ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2014. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

9.		
Ha Rita pontszáma játékról játékra k-szorosára, Péter pontszáma pedig játékról játékra n-szeresére nőtt ($n > k > 1$), akkor (a kezdő pontszámot x-szel jelölve) Rita pontszámai fordulóról fordulóra $x; kx; k^2x; k^3x$, míg Péter pontszámai fordulóról fordulóra $x; nx; n^2x; n^3x$.	2 pont	
A pontszámkülönbségek fordulóról fordulóra: $nx - kx = 20$; $n^2x - k^2x = 70$; $n^3x - k^3x = 185$.	2 pont	
$x(n - k) = 20$ és $x(n^2 - k^2) = x(n-k)(n+k) =$	1 pont	
$= 20(n+k) = 70$.	1 pont	
Ez alapján $n + k = 3{,}5$, tehát $k = 3{,}5 - n$.	1 pont	
$x(n^3 - k^3) = x(n-k)(n^2 + nk + k^2) = 185$	1 pont	
Az egyenletbe az előzőeket behelyettesítve: $20 \cdot \left[(n^2 + n(3{,}5 - n) + (3{,}5 - n)^2 \right] = 185$.	1 pont	
Rendezve: $2n^2 - 7n + 6 = 0$.	2 pont	
Ennek a gyökei $n_1 = 2$ és $n_2 = 1{,}5$.	1 pont	
($n + k = 3{,}5$ miatt) $k_1 = 1{,}5$ és $k_2 = 2$.	1 pont	
($n > k$ miatt) csak $n = 2$ és $k = 1{,}5$ a megoldás.	1 pont	
A kezdő pontszám értéke $\left(x = \frac{20}{n-k} = \frac{20}{0{,}5} = \right)$ 40 volt.	1 pont	
Ellenőrzés: Rita pontszámai rendre 40, 60, 90 és 135; Péter pontszámai rendre 40, 80, 160 és 320; a kettő közti különbség fordulóról fordulóra 0, 20, 70 és 185.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

8. c)

(Jelölje A azt eseményt, hogy van Fanninál ász. Az A esemény valószínűségét komplementer móddszerrel számoljuk ki:) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) =$	1 pont	
$= 1 - \dfrac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}} =$	1 pont	
$= 1 - \dfrac{13123110}{64\,512\,240} \approx 0{,}7966$ annak az esélye, hogy van ász Fanni kezében.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. d)

(Jelölje B azt az eseményt, hogy mind a négy ász Fannihoz került, A pedig azt, hogy van nála ász.) A feltételes valószínűség definíciója szerint $P(B\|A) = \dfrac{P(BA)}{P(A)}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Ha minden ász Fanninál van, akkor van nála ász, ezért) $P(BA) = P(B)$.	1 pont	
A négy ász $\binom{4}{4}\binom{28}{6}$-féleképpen kerülhet Fannihoz,	1 pont	
ezért $P(B) = \dfrac{\binom{4}{4}\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{376\,740}{64\,512\,240} \approx 0{,}00584.$	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség: $P(B\|A) \approx \dfrac{0{,}00584}{0{,}7966} \approx 0{,}00733.$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzések:
1. A közönséges tört alakban, a tizedestört alakban és a százalékban megadott helyes válaszok is elfogadhatók.
2. Más, észszerű és helyes kerekítéssel kapott válaszok is elfogadhatók.

I.

1. a)

$2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	
Azaz $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).	2 pont	*Ha a vizsgázó a periódust nem osztja 2-vel, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*
Ellenőrzés.	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó egy perióduson belül behelyettesítéssel ellenőriz, vagy az átalakítások ekvivalenciájára hivatkozik.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzések:
1. Ha a $k \in \mathbf{Z}$ feltétel sehol nem szerepel, akkor összesen legfeljebb 4 pont adható.
2. Ha a vizsgázó fokokban számol, akkor összesen legfeljebb 3 pontot kaphat.
3. Ha a vizsgázó sehol nem ír periódust, akkor összesen legfeljebb 2 pontot kaphat (1 pont az $x = \dfrac{\pi}{3}$-ért, 1 pont az ellenőrzésért).

1. b)

A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldást.*
$\log_9 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} =$	1 pont	
$= \dfrac{\log_3 x}{2}$	1 pont	
Az eredeti egyenletből ezzel ($\log_3 x + \dfrac{\log_3 x}{2} = 6$, azaz) $\log_3 x = 4$.	1 pont	
Tehát $x = 81$.	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	*Ez a pont akkor jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz, vagy az átalakítások ekvivalenciájára hivatkozik.*
Összesen:	**6 pont**	

2. a) első megoldás		
A 16 pontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{16}{2}(=120)$.	1 pont	
A feladat feltételei szerint a piros élek száma: $\frac{16\cdot 3}{2}(=24)$.	2 pont	*Nem bontható.*
(Két pont véletlenszerű kiválasztása ekvivalens egy él véletlenszerű kiválasztásával.) Így annak a valószínűsége, hogy éppen piros élt választottunk: $p=\frac{24}{120}\left(=\frac{1}{5}=0{,}2\right)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. a) második megoldás		
(A gráf pontjai egyenértékűek, ezért) tekintsük a két kiválasztott pont közül az egyiket.	1 pont	
Ebből összesen 15 él indul ki,	1 pont	
melyek közül 3 piros.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a másik kiválasztott pontba éppen piros él indul: $p=\frac{3}{15}\left(=\frac{1}{5}=0{,}2\right)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b)		
Az n pontú fagráf éleinek száma $n-1$.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ezeket az összefüggéseket a feladat feltételeinek megfelelően helyesen alkalmazza.*
Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.	1 pont	
A feladat szövege szerint ekkor $\frac{n(n-1)}{2}-45=n-1$,	1 pont	
ahonnan $n^2-3n-88=0$.	1 pont	
Megoldva: $n=11$ vagy $n=-8$.	1 pont	
(Mivel n pozitív egész, ezért) $n=-8$ nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
A gráfnak 11 pontja van.	1 pont	
Ellenőrzés: A 11 pontú teljes gráf 55 élű, a 11 pontú fagráf 10 élű, ezért az 55 – 45 = 10 egyenlőség miatt ez valóban megoldás.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. a) első megoldás		
Összesen $\binom{32}{2}$ (= 496)-féleképpen lehet 2 lapot kiválasztani.	1 pont	
A különböző színű lappárok (azaz a kedvező esetek) száma: $\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}$ (= 384)	2 pont	
A keresett valószínűség: $p=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{32}{2}}=\frac{384}{496}\left(=\frac{24}{31}\right)\approx 0{,}774$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. a) második megoldás		
Képzeljük el úgy az osztást, hogy először a talonba teszünk egymás után két lapot!	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A talonba kerülő első lap bármelyik lehet.	1 pont	
A másodikra kihúzható 31 lap közül 24-nek a színe különbözik az első kihúzott lap színétől.	1 pont	
A keresett valószínűség: $p=\frac{24}{31}\approx 0{,}774$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. b)		
Elemér összesen $\binom{32}{10}$-féleképpen kaphat 10 lapot.	1 pont	
(Mivel négyféle szín van és minden esetben a maradék 24 lapból kell választanunk még két lapot, ezért) a kedvező esetek száma: $4\cdot\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{2}=4\cdot\binom{24}{2}$.	2 pont	$\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{2}$ *részeredmény esetén 1 pont jár.*
A keresett valószínűség: $p=\frac{4\cdot\binom{24}{2}}{\binom{32}{10}}=\frac{1104}{64\,512\,240}\approx 0{,}000017$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

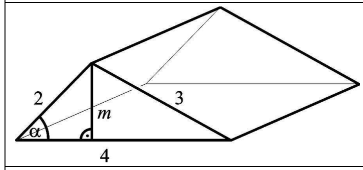
7. a)

($x = 1$-et és $x = -1$-et behelyettesítve) $1 + a + b + c = -1 + a - b + c + 4$,	2 pont	
ahonnan kapjuk, hogy $b = 1$.	1 pont	
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$,	2 pont	
$f'(3) = 27 + 6a + 1 = 10$.	1 pont	
Ebből $a = -3$.	1 pont	
$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + x + c)\, dx =$ $= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + cx\right]_0^2 =$	2 pont	
$= 4 - 8 + 2 + 2c$.	1 pont	
(A feltétel alapján) $4 - 8 + 2 + 2c = -8$, ahonnan kapjuk, hogy $c = -3$.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

7. b)

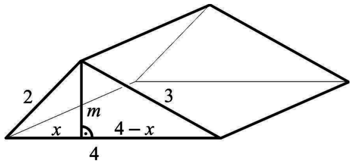
$x^3 - 3x^2 + x - 3 = x^2 \cdot (x-3) + x - 3 =$	1 pont	
$= (x-3) \cdot (x^2 + 1)$	1 pont	
$g(x) = (x-3) \cdot (x^2+1) = 0$	1 pont	
(Egy szorzat értéke pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla,) így $x = 3$.	1 pont	
Mivel $x^2 + 1 > 0$ bármilyen valós x esetén, így más zérushelye nincs a függvénynek.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3.

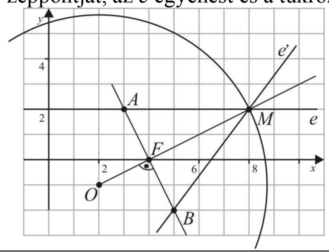


A bronzplasztika akkor fér bele a dobozba, ha a magassága (m) nem haladja meg az 1,5 cm-t.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A háromszöglap α szögére felírva a koszinusztételt: $3^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$.	1 pont*	
Ebből $\cos\alpha = \frac{11}{16} (= 0{,}6875)$,	1 pont*	
$\alpha \approx 46{,}57°$.	1 pont*	
A háromszöglap 4 cm-es oldalához tartozó magasságának kiszámítása: $\sin 46{,}57° = \frac{m}{2}$.	1 pont*	
Ebből $m \approx 1{,}45$ (cm).	1 pont*	
1,45 cm < 1,5 cm, tehát a bronzplasztika belefér a dobozba.	1 pont	
A testet az egyik háromszöglapjára állítva egy olyan háromszög alapú egyenes hasábot kapunk, amelynek magassága $M = 4$ (cm),	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
térfogata pedig $V = T \cdot M \approx \frac{4 \cdot 1{,}45}{2} \cdot 4 =$	1 pont	
$= 11{,}6\ \text{cm}^3 =$	1 pont	
$= 0{,}0116\ \text{dm}^3$.	1 pont	
Az emléktárgy tömege $0{,}0116 \cdot 8{,}2 = 0{,}09512$ (kg).	1 pont	
Ez kb. 9,5 dkg, tehát valóban nem haladja meg a 10 dkg-ot.	1 pont	
Összesen:	**14 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetek bármelyikéért is megkaphatja a vizsgázó:*

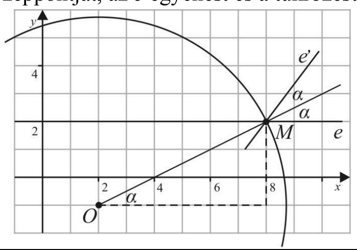
		
(A háromszöglapot az m magasság két derékszögű háromszögre bontja. Ezekre felírva a Pitagorasz-tételt:) $m^2 + x^2 = 2^2$,	1 pont	
$m^2 + (4 - x)^2 = 3^2$.	1 pont	
A második egyenletből zárójelfelbontás és rendezés után kapjuk: $m^2 = -7 + 8x - x^2$.	1 pont	
Ezt az első egyenletbe behelyettesítve és rendezve kapjuk: $x = \frac{11}{8}$.	1 pont	
Visszahelyettesítve: $m \left(= \frac{3\sqrt{15}}{8} \right) \approx 1{,}45$ (cm).	1 pont	

(A háromszög három oldalából Héron-képlettel kiszámolható a háromszög területe.) A kerület fele: $s = 4{,}5$.	1 pont	
Így $T = \sqrt{4{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5} \approx$	1 pont	
$\approx 2{,}9$ (cm^2).	1 pont	
Ebből egy másik területképlettel a háromszög magassága kiszámolható: $2{,}9 \approx \frac{4m}{2}$.	1 pont	
$m \approx 1{,}45$ (cm)	1 pont	

6. a) második megoldás		
Jó ábra (amelyen a vizsgázó jól tünteti fel a kör középpontját, az e egyenest és a tükrözést). 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A kör középpontja $O(2; -1)$.	1 pont	
A kör egyenletébe $y = 2$-t helyettesítve az $(x-2)^2 = 36$ egyenletet kapjuk,	1 pont	
aminek pozitív megoldása $x = 8$, így $M(8; 2)$.	1 pont	
Az OM egyenes irányvektora $(6; 3)$,	1 pont	
így egyenlete $x - 2y = 4$.	1 pont	
Az e egyenes egy tetszőleges A pontjának OM egyenesre vett tükörképe legyen B. Az e egyenes OM egyenesre vett tükörképe ekkor a BM egyenes lesz.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az $y = 2$ egyenesen ezért kiválasztunk egy tetszőleges pontot, koordinátái legyenek például $A(3; 2)$. Az OM egyenesre merőlegest állítunk az A pontban, ennek egyenlete $2x + y = 8$.	1 pont	
Kiszámoljuk ennek és az OM egyenesnek az F metszéspontját, azaz megoldjuk a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right\}$.	1 pont	
Ennek megoldása $x = 4$ és $y = 0$, így $F(4; 0)$.	1 pont	
Az A pont F-re vonatkozó tükörképe $B(5; -2)$.	1 pont	
Az M és B pontokon áthaladó egyenes egyenlete $-4x + 3y = -26$.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

6. b)		
A parabola egyenletébe $y = 2$-t helyettesítve kapjuk, hogy az egyenes a parabolát az első síknegyedben a $P(3; 2)$ pontban metszi.	1 pont	
A keresett egyenes a parabolához a $P(3; 2)$ pontba húzott érintő, amelynek meredeksége az $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ függvény deriváltfüggvényének az $x = 3$ helyen felvett értéke.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x) = -2x + 2$,	1 pont	
a keresett meredekség így $m = f'(3) = -4$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. a) első megoldás

Jó ábra (amelyen a vizsgázó jól tünteti fel a kör középpontját, az e egyenest és a tükrözést). 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
A kör középpontja $O(2; -1)$.	1 pont	
A kör egyenletébe $y = 2$-t helyettesítve az $(x-2)^2 = 36$ egyenletet kapjuk,	1 pont	
aminek pozitív megoldása $x = 8$, így az M pont koordinátái $(8; 2)$.	1 pont	
Az OM egyenes irányvektora $(6; 3)$,	1 pont	
így meredeksége (irányszögének tangense) $\frac{3}{6}\left(=\frac{1}{2}\right)$.	1 pont	
Ha az OM egyenes irányszöge α, akkor a tükrözés miatt a tükörkép egyenesének irányszöge 2α.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A tükörkép egyenesének meredeksége így $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} =$	1 pont	$\alpha \approx 26{,}565°$ $2\alpha \approx 53{,}13°$
$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.	1 pont	$\mathrm{tg}\, 2\alpha \approx 1{,}333$
Az $y = mx + b$ egyenes egyenletbe behelyettesítve az M pont koordinátáit és a tükörkép egyenes meredekségét ($2 = \frac{4}{3}\cdot 8 + b$) kapjuk, hogy $b = -\frac{26}{3}$.	2 pont	$b \approx -8{,}664$
A tükörkép egyenes egyenlete $y = \frac{4}{3}x - \frac{26}{3}$.	1 pont	$y = 1{,}333x - 8{,}664$
Összesen:	**12 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó közelítő értékekkel és helyes kerekítést alkalmazva jól írja fel az egyenes egyenletét, akkor teljes pontszámot kaphat.

4. a)

Ha x-szel jelöljük az ismeretlen hetedik adatot, akkor a hét adat átlaga: $\frac{25+x}{7}$.	1 pont	
A módusz értéke bármely x érték esetén 2.	1 pont	
A medián értéke háromféle lehet az ismeretlen adat értékétől függően: I. Ha x értéke 3-nál kisebb (1 vagy 2), akkor a medián értéke 2.	1 pont	
Ez nem lehetséges, mert a módusz is 2, így a sorozat nem lenne szigorúan monoton növekvő.	1 pont	
II. Ha x értéke 3, akkor a medián értéke is 3, az átlag pedig 4.	1 pont	
Mivel a 2; 3; 4 számok (szigorúan monoton növekvő) számtani sorozatot alkotnak, ezért az $x = 3$ megoldása a feladatnak.	1 pont	
III. Ha x értéke 3-nál nagyobb, akkor a medián értéke 4, az átlag pedig nagyobb, mint 4.	1 pont	
Ekkor a három tag növekvő sorrendje: 2; 4; $\frac{25+x}{7}$.	1 pont	
Ezek számtani sorozatot alkotnak, ha $\frac{25+x}{7} = 6$, azaz $x = 17$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

4. b)

Mivel páros számokat képezünk, a szám csak 0-ra, 2-re vagy 4-re végződhet.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha a szám 0-ra végződik, akkor az első három helyiértéken rendre 5, 4, illetve 3 választási lehetőségünk van, ilyen számból tehát $5\cdot 4\cdot 3 (= 60)$ darab van.	1 pont	
Ha a szám 2-re vagy 4-re végződik, akkor az első három helyiértéken (mivel 0-val nem kezdődhet szám) rendre 4, 4, illetve 3 választási lehetőségünk van, ilyen számból tehát $2\cdot 4\cdot 4\cdot 3 (= 96)$ darab van.	2 pont	
Azaz összesen 156, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

II.

5. a)		
Ha n jelöli a részlegen dolgozó nők, f pedig a férfiak számát, akkor a feltétel alapján a nők életkorának összege $40n$, a férfiak életkorának összege pedig $44f$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A szöveg szerint $\frac{40n+44f}{n+f}=41{,}5$.	2 pont	
Ebből kapjuk, hogy $f=0{,}6n$.	2 pont	
Azaz 0,6-szer annyi férfi dolgozik ebben a részlegben, mint nő.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. b)		
Az átszervezés után a feltétel alapján: $\frac{f-7}{n-9}=\frac{1}{2}$.	1 pont	
Az eredeti létszámra vonatkozóan $n=1{,}5f$. Ezt beírva a fenti egyenletbe: $\frac{f-7}{1{,}5f-9}=\frac{1}{2}$.	1 pont	
Innen $f=10$,	1 pont	
majd visszahelyettesítve $n=15$ adódik.	1 pont	
Az átszervezés után $(15-9=)$ 6 nő és $(10-7=)$ 3 férfi maradt a részlegben.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) első megoldás		
Az első munkacsoport tagjainak kiválasztására a lehetőségek száma: $\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{1}(=45)$.	1 pont	
A második csoport kiválasztási lehetőségeinek száma: $\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}(=12)$.	1 pont	
Az első két csoport kiválasztása után a harmadik csoport már egyértelmű.	1 pont	
Az összes lehetőségek száma (a csoportok sorrendjét is figyelembe véve) a fentiek szorzata: $\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}(=540)$.	1 pont	
Mivel azonban a csoportok sorrendje nem számít, ezért a lehetőségek száma $\frac{540}{3!}=90$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) második megoldás		
Legyen a három férfi A, B és C.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A csoportjába $\binom{6}{2}(=15)$-féleképpen választhatunk két nőt.	1 pont	
B csoportjába a négy megmaradt nő közül $\binom{4}{2}(=6)$-féleképpen választhatunk kettőt.	1 pont	
C csoportjába kerül a megmaradt két nő.	1 pont	
Összesen tehát $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}=90$ lehetőség van a három fős csoportok létrehozására.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
A nők három csoportba osztására a lehetőségek száma (a csoportok sorrendjét is figyelembe véve): $\frac{6!}{(2!)^3}(=90)$.	2 pont	
Mivel azonban a csoportok sorrendje nem számít, ezért a lehetőségek száma $\frac{90}{3!}(=15)$.	1 pont	
A nők által létrehozott három csoporthoz az egy-egy férfi $3!(=6)$-féleképpen csatlakozhat.	1 pont	
Az összes lehetőségek száma a fentiek szorzata: $15\cdot 3!=90$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	