ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2014. május 6.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon!
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók,** hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek az értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

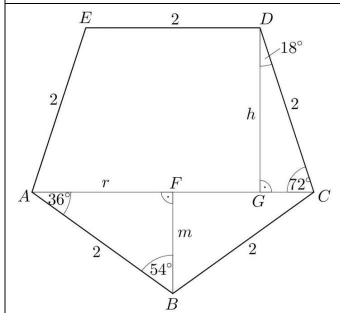
1. a)		
Egy kis téglalap oldalainak hossza x cm, illetve $x + 1$ cm, területe $x \cdot (x+1)\,\text{cm}^2$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege szerint $720 \cdot x \cdot (x+1) = 2025$.	1 pont	
(A zárójelet felbontva és nullára rendezve:) $720x^2 + 720x - 2025 = 0$.	1 pont	*(45-tel egyszerűsítve:* $16x^2 + 16x - 45 = 0$*)*
(A megoldóképlettel) $x_1 = 1{,}25$; $x_2 = -2{,}25$.	1 pont	
A negatív gyök nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
A téglalap rövidebb oldala tehát 1,25 cm, hosszabb oldala pedig 2,25 cm hosszú.	1 pont	
Ellenőrzés: $720 \cdot 1{,}25 \cdot 2{,}25 = 2025$ igaz, tehát a válasz helyes.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b)		
12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mivel 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal.	1 pont	
Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 vagy 64.	1 pont	
Mindegyik végződés 4! (= 24) darab hatjegyű szám esetében fordul elő,	1 pont	
ezért a vizsgált számok között $8 \cdot 24 = 192$ darab 12-vel osztható van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2.		
A (feladat szövege és a) négyzetgyök értelmezése miatt csak az 5-nél nem nagyobb pozitív egész számok jöhetnek szóba, és ezek mindegyike meg is felel.	2 pont	*Ha $x \le 5{,}2$, akkor $5{,}2 - x \le 9$, ebből $-3{,}8 \le x$ (és x pozitív egész).*
$H = \{1; 2; 3; 4; 5\}$	1 pont	
Ha $\log_b 2^6 = k$, akkor $b^k = 2^6$ (= 64).	2 pont	
A k kitevő pozitív egész, ezért a b olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1 = 64$,	2 pont*	*Egy hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
ezért $B = \{2; 4; 8; 64\}$.	1 pont*	
$H \cap B = \{2; 4\}$	1 pont	
$B \setminus H = \{8; 64\}$	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Mivel a 2 prímszám, ezért b is csak a 2 valamelyik pozitív egész kitevőjű hatványa lehet (a számelmélet alaptétele miatt).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Emiatt a k pozitív egész szám a 6-nak osztója, tehát $k \in \{6; 3; 2; 1\}$.	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, több hiba esetén 0 pont jár.*
A megfelelő b értékek rendre 2, 4, 8, 64, tehát $B = \{2; 4; 8; 64\}$.	1 pont	

3. a)		
A nehezék térfogata egy forgáskúp és egy csonkakúp térfogatának összege.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
 (Használjuk az ábra jelöléseit!) A forgáskúp magassága az AFB derékszögű háromszögből: $m = 2 \cdot \cos 54°$ ($\approx 1{,}18$ cm).	2 pont	*Az AFB derékszögű háromszög egyik hegyesszögének meghatározása: 1 pont, az m magasság meghatározása szögfüggvénnyel: 1 pont.*

9. b) **harmadik megoldás**		
Megfelelők azok az esetek, amelyekben Kovács úr az első három napon különböző színű ingeket viselt, illetve amelyekben az első három napon sárga inget viselt.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Az ingek színének kiválasztása egymástól függetlenül történik, tehát alkalmazható a valószínűségek szorzási szabálya.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a három különböző színű ing közül például az első sárga, a második fehér, a harmadik világoskék: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \left(= \frac{2}{35} \right)$.	1 pont	
Ugyanennyi a valószínűsége annak, hogy a három különböző színű ing sorrendje sárga-világoskék-fehér.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a három különböző színű ing közül a sárga a második, illetve a harmadik, szintén egyformán $\frac{4}{35}$.	1 pont	
Tehát annak valószínűsége, hogy az első három napon három különböző színű inget választ Kovács úr: $3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{35}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az első három napon sárga inget választ Kovács úr: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \left(= \frac{1}{35} \right)$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát: $\frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{13}{35}$ ($\approx 0{,}371$).	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**8 pont**	

9. b) első megoldás		
(Az azonos színű ingeket megkülönböztetve) az első három napon $7\cdot6\cdot5$ (= 210) különböző (egyenlően valószínű) lehetőség van a három ing kiválasztására.	1 pont	
Kedvező esemény az, ha (valamilyen sorrendben) mindegyik színből pontosan egyet vagy három sárga inget választott Kovács úr.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Egy adott színsorrendben (például fehér-kék-sárga) $2\cdot2\cdot3$ különböző módon lehet három inget kiválasztani.	1 pont	
Három adott szín sorrendje 3!-féle lehet,	1 pont	
tehát három különböző színű inget $2\cdot2\cdot3\cdot3!$ különböző módon választhat ki Kovács úr.	1 pont	
A három sárga inget 3! különböző sorrendben választhatja ki.	1 pont	
A kedvező esetek száma $2\cdot2\cdot3\cdot3!$ + 3! (= 78).	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát: $\frac{2\cdot2\cdot3\cdot3!+3!}{7\cdot6\cdot5}=\frac{78}{210}=\frac{13}{35}$ (≈ 0,371).	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**8 pont**	

9. b) második megoldás		
Ha csak az ingek színeit tekintjük, akkor a színeket $\frac{7!}{2!\cdot2!\cdot3!}=210$-féleképpen lehet sorba rendezni (és e sorrendek mindegyike ugyanakkora valószínűségű).	1 pont	*A 7 ing helyett a színeket rendezzük sorba: 2 fehéret, 2 világoskéket és 3 sárgát.*
Ezek közül a kedvező sorrendek azok, melyekben vagy három különböző szín vagy 3 sárga van az első három helyen.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Három különböző szín 3! = 6-féleképpen adható meg az első három helyre.	1 pont	
Ekkor a maradék négy helyre az 1 fehér, 1 világoskék és 2 sárga szín $\frac{4!}{2!}=12$ különböző sorrendben adható meg.	1 pont	
Ez $6\cdot12=72$ olyan lehetőség, amelyben az első három helyen három különböző szín áll.	1 pont	
Ha az első három helyen sárga szín áll, akkor a maradék 4 helyre a 2 fehér és 2 világoskék szín $\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$ különböző sorrendben adható meg.	1 pont	
A kedvező esetek száma összesen 72 + 6 = 78.	1 pont	
A kérdezett valószínűség tehát: $\frac{78}{210}=\frac{13}{35}$ (≈ 0,371).	1 pont	*A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**8 pont**	

A kúp alapkörének sugara: $r=2\cdot\sin54°$ (≈ 1,62 cm).	1 pont	
A csonkakúp h magassága a CGD derékszögű háromszögből: $h=2\cdot\sin72°$ (≈ 1,90 cm).	2 pont	*A CGD derékszögű háromszög egy hegyesszögének meghatározása: 1 pont, a h magasság meghatározása szögfüggvénnyel: 1 pont.*
A forgáskúp térfogata: $V_{kúp}\approx\frac{1{,}62^2\cdot1{,}18\cdot\pi}{3}$ (≈ 3,24 cm^3).	1 pont	
A csonkakúp térfogata (a fedőkör sugara 1 cm): $V_{cskúp}\approx\frac{1{,}90\cdot\pi}{3}\cdot(1{,}62^2+1{,}62\cdot1+1^2)$ (≈ 10,39 cm^3).	1 pont	
A nehezék térfogata: ($V_{kúp}+V_{cskúp}\approx$) 13,6 (cm^3).	1 pont	*Más, ésszerű és helyes kerekítésekkel kapott (egy tizedesjegyre kerekített) érték is elfogadható.*
Összesen:	**9 pont**	

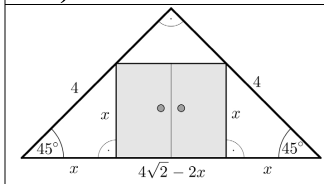
<table>
<tr><td colspan="3">3. b)</td></tr>
<tr><td>A gyakorisági táblázat:
<table>
<tr><td>tömeg (gramm)</td><td>105</td><td>106</td><td>107</td><td>108</td><td>109</td><td>110</td></tr>
<tr><td>gyakoriság</td><td>12</td><td>36</td><td>36</td><td>18</td><td>12</td><td>6</td></tr>
</table></td><td>1 pont</td><td>Csak hibátlan táblázat esetén jár ez a pont.</td></tr>
<tr><td>A 120 adat átlaga:
$\frac{12\cdot105+36\cdot106+36\cdot107+18\cdot108+12\cdot109+6\cdot110}{120}=$</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>= 107 (gramm).</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A 120 adat szórása:
$\sqrt{\frac{12\cdot2^2+36\cdot1^2+36\cdot0^2+18\cdot1^2+12\cdot2^2+6\cdot3^2}{120}}=$</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$=\sqrt{1{,}7}\approx1{,}3$ (gramm).</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a számítás részletezése nélkül (számológéppel) az átlagra és/vagy a szórásra helyes eredményt ad meg, akkor jár a megfelelő 2 pont. Részletezés nélküli (hibás) megoldásra azonban részpontszám nem adható.

4. a)		
Az f deriváltfüggvénye: (f :]–2; 3[→ **R**) $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$.	1 pont	
f' zérushelyei: –1 és 2.	1 pont	
Az f' másodfokú függvény főegyütthatója pozitív, ezért f' értékei $x < -1$ esetén pozitívak, $-1 < x < 2$ esetén negatívak, $2 < x$ esetén pozitívak.	1 pont	*Ez a pont jár egy helyes ábráért is.*
Az f függvény menete ezek alapján: a]–2; –1]-on (szigorúan monoton) növekvő;	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az f függvény értelmezési tartományát, azaz nem vagy rosszul adja meg az intervallum bal oldali végpontját.*
az $x = -1$ helyen (helyi) maximuma van,	1 pont	
amelynek értéke 3,5;	1 pont	
a [–1; 2]-on (szigorúan monoton) csökkenő;	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha az intervallum végpontjait és a monotonitást jól adja meg a vizsgázó, de nyílt vagy félig nyílt intervallumot ír.*
az $x = 2$ helyen (helyi) minimuma van,	1 pont	
amelynek értéke −10;	1 pont	
a [2; 3[-on (szigorúan monoton) növekvő.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az f függvény értelmezési tartományát, azaz nem vagy rosszul adja meg az intervallum jobb oldali végpontját.*
Összesen:	**10 pont**	

Megjegyzések:
1. A monotonitási intervallumok megadásáért akkor is jár a megfelelő pont, ha a vizsgázó egyenlőtlenségekkel írja le jól a megfelelő intervallumokat.
2. A megfelelő pontszámok akkor is járnak, ha a vizsgázó a függvény menetének leírását az alábbihoz hasonló táblázattal adja meg helyesen.

x	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$
f'	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
f	↑	maximum $f(-1) = 3{,}5$	↓	minimum $f(2) = -10$	↑

9. a)		
 (Használjuk az ábra jelöléseit!) Ha a szekrény magassága x méter, akkor szélessége (az ábrán látható egyenlő szárú derékszögű háromszögek miatt) $4\sqrt{2} - 2x$ (m),	2 pont	
a térfogata pedig $V(x) = 0{,}6x(4\sqrt{2} - 2x)$ (m^3) ($0 < x < 2\sqrt{2}$).	1 pont	
Az $x \mapsto 0{,}6x(4\sqrt{2} - 2x)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$,	1 pont*	
így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél,	1 pont*	*Ez a pont jár más helyes indoklásért (pl. egy jó ábráért) is.*
az $x = \sqrt{2}$ helyen lesz.	1 pont*	
(Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért) a legnagyobb térfogatú szekrény magassága $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ méter,	1 pont	
szélessége pedig $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ méter lesz.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:
1. A vizsgázó akkor is maximális pontszámot kaphat, ha megállapítja, hogy a téglatest egyik oldala rögzített, ezért elegendő csak a szekrény előlapjának területével foglalkoznia.
2. Ha a vizsgázó válaszában nem szerepel mértékegység, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.
*3. A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az $x \mapsto 0{,}6x(4\sqrt{2} - 2x)$ másodfokú függvény deriváltfüggvénye: $x \mapsto 2{,}4\sqrt{2} - 2{,}4x$.	1 pont	
A deriváltfüggvény zérushelye az $x = \sqrt{2}$,	1 pont	
itt a deriváltfüggvény pozitívból negatívba megy át, ezért ez az eredeti függvénynek maximumhelye.	1 pont	*Ez a pont jár, ha a vizsgázó a második derivált előjelével indokol helyesen.*

8. b) **első megoldás**		
A négyzet körülírt körének sugara az átló fele, azaz $5\sqrt{2}$.	1 pont	
A körülírt kör egyenlete: $(x-7)^2+(y-7)^2=50$.	1 pont	
A kör y tengelyen lévő pontjait az $x = 0$ helyettesítéssel, az x tengelyen lévő pontjait az $y = 0$ helyettesítéssel adódó egyenlet adja meg.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kapott két egyenlet $(y-7)^2=1$, illetve $(x-7)^2=1$.	1 pont	
Ezeknek a megoldásai $y_1 = 6$ és $y_2 = 8$, illetve $x_1 = 6$ és $x_2 = 8$.	1 pont	
Tehát a tengelyeken négy pont lehet a négyzet valamelyik csúcsa: a (0; 6), a (0; 8), a (6; 0) és a (8; 0) pontok.	1 pont	
(Figyelembe véve, hogy két szomszédos csúcs távolsága 10 egység) két megoldás adódik: $A_1(0; 6)$ és $B_1(8; 0)$, illetve $A_2(0; 8)$ és $B_2(6; 0)$.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. b) **második megoldás**		
Ha a négyzet két csúcsa $A(0; a)$ és $B(b; 0)$, akkor a négyzet oldalhossza $\sqrt{a^2+b^2}$.	1 pont	
Mivel (az a) feladat szerint) a négyzet középpontja $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, ezért megoldandó az alábbi egyenletrendszer: $\left.\begin{array}{r}\frac{a+b}{2}=7\\ \sqrt{a^2+b^2}=10\end{array}\right\}$.	2 pont	
Az első egyenletből: $a = 14 - b$, ezt a másodikba helyettesítve: $\sqrt{(14-b)^2+b^2}=10$.	1 pont	
Rendezve: $b^2-14b+48=0$.	1 pont	
Ennek megoldásai $b_1 = 6$ és $b_2 = 8$.	1 pont	
$a_1 = 8$ és $a_2 = 6$.	1 pont	
Tehát két ilyen négyzet van, a kérdéses csúcsok: $A_1(0; 6)$ és $B_1(8; 0)$, illetve $A_2(0; 8)$ és $B_2(6; 0)$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy ábráról helyesen leolvassa a feladat megoldásait, akkor ezért 2 pontot kapjon. Ha a talált megoldásokról megmutatja, hogy azok valóban megfelelnek a feladat feltételeinek, akkor ezért további 2 pont jár. Ha azt is megmutatja, hogy más megoldása nem lehet a feladatnak, akkor maximális pontszámot kaphat.

4. b)		
(A g az f-nek egyik primitív függvénye, ezért) $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}-3x^2+c$ $(c \in \mathbf{R})$.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem ír konstans tagot (c-t).*
Mivel $g(2) = 4 - 4 - 12 + c = 0$,	1 pont	
ezért $c = 12$,	1 pont	
és így $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}-3x^2+12$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II.

5. a) **első megoldás**		
$2x^3-5x^2-3x=x(2x^2-5x-3)=0$	1 pont	
(Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.) Látható, hogy $x = 0$ valóban gyök.	1 pont	
A többi gyököt a $2x^2-5x-3=0$ egyenletből kaphatjuk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ennek az egyenletnek a gyökei: $-\frac{1}{2}$ és 3, azaz a megadott három szám valóban gyök.	1 pont	
Másodfokú egyenletnek legfeljebb két (különböző valós) gyöke lehet, ezért nincs több gyök.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. a) **második megoldás**		
$2x^3-5x^2-3x=x(2x^2-5x-3)=$	1 pont	
$=x(2x+1)(x-3)=0$	2 pont	
A szorzat alakból látható, hogy a megadott számok mindegyike gyöke az egyenletnek.	1 pont	
Mivel egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért nincs több gyök.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. a) **harmadik megoldás**		
A megadott értékek behelyettesítésével adódik, hogy azok valóban gyökei az egyenletnek.	3 pont	
Harmadfokú egyenletnek legfeljebb három (különböző valós) gyöke lehet, ezért nincs több gyök.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b)

Legyen $y = \cos x$. A $2y^3 - 5y^2 - 3y = 0$ egyenletnek három valós gyöke van (az a) feladat igaz állítása miatt): $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ és $y_3 = 3$.	1 pont	
(Mivel $-1 \le \cos x \le 1$, ezért) $y \ne 3$.	1 pont	
A $\cos x = 0$ egyenlet megoldásai: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.	2 pont	*Ha a vizsgázó a gyököket periódus nélkül radiánban, vagy periódussal együtt fokokban, vagy a periódussal együtt „vegyesen" adja meg, akkor ebből a 2-2 pontból legfeljebb 1-1 pontot kaphat.*
A $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem említi a $k \in \mathbf{Z}$ és/vagy az $m \in \mathbf{Z}$ feltételt, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

5. c) első megoldás

Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért $2 \cdot 8^x > 0$, $7 \cdot 4^x > 0$ és $3 \cdot 2^x > 0$ (bármely valós x esetén).	1 pont	
Az egyenlet bal oldalán álló összeg így (bármely valós x esetén) pozitív,	2 pont	
tehát valóban nincs megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) második megoldás

Az egyenlet bal oldalán 2^x kiemelhető: $2^x \cdot (2 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x + 3) = 0$.	1 pont	
(Mivel az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, ezért) $2^x = 0$ nem lehetséges.	1 pont	
Ezek után a $2 \cdot (2^x)^2 + 7 \cdot 2^x + 3 = 0$ (2^x-ben másodfokú) egyenletet kell vizsgálnunk.	1 pont	
$2^x = -3$ vagy $2^x = -\frac{1}{2}$.	1 pont	
(Az exponenciális függvény értékkészlete miatt) ezek egyike sem lehetséges, tehát valóban nincs megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a) harmadik megoldás

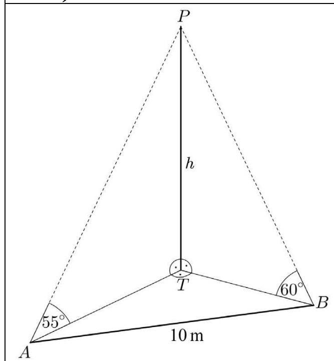
(A négyzet(ek) középpontja(i) az AB átmérőjű kör és az AB szakasz felezőmerőlegesének metszéspontjaként adódnak.) Az AB átmérőjű kör egyenlete: $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$.	1 pont	
AB felezőmerőlegesének egyenlete: $bx - ay = \frac{b^2 - a^2}{2}$.	1 pont	
A második egyenletből: $y = \frac{2bx + a^2 - b^2}{2a}$.	1 pont	
Behelyettesítve a kör egyenletébe: $x^2 - bx + \frac{b^2}{4} + \left(\frac{2bx - b^2}{2a}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$, majd egyszerűbb alakra hozva: $4x^2 - 4bx + b^2 - a^2 = 0$.	2 pont	
Megoldások: $x_1 = \frac{b - a}{2}$, $x_2 = \frac{b + a}{2}$.	1 pont	
Visszahelyettesítés után kapjuk: $y_1 = \frac{a - b}{2}$, $y_2 = \frac{a + b}{2}$.	1 pont	
$x_1 = -y_1$ és $x_2 = y_2$, azaz valóban teljesül az állítás.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:
Ha a vizsgázó egy (vagy több) konkrét négyzet koordinátáival végzi el a számításokat, akkor ezért legfeljebb 4 pontot kaphat.
Ha számítások nélkül, egy ábráról olvassa le egy (vagy több) konkrét négyzet középpontjának koordinátáit, akkor ezért legfeljebb 1 pontot kaphat.

8. a) első megoldás		
Legyen $A(0; a)$ és $B(b; 0)$ (de $a^2+b^2\neq 0$).	1 pont	
Ekkor az AB szakasz felezőpontja $F\left(\frac{b}{2};\frac{a}{2}\right)$.	1 pont	
Ekkor $\overrightarrow{FB}\left(\frac{b}{2};-\frac{a}{2}\right)$.	1 pont	
Ha a négyzet középpontja a K pont, akkor $\overrightarrow{FK}$ az $\overrightarrow{FB}$ +90°-os vagy –90°-os elforgatottja, tehát	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\overrightarrow{FK}\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ vagy $\overrightarrow{FK}\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$.	1 pont	
Az F pont helyvektorát jelölje **f**, ekkor a K pont helyvektora $\mathbf{k}=\mathbf{f}+\overrightarrow{FK}$, azaz $\mathbf{k}\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$ vagy	1 pont	
$\mathbf{k}\left(\frac{b-a}{2};\frac{a-b}{2}\right)$.	1 pont	
Tehát a K középpont koordinátái valóban vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

8. a) második megoldás		
Legyen pl. $A(0; a)$ és $B(b; 0)$ (de $a^2+b^2\neq 0$).	1 pont	
Ekkor $\overrightarrow{AB}(b;-a)$,	1 pont	
$\overrightarrow{BC}$ pedig az $\overrightarrow{AB}$-nak +90°-os vagy –90°-os elforgatottja.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Tehát $\overrightarrow{BC}(a;b)$ vagy $\overrightarrow{BC}(-a;-b)$.	1 pont	
A B csúcs helyvektorát jelölje **b**, ekkor a C csúcs helyvektora $\mathbf{c}=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC}$, azaz $\mathbf{c}(a+b;b)$ vagy	1 pont	
$\mathbf{c}(b-a;-b)$.	1 pont	
K az AC szakasz felezőpontja, ezért $K\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$ vagy $K\left(\frac{b-a}{2};\frac{a-b}{2}\right)$.	1 pont	
Tehát a K középpont koordinátái valóban vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. a)		
A műszerek 7%-a hibásan méri a szöget, 5%-a pedig hibásan méri a távolságot.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mivel a műszerek 2%-a mindkét adatot hibásan méri, ezért a hibás műszerek aránya: $5+7-2=10$ százalék.	1 pont	
Egy hibátlan műszer választásának valószínűsége tehát 0,9.	1 pont	
Akkor lesz köztük legfeljebb 2 hibás, ha a hibás műszerek száma 0, 1 vagy 2.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége tehát, hogy a 20 kiválasztott műszer között legfeljebb 2 hibás lesz: $0{,}9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}9^{19}\cdot 0{,}1+\binom{20}{2}\cdot 0{,}9^{18}\cdot 0{,}1^2$.	2 pont	*1 pont jár, ha a vizsgázó a binomiális együtthatókat lehagyja.*
A kérdezett valószínűség közelítőleg (0,122 + 0,270 + 0,285 ≈) 0,677.	1 pont	*Más, ésszerűen és helyesen kerekített vagy százalékban megadott érték is elfogadható.*
Összesen:	**7 pont**	

6. b)		
 (Jó ábra, amelyen a vizsgázó feltünteti a szövegnek megfelelő adatokat.)	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.*
Az ATP háromszögből: $AT=\frac{h}{\text{tg}\,55^\circ}$ (≈ 0,700h).	1 pont	
A BTP háromszögből: $BT=\frac{h}{\text{tg}\,60^\circ}$ (≈ 0,577h).	1 pont	*A szabályos háromszög tulajdonságai miatt* $BT=\frac{h}{\sqrt{3}}$.

Az *ATB* derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$\frac{h^2}{\text{tg}^2 55°}+\frac{h^2}{\text{tg}^2 60°}=100$,	1 pont	
ebből $h \approx 11$.	2 pont	
A fa magassága (a *TP* távolság) körülbelül 11 méter.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. a)

Ha a sorozat második tagja a_2, akkor (a számtani sorozat ismert tulajdonsága miatt) az első három tag átlaga (számtani közepe) is a_2.	1 pont	
Ha a számtani sorozat differenciája d, akkor a szórásnégyzet: $\frac{(a_2-d-a_2)^2+0^2+(a_2+d-a_2)^2}{3}=6$.	1 pont	
Ebből $d^2=9$,	1 pont	
azaz (mivel a sorozat növekedő) $d = 3$ (ezt kellett bizonyítanunk).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés:
Ha a vizsgázó behelyettesítéssel megmutatja, hogy bármely 3 differenciájú számtani sorozat esetén az első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6, de nem igazolja azt, hogy más (pozitív) differencia esetén nem ennyi, akkor 2 pontot kapjon.
Ha egy (vagy több) konkrét, 3 differenciájú számtani sorozatra látja be azt, hogy az első három tagból álló adathalmaz szórásnégyzete 6, akkor 1 pontot kapjon.

7. b)

Ha Barbara x éves, akkor Cili $x + 3$ éves, és így Dezső, Barbara és Edit életkora rendre $x - 6$, x, illetve $x + 12$ év.	1 pont	
(Mivel ez a három szám egy mértani sorozat három szomszédos tagja, így) $(x-6)(x+12)=x^2$.	1 pont	
A zárójeleket felbontva: $x^2+6x-72=x^2$,	1 pont	
ahonnan $x = 12$.	1 pont	
Ellenőrzés: Dezső, Barbara és Edit életkora 6, 12, illetve 24 év, ez a három szám pedig valóban egy mértani sorozat három szomszédos tagja.	1 pont	
András tehát 9 éves (mert 3 évvel fiatalabb Barbaránál).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. c) első megoldás

Komplementer eseménnyel dolgozunk: nem felelnek meg azok az esetek, amelyekben a három lány három egymás melletti széken ül.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A három egymás melletti széket négyféleképpen lehet kiválasztani a hat közül.	1 pont	*A három lányt egyetlen egységnek tekintve ez az egység és a három fiú 4!-féleképpen helyezhető el.*
A három egymás melletti széken 3!-féleképpen foglalhat helyet a három lány, a megmaradt három helyen szintén 3!-féleképpen foglalhat helyet a három fiú.	1 pont	*Egy egységen belül a lányok 3! különböző sorrendben ülhetnek.*
A nem megfelelő elhelyezkedések száma tehát: $4\cdot6\cdot6\,(=144)$.	1 pont	*A nem megfelelő elhelyezkedések száma tehát* $4!\cdot3!$ *(= 144).*
Hatan a hat egymás melletti székre $6!(=720)$-féleképpen ülhetnének le.	1 pont	
A megfelelő elhelyezkedések száma: $(6!-4\cdot6\cdot6=)\ 576$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. c) második megoldás

Ha nincs két lány, aki egymás mellett ül, akkor a sorrend FLFLFL, LFLFLF, LFLFFL vagy LFFLFL lehet.	1 pont	
Ha két lány egymás mellett ül a sor bal szélén, akkor a sorrend LLFLFF, LLFFLF vagy LLFFFL lehet. Ugyanígy három lehetőség van, ha két lány a sor jobb szélén ül egymás mellett.	1 pont	
Ha két lány valahol a sor közepén ül egymás mellett, akkor a sorrend FLLFFL, FLLFLF, FFLLFL, LFLLFF, FLFLLF vagy LFFLLF lehet.	1 pont	
Tehát csak a nemeket tekintve 16 különböző lehetséges sorrend van.	1 pont	
Minden ilyen sorrendben belül a lányok és a fiúk is 3!-féleképpen helyezkedhetnek el.	1 pont	
Így a megfelelő elhelyezkedések száma: $16\cdot3!\cdot3!=576$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	