Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2014. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2014. május 6. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

b) $\log_3 x+\log_9 x=6$

a)	5 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	11 pont	

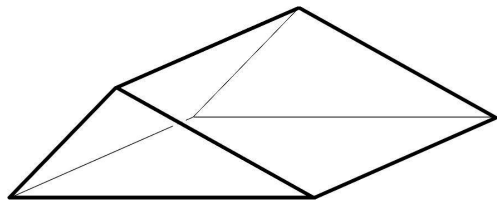
2. **a)** Egy 16 pontú teljes gráf összes élét úgy színeztük ki pirossal vagy sárgával, hogy minden pontból pontosan három piros él induljon ki. A pontok közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott két pontot piros él köti össze?

b) Egy másik teljes gráfból 45 élt elhagyva egy fagráfot kaptunk.
Hány pontja van ennek a gráfnak?

(A teljes gráf olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontját él köti össze.)

a)	4 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	12 pont	

3. A Tetőfedők Egyesülete a veterán tetőfedőknek egy kicsi, tömör, névre szóló bronzplasztikával kedveskedik. Az emléktárgy alaplapja egy 4 cm oldalú négyzet, melynek két szemközti éléhez egy-egy, az alaplap síkjára merőleges, egymással egybevágó háromszöglap csatlakozik az ábra szerint. A háromszöglapok két oldaléle 2 cm és 3 cm hosszú. Az emléktárgyhoz megrendelt téglatest alakú díszdoboz belső mérete 4,1 cm × 4,1 cm × 1,5 cm, az emléktárgy készítésére felhasznált bronz sűrűsége pedig 8,2 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.



Számítással igazolja, hogy a bronzplasztika belefér a dobozba és tömege nem haladja meg a 10 dkg-ot!

Ö.:	14 pont	

4. **a)** Egy hételemű, pozitív egész számokból álló adatsokaság hat eleme: 10; 2; 5; 2; 4; 2. A hetedik adatot nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a hét adat átlaga, módusza és mediánja (nem feltétlenül ebben a sorrendben) egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja.
Határozza meg a hetedik adat lehetséges értékeit!

b) A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű páros szám képezhető, melynek minden számjegye különböző?

a)	9 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy cég egyik részlegében dolgozó férfiak átlagéletkora 44 év, az ott dolgozó nők átlagéletkora 40 év, a részleg összes dolgozójáé pedig 41,5 év.

a) Hányszorosa a férfiak száma a nők számának ebben a részlegben?

A cég egy másik részlegében a férfiak és a nők számának aránya $2:3$. Egy átszervezés alkalmával innen 7 férfit és 9 nőt áthelyeztek. Így a részlegben maradó férfiak és nők számának aránya $1:2$-re változott.

b) Hány férfi és hány nő maradt ezen a részlegen?

c) Hányféleképpen lehet 6 nőből és 3 férfiből három munkacsoportot szervezni úgy, hogy mindegyik csoportba 2 nő és 1 férfi kerüljön? (A három munkacsoport sorrendjétől eltekintünk.)

a)	6 pont	
b)	5 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. **a)** Adott az *O* középpontú, $(x-2)^2+(y+1)^2=45$ egyenletű kör. Az $y = 2$ egyenletű *e* egyenes és a kör első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük *M*-mel. Tükrözzük az *e* egyenest az *OM* egyenesre.
Írja fel az *e* egyenes tükörképének egyenletét!

b) Adott az $y=-x^2+2x+5$ egyenletű parabola. Az $y = 2$ egyenletű egyenes és a parabola első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük *P*-vel.
Számítsa ki a parabola *P* pontbeli érintőjének a meredekségét!

a)	12 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. **a)** Határozza meg az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ függvényben az a, b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk a következőket:

(1) $f(1)=f(-1)+4$;

(2) $f'(3)=10$ (f' az f deriváltfüggvénye);

(3) $\int_0^2 f(x)dx=-8$.

b) Mutassa meg, hogy az x^3-3x^2+x-3 polinom szorzattá alakítható, és ennek segítségével határozza meg a $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=x^3-3x^2+x-3$ függvény zérushelyeit!

a)	11 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Az ulti nevű kártyajátékot magyar kártyával játsszák, melyben 4 szín (piros, tök, makk, zöld) és minden színben 8 lap (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász), összesen tehát 32 lap van.
Dénes, Elemér és Fanni ultiznak: egy osztásnál mindhárom játékos (véletlenszerű elosztással) 10-10 lapot kap, a maradék 2 lap pedig az úgynevezett talonba kerül.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy osztásnál a talonba kerülő két lap különböző színű!

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy osztásnál Elemérhez kerül valamelyik színből mind a 8 lap!

c) Számítással igazolja, hogy (négy tizedesjegyre kerekítve) 0,7966 annak a valószínűsége, hogy az osztáskor Fanni kap legalább egy ászt!

d) Ha tudjuk, hogy az osztáskor Fanni kapott legalább egy ászt, akkor határozzuk meg annak a (feltételes) valószínűségét, hogy mind a négy ász hozzá került!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy játékban minden játékos ugyanakkora kezdő pontszámmal indult, amely érték a játék fordulói során növekedhetett vagy csökkenhetett. Rita és Péter jól játszottak, mert mindketten folyamatosan nyertek, így növekedett a pontszámuk. Érdekes módon Rita pontszáma fordulóról fordulóra ugyanannyiszorosára nőtt, és ez igaz volt Péterre is, bár Péter esetében nagyobb volt a növekedés mértéke. Az első forduló után Péternek 20-szal több pontja volt, mint Ritának, a második után már 70 ponttal vezetett Rita előtt, a harmadik forduló után pedig már 185 pont volt a különbség a javára.
Mekkora volt a közös kezdő pontszám értéke?

Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	12			
	3.	14			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	elért pontszám **egész számra** kerekítve	programba beírt **egész** pontszám
I. rész		
II. rész		

javító tanár

jegyző

dátum

dátum