $4^{(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}}$.	1 pont	
(Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $(x-1)\cdot(x+4) = \dfrac{x-1}{x+4}$.	1 pont	
Ebből $x_1 = 1$ vagy	2 pont	
$(x+4)^2 = 1$.	1 pont	*A négyzetre emelés után az $x^2 + 8x + 15 = 0$ egyenletet kapjuk.*
Ebből $x_2 = -3$ vagy $x_3 = -5$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az $x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ egyenlethez jut, ebből megkapja a gyököket és azokat ellenőrzi, akkor maximális pontszámot kaphat.

2. első megoldás		
A szövegnek megfelelő, az adatokat helyesen feltüntető ábra. 	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a különböző rajzokon vagy rajz nélkül, de az itt feltüntetett összefüggéseket helyesen használja.*
Az ACB és DFE szögek egyenlők (mivel mindkettő a napsugarak és a függőleges által bezárt szög).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a szögek egyenlőségét az ábrán jelöli.*
A DEF derékszögű háromszögben: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.	2 pont	
$\alpha \approx 26{,}57°$	1 pont	
BAC szög $(90° - 15° =)$ $75°$.	1 pont	
Így $\beta \approx 78{,}43°$.	1 pont	
(Szinusztétel az ABC háromszögben:) $\frac{\sin 78{,}43°}{\sin 26{,}57°} = \frac{x}{3}$.	2 pont	
$x \approx 6{,}57$	1 pont	
A fa tehát körülbelül 6,6 méter magas.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**12 pont**	

2. második megoldás		
Bontsuk fel az *ABC* háromszöget egy vízszintes szakasszal két derékszögű háromszögre (*ABT* és *CTB* háromszögek). 	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a különböző rajzokon vagy rajz nélkül, de az itt feltüntetett összefüggéseket helyesen használja.*
Az *ABT* szög szintén 15°.	1 pont	
(Az *ABT* derékszögű háromszögben:) $\sin 15° = \frac{AT}{3}$.	1 pont	
$AT \approx 0{,}78$ (m)	1 pont	
A *BT* távolság szögfüggvények vagy a Pitagorasz-tétel segítségével számítható ki.	1 pont	*Ez a pont a megfelelő egyenlet felírásáért jár.*
$BT \approx 2{,}90$ (m)	1 pont	
A *CTB* háromszög hasonló az *FDE* háromszöghöz, (mivel oldalaik páronként párhuzamosak, így megfelelő szögeik megegyeznek),	2 pont	
ezért $\frac{BT}{CT} = \frac{1}{2}$.	1 pont	
$CT \approx 5{,}80$ (m)	1 pont	
A fa teljes magassága tehát ($AT + CT \approx$) 6,6 méter.	1 pont	*Ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**12 pont**	

3. a)		
Ha az 50 adat átlaga 0,32, akkor összegük $(50 \cdot 0{,}32 =) 16$.	2 pont	
(Mivel az adatsokaság minden adata nemnegatív,) legfeljebb 8 darab 2-es lehet az 50 adat között. (8 darab 2-es és 42 darab 0 esetén valóban 0,32 az átlag.)	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b) első megoldás		
Indirekt módon tegyük fel, hogy a medián lehet 0,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
azaz a nemcsökkenő sorozatba rendezett sokaságban a 25. és a 26. szám (és így az első 24 szám) is 0.	1 pont	
Ekkor összesen legfeljebb 24 szám lehet 1 vagy 2.	1 pont	
Az 50 szám összege tehát legfeljebb 48 lehet,	1 pont	
az elérhető legnagyobb átlag pedig 0,96.	1 pont	
Mivel ez kisebb, mint 1,04, ellentmondásra jutottunk,	1 pont	
azaz nem lehet a medián 0.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) második megoldás		
Indirekt módon tegyük fel, hogy a medián lehet 0,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
azaz a nemcsökkenő sorozatba rendezett sokaságban a 25. és a 26. szám (és így az első 24 szám) is 0.	1 pont	
Ekkor összesen legfeljebb 24 szám lehet 1 vagy 2, vagyis ha x az 1-esek, y pedig a 2-esek száma, akkor $x + y \le 24$,	1 pont	
és $\dfrac{x+2y}{50} = 1{,}04$, ahonnan $x = 52 - 2y$.	1 pont	
Behelyettesítve az egyenlőtlenségbe: $52 - 2y + y \le 24$, ahonnan $y \ge 28$.	1 pont	
Mivel ez nagyobb, mint 24, ellentmondásra jutottunk,	1 pont	
azaz nem lehet a medián 0.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. c)		
Például 31 darab 1 és 19 darab 0 esetén 0,62 az átlag, valamint 1 a(z egyetlen) módusz,	2 pont	*Bármilyen jó példáért vagy más helyes indoklásért jár ez a 2 pont.*
tehát lehet az 50 adat módusza az 1.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. a)		
A 17 gramm 18 karátos ékszer aranytartalma $17 \cdot \frac{18}{24} =$	1 pont	
$= 12{,}75$ (gramm).	1 pont	
x gramm 14 karátos ékszer aranytartalma: $x \cdot \frac{14}{24} = 12{,}75$ (gramm).	1 pont	
(Ebből $x \approx 21{,}86$), így a két gyűrű együttes tömege (a megfelelő kerekítéssel) legfeljebb 21,9 gramm.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b)		
A két gyűrű térfogatának összege: $V = \frac{m}{\rho} = \frac{16}{15} \approx$	1 pont	
$\approx 1{,}0667\ \text{cm}^3 = 1066{,}7\ \text{mm}^3$.	1 pont	*Ez a pont a jó mértékegység-átváltásért jár.*
Egy gyűrű térfogata két henger térfogatának különbsége.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az egyik gyűrű belső sugara 8,5 mm, külső sugara 10 mm, és ha x a keresett szélesség, akkor $V_1 = 10^2\pi \cdot x - 8{,}5^2\pi \cdot x \approx$	1 pont	
$\approx 87{,}2x\ (\text{mm}^3)$.	1 pont	
A másik gyűrű belső sugara 9,9 mm, külső sugara 11,5 mm, így $V_2 = 11{,}5^2\pi \cdot x - 9{,}9^2\pi \cdot x \approx$	1 pont	
$\approx 107{,}6x\ (\text{mm}^3)$.	1 pont	
$V = V_1 + V_2$, azaz $1066{,}7 = 87{,}2x + 107{,}6x$.	1 pont	
Ebből $x \approx 5{,}48$ mm.	1 pont	
A gyűrűk szélessége (a megfelelő kerekítéssel) 5,5 mm.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó a gyűrűk megadott átmérőjét tekinti sugárnak, akkor a b) feladatra legfeljebb 8 pontot kaphat.

2. Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

II.

5. a)		
Az összes eset száma $\binom{10}{5}$ (= 252),	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.*
a kedvező esetek száma $\binom{7}{4}$ (= 35),	1 pont	
így a kérdéses valószínűség: $p=\frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}}\approx 0{,}139$.	1 pont	*A 13,9% is elfogadható válaszként.*
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó rossz (pl. visszatevéses) modellt használ, akkor erre a részre 0 pont jár.

5. b) első megoldás		
Bármelyik öt számot egyféleképpen lehet növekvő sorrendben kihúzni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A megfelelő húzások (a kedvező esetek) száma tehát $\binom{10}{5}$ (= 252).	1 pont	
(A húzási sorrendet figyelembe véve) az összes eset száma $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ (= 30 240).	1 pont	
A keresett valószínűség: $p=\frac{\binom{10}{5}}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}\approx 0{,}008$.	1 pont	*A 0,8% is elfogadható válaszként.*
Összesen:	**4 pont**	

5. b) második megoldás		
Bármelyik öt szám húzása esetén bármelyik húzási sorrend egyenlően valószínű.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Adott öt szám esetén ezek száma $5!$ (= 120).	1 pont	
Ezek közül egy húzási sorrend növekvő.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p=\frac{1}{5!}\approx 0{,}008$.	1 pont	*A 0,8% is elfogadható válaszként.*
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor az a) és b) részben összesen 1 pontot veszítsen.

5. c)		
A telitalálat valószínűsége: $p_5 = \frac{1}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{252} \approx 0{,}004.$	1 pont	
Négy találat esetén a kedvező esetek száma: $\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{1} = 25$,	2 pont	
így a négy találat valószínűsége: $p_4 = \frac{25}{\binom{10}{5}} = \frac{25}{252} \approx 0{,}099.$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. d) első megoldás		
A szelvények eladásából származó bevétel: $240 \cdot 200 = 48\ 000$ (Ft).	1 pont	
Egy szelvényre vonatkozóan a kiadás várható értéke: $p_5 \cdot 5000 + p_4 \cdot 1000 = 0{,}004 \cdot 5000 + 0{,}099 \cdot 1000 =$ $= 119$ (Ft).	2 pont	
Az eladott összes szelvényre a kiadás várható értéke: $240 \cdot 119 = 28\ 560$ (Ft).	1 pont	
Így az alapítvány hasznának várható értéke: 48 000 – 28 560 = 19 440 Ft.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

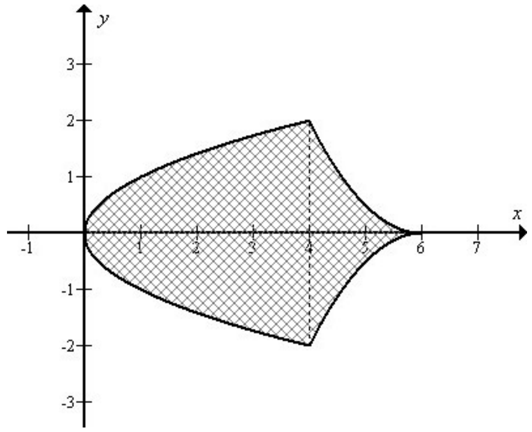
5. d) második megoldás		
A szelvények eladásából származó bevétel: $240 \cdot 200 = 48\ 000$ (Ft).	1 pont	
Az öttalálatos szelvények számának várható értéke: $p_5 \cdot 240 = 0{,}004 \cdot 240 = 0{,}96$.	1 pont	
A négytalálatosok számának várható értéke: $p_4 \cdot 240 = 0{,}099 \cdot 240 = 23{,}76$.	1 pont	
Az eladott összes szelvényre a kiadás várható értéke: $0{,}96 \cdot 5000 + 23{,}76 \cdot 1000 = 28\ 560$ (Ft).	1 pont	
Így az alapítvány hasznának várható értéke: 48 000 – 28 560 = 19 440 Ft.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Más, helyes gondolatmenettel és jó kerekítésekkel kapott részeredmények és végeredmény is elfogadható.

6. a)		
A tehertaxi működtetésének kilométerenkénti teljes költsége az üzemeltetésből származó 400 + 0,8x (Ft) költségből és a vezető $\frac{2200}{x}$ (Ft) munkadíjából tevődik össze x $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A teljes költséget 1 kilométerre forintban az $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = 400 + 0{,}8x + \frac{2200}{x}$ függvény adja meg.	1 pont	*Ez a pont jár, ha bármilyen módon (pl. $x > 0$) helyesen utal a függvény értelmezési tartományára.*
Az f-nek csak ott lehet szélsőértéke, ahol az első deriváltja 0.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x) = 0{,}8 - \frac{2200}{x^2}$	1 pont*	
$f'(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $0{,}8x^2 = 2200$.	1 pont*	
Ebből $x = \sqrt{2750} \approx 52{,}44$.	1 pont	
Mivel $f''(x) = \frac{4400}{x^3} > 0$, tehát a függvény második deriváltja mindenhol, így 52,44-ben is pozitív, ezért f-nek itt valóban minimuma van.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol.*
Tehát (egészre kerekítve) 52 km/h átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget használva: $0{,}8x + \frac{2200}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{0{,}8x \cdot \frac{2200}{x}} = 2\sqrt{1760}$.	2 pont	
Mivel az egyenlőtlenség jobb oldala állandó, a bal oldal akkor minimális, ha éppen ezzel az állandóval egyenlő.	1 pont	
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az összeg két tagja egyenlő, azaz $0{,}8x = \frac{2200}{x}$.	1 pont	

6. b)		
Jó ábra. 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem készít ábrát, de a kérdéses területet jól írja fel.*
A kérdéses terület: $T=2\left(\int_0^4 \sqrt{x}dx+\int_4^6 \frac{x^2-12x+36}{2}dx\right)$	2 pont	
A zárójelben szereplő első tag primitív függvénye $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)$,	1 pont	
a második tagé pedig $\frac{x^3}{6}-3x^2+18x$.	1 pont	
(Alkalmazva a Newton-Leibniz tételt:) $T=2\left(\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4+\left[\frac{x^3}{6}-3x^2+18x\right]_4^6\right)=$	1 pont	
$=2\left[\left(\frac{16}{3}-0\right)+\left(36-\frac{104}{3}\right)\right]=2\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{3}\right)=\frac{40}{3}$, tehát az embléma modelljének területe $\frac{40}{3}$ terület-egység.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. a) **első megoldás**		
Ha a hatszög oldalának hossza a, a rövidebb átló az a oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese,	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így $a\sqrt{3}=5\sqrt{2}$,	1 pont*	
ahonnan $a=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(=\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$.	1 pont*	
A szabályos hatszög területe 6 darab a oldalú szabályos háromszög területének összege,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
így $T=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=$	1 pont	
$=25\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

(A hatszög középpontját K-val jelölve) az ACK háromszög egy 120°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög.	1 pont	
Ebben a háromszögben felírva a koszinusztételt: $\left(5\sqrt{2}\right)^2=a^2+a^2-2a^2\cos 120°$.	1 pont	
Ebből $a^2=\frac{50}{3}$.	1 pont	

7. a) **második megoldás**		
A szabályos hatszög felbontható hat darab, az (első megoldáshoz tartozó megjegyzés jelölésével) ACK háromszöggel egybevágó háromszögre.	1 pont	
Mivel az $AC=5\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög három darab, az ACK háromszöggel egybevágó háromszögre bontható fel,	1 pont	
ezért a hatszög területe kétszerese a háromszög területének.	2 pont	
Így $T=2\cdot\frac{\left(5\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=$	1 pont	
$=25\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. b)		
A t_1 területű szabályos hatszög oldala az ABC háromszög AC oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala,	1 pont	

hossza $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.	1 pont	
$t_1 = 6 \cdot \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$	1 pont	
(A következő szabályos hatszög t_2 területét megkaphatjuk például úgy, hogy a t_1 területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk t_1-ből.) $t_2 = t_1 - 6 \cdot \frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{3 \cdot 75\sqrt{3}}{16}\left(= \frac{225\sqrt{3}}{16}\right)$.	2 pont*	
A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
amelynek hányadosa $q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$.	1 pont*	
A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$, hányadosa pedig $q = \frac{3}{4}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Így $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + ... + t_n) = \frac{t_1}{1-q} =$	1 pont	
$= 75\sqrt{3}$.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

Megjegyzések:

*1. A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó átdarabolással vagy az a) rész eredményére hivatkozva igazolja, hogy az egymást követő hatszögek területének aránya mindig* $\frac{3}{4}$.

2. Ha a vizsgázó nem mindenhol pontos értékekkel számol, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.

3. Az utolsó 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

$t_1 + t_2 + ... + t_n = t_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = t_1 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1}$	1 pont	
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + ... + t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 4t_1\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 4t_1 =$	1 pont	
$= 75\sqrt{3}$.	1 pont	

8.		
(Ha a keresett szám $10a+b$, akkor – mivel két szám számtani közepe nem kisebb a számok harmonikus közepénél – a feladat szövege szerint) $\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=1$ (ahol a és b nullától különböző számjegyek).	2 pont	
Ezt átalakítva: $(a-b)^2=2(a+b)$.	2 pont	
Mivel a és b számjegyek, ezért $(a-b)^2=2(a+b)\le 36$.	1 pont	
Mivel $2(a+b)$ páros, ezért $(a-b)^2$ is, tehát vagy mindkét számjegy páros vagy mindkettő páratlan.	1 pont	
Pozitív páros négyzetszám 36-ig három van: 4, 16 és 36, azaz vagy 2 vagy 4 vagy 6 a két számjegy különbsége.	1 pont	
I) $\lvert a-b\rvert=2$. Ekkor $4=2(a+b)\Rightarrow 2=a+b$.	1 pont	
(Mivel mindkettő 0-nál nagyobb egész, ezért) csak $a=1$, $b=1$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon nincs megfelelő szám.	1 pont	
II) Ha $\lvert a-b\rvert=4$, akkor $a+b=8$.	1 pont	
Az egyenletrendszert megoldva kapjuk: $a=6$, $b=2$	1 pont	
vagy $a=2$, $b=6$.	1 pont	
III) $\lvert a-b\rvert=6$. Ekkor $36=2(a+b)\Rightarrow 18=a+b$.	1 pont	
(Mivel mindkettő 10-nél kisebb egész, ezért) csak $a=9$, $b=9$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon sincs megfelelő szám.	1 pont	
Mivel csak a II) esetben kaptunk megoldást, ezért a megfelelő számok a 26 és a 62.	1 pont	
Ellenőrzés: a 2 és a 6 számtani közepe 4, harmonikus közepe 3, tehát megfelelnek a feladat feltételeinek.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megvizsgál minden szóba jöhető (a, b) számpárt, és helyesen kiválasztja a feladat megoldásait, akkor maximális pontszámot kaphat.

9. a)		
Akkor kapunk négy megfelelő húrt, ha a végpontjaik között az ötből pontosan négy különböző szerepel. (A körüljárási iránynak megfelelően minden kiválasztott pontnégyeshez pontosan egy konvex négyszög tartozik.)	1 pont	
(Öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, ezért) a kedvező esetek száma 5.	1 pont	
Az összes eset száma: $\binom{10}{4}$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p = \frac{5}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42}\ (\approx 0{,}024)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b)		
Ha mindhárom pontot érintjük, akkor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség van.	1 pont	
Ha csak két ponton megyünk át, akkor a lehetőségek száma $3 \cdot 2 = 6$.	1 pont	
Ha csak egy ponton megyünk át, akkor 3 lehetőség van, de közvetlenül is átmehetünk *A*-ból *C*-be, ez még 1 eset.	1 pont	
Az összes lehetséges útvonalak száma tehát: 6 + 6 + 3 + 1 = 16.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó a fentiek közül csak egy esetet vizsgált.*
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges útvonalat helyesen felsorolja, akkor a maximális pontszám jár.

9. c) első megoldás		
Az összes lehetséges esetből kivonjuk azokat, amikor csak 2 vagy 1 szín szerepel.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mindegyik húrt háromféle színre festhetjük, ezért az összes lehetőség száma: $3^{10} (= 59\ 049)$.	1 pont	
Ha két színt használunk a háromból, akkor az adott két szín segítségével mindegyik húrt kétféleképpen színezhetjük ki, a tíz húrt 2^{10}-féleképpen.	1 pont	
De ebbe beleszámoltuk azt az esetet is, amikor csak egyetlen színt használunk, ezért a fenti értéket 2-vel csökkenteni kell: $2^{10}-2$.	1 pont	
A megadott 3 színből kettőt 3-féleképpen választhatunk ki, így a pontosan két színt használó színezések száma $3\cdot(2^{10}-2)$ (= 3066).	1 pont	
Pontosan egy színnel 3-féleképpen színezhetjük ki a húrokat.	1 pont	
Tehát a lehetséges színezések száma: $3^{10}-[3\cdot(2^{10}-2)]-3=$	1 pont	
= 55 980.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

9. c) második megoldás		
(Számoljuk össze az eseteket aszerint, hogy az egyes színekkel hány húrt színezünk ki.) Lehetséges, hogy az egyik színnel 8, a másik két színnel 1-1 húrt színeztünk. Ekkor $\binom{10}{8}$ = 45-féleképpen választhatjuk meg azt, hogy melyik 8 húrt színezzük az első, majd $\binom{2}{1}$ = 2-féleképpen azt, hogy melyik húrt színezzük a második színnel (a harmadik szín felhasználása ezek után már egyértelmű).	1 pont	*Ez a 2 pont jár bármelyik 10 = a + b + b típusú eset helyes kiszámolásáért.*
Háromféleképpen választhatjuk meg azt, hogy a három közül melyik színből legyen 8, így az összes lehetőségek száma ebben az esetben $45\cdot2\cdot3$ = 270.	1 pont	

<table>
<tr><td>Lehetséges, hogy az egyik színnel 7, egy másikkal 2, a harmadikkal 1 húrt színeztünk.
Ekkor $\binom{10}{7}$ = 120-féleképpen választhatjuk meg azt, hogy melyik 7 húrt színezzük az első, majd $\binom{3}{2}$ = 3-féleképpen azt, hogy melyik húrt színezzük a második színnel (a harmadik szín felhasználás ezek után már egyértelmű).</td><td>1 pont</td><td rowspan="2">Ez a 2 pont jár bármelyik 10 = a + b + c típusú eset helyes kiszámolásáért.</td></tr>
<tr><td>Háromféleképpen választhatjuk meg azt, hogy a három közül melyik színből legyen 7, majd kétféleképpen azt, hogy melyik színből legyen 2, így az összes lehetőségek száma ebben az esetben
$120 \cdot 3 \cdot 6 = 2160$.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Hasonló gondolatmenetet követve a többi esetben a megfelelő színezések száma:
$6+3+1 \Rightarrow \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{3} \cdot 6 = 210 \cdot 4 \cdot 6 = 5040$
$6+2+2 \Rightarrow \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3 = 210 \cdot 6 \cdot 3 = 3780$
$5+4+1 \Rightarrow \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{4} \cdot 6 = 252 \cdot 5 \cdot 6 = 7560$
$5+3+2 \Rightarrow \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot 6 = 252 \cdot 10 \cdot 6 = 15\,120$
$4+4+2 \Rightarrow \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot 3 = 210 \cdot 15 \cdot 3 = 9450$
$4+3+3 \Rightarrow \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot 3 = 210 \cdot 20 \cdot 3 = 12\,600$</td><td>3 pont</td><td>Egy hiányzó vagy hibás eset esetén 2 pont, két hiányzó vagy hibás eset esetén 1 pont jár, kettőnél több hiányzó vagy hibás eset esetén nem jár pont.</td></tr>
<tr><td>Az összes lehetséges színezések száma a fenti 8 esetben kapott lehetőségek számának összege, tehát 55 980.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>8 pont</td><td></td></tr>
</table>