ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2015. május 5.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1. első megoldás		
Az érintési pontokat a g-re merőleges, a k kör középpontján átmenő egyenes metszi ki a körből.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
A k kör középpontja az origó,	1 pont	
az origón átmenő, g-re merőleges egyenes egyenlete: $3x - y = 0$.	2 pont	
Az érintési pontok koordinátáit tehát a $\left.\begin{matrix} 3x - y = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 = 90 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első egyenletből: $y = 3x$,	1 pont	
amit a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $40x^2 = 90$.	1 pont	
Ebből adódik, hogy az egyenletrendszernek két megoldása van: (1,5; 4,5)	1 pont	
és (–1,5; –4,5).	1 pont	
A megadott egyenessel párhuzamos érintők egy normálvektora (1; 3).	1 pont	
Az érintők egyenlete: $x + 3y = 15$,	1 pont	
$x + 3y = -15$.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

1. második megoldás		
A keresett érintő egyenlete felírható $x + 3y = c$ alakban is.	1 pont	
Az $x + 3y = c$ egyenes pontosan akkor érinti a megadott kört, ha az alábbi egyenletrendszernek egy megoldása van: $\left.\begin{matrix} x + 3y = c \\ 4x^2 + 4y^2 = 90 \end{matrix}\right\}$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az első egyenletből $x = c - 3y$	1 pont	$y = \dfrac{c - x}{3}$
amit a második egyenletbe helyettesítve: $4(c - 3y)^2 + 4y^2 = 90$.	1 pont	$4x^2 + 4\left(\dfrac{c - x}{3}\right)^2 = 90$
A négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $40y^2 - 24cy + 4c^2 - 90 = 0$.	2 pont	$40x^2 - 8cx + 4c^2 - 810 = 0$
Egy megoldás van, ha a diszkrimináns 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

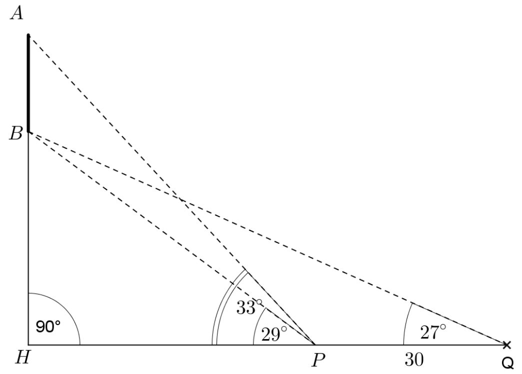
$576c^2 - 4 \cdot 40 \cdot (4c^2 - 90) = 0$,	1 pont	$64c^2 - 160 \cdot (4c^2 - 810) = 0$
ahonnan $c^2 = 225$.	1 pont	
Innen $c = 15$ vagy $c = -15$.	1 pont	
Az érintők egyenlete: $x + 3y = 15$,	1 pont	
$x + 3y = -15$.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

2. a)		
I: 6 darab	1 pont	
II: 2 darab	1 pont	
III: $500 \cdot 0{,}082 =$	1 pont	
= 41 alkalommal	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

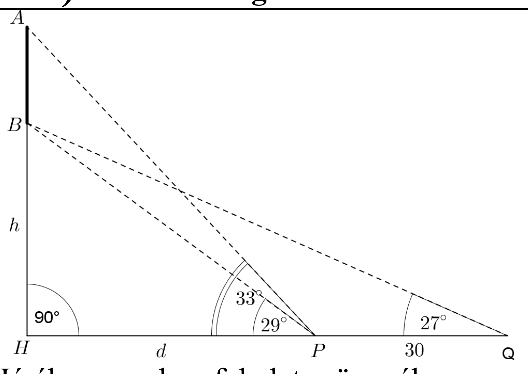
2. b)		
Az összes kiválasztási lehetőség száma: $\binom{40}{10}$.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Kedvező esetek száma: $\binom{8}{2} \cdot \binom{32}{8}$.	1 pont	
A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{8}{2} \cdot \binom{32}{8}}{\binom{40}{10}} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}3474$.	1 pont	
A relatív gyakoriság a kiszámított valószínűségnek $\dfrac{0{,}332}{0{,}3474} \cdot 100 \approx 95{,}6\%$ -a.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem a megfelelő modellt használja (például binomiális eloszlást használ), akkor erre a részre nem kaphat pontot.

2. c)		
A selejtes gyöngy kiválasztásának valószínűsége $\dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$, a hibátlané 0,8.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A keresett valószínűség: $\binom{10}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8 \approx$	2 pont	*Nem bontható.*
$\approx 0{,}302$.	1 pont	*Más helyesen kerekített érték (pl. 0,3) is elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

3. a) **első megoldás**		
 Jó ábra, amely a feladat szövegében szereplő adatokat tartalmazza. (A kilátótoronynak a mező síkjára eső merőleges vetülete legyen H.)	2 pont	*Ha a vizsgázó ábra nélkül is jól használja az adatokat a megoldása során, akkor is jár ez a 2 pont.*
Ezekkel a jelölésekkel ($BPH\angle = 29°$, tehát) $BPQ\angle = 151°$, ($BQP\angle = 27°$, míg) $PBQ\angle = 2°$.	1 pont	*Ez a pont jár akkor is, ha a két szög nagysága egy jó ábráról derül ki.*
(A BPQ háromszögben felírva a szinusztételt:) $\frac{BP}{30} = \frac{\sin 27°}{\sin 2°}$,	2 pont	
s ebből $BP = 30 \cdot \frac{\sin 27°}{\sin 2°} \approx 390$ méter.	1 pont	
A BHP derékszögű háromszögből: $BH = BP \cdot \sin 29°$.	1 pont	
A hegy magassága kb. 189 méter.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: A többi távolság: $HP \approx 341$ m; $PA \approx 407$ m; $QB \approx 417$ m; $QA \approx 433$ m.

3. a) **második megoldás**		
 Jó ábra, amely a feladat szövegében szereplő adatokat tartalmazza. (A kilátótoronynak a mező síkjára eső merőleges vetülete legyen H.)	2 pont	*Ha a vizsgázó ábra nélkül is jól használja az adatokat a megoldása során, akkor is jár ez a 2 pont.*
Legyen $HP = d$, $HB = h$ (a hegy magassága). Ekkor $h = d \cdot \mathrm{tg}\, 29°$,	1 pont	
továbbá $h = (d + 30) \cdot \mathrm{tg}\, 27°$.	1 pont	

Ebből $d\cdot \operatorname{tg}29° = (d+30)\cdot \operatorname{tg}27°$,	1 pont	$\frac{h}{\operatorname{tg}29°} = \frac{h}{\operatorname{tg}27°} - 30$
így $d = \frac{30\cdot\operatorname{tg}27°}{\operatorname{tg}29° - \operatorname{tg}27°}$ (≈ 341 m),	2 pont	$h = \frac{30\cdot\operatorname{tg}29°\cdot\operatorname{tg}27°}{\operatorname{tg}29° - \operatorname{tg}27°}$
és $h\ (= d\cdot\operatorname{tg}29°) \approx 189$ m a hegy magassága.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

3. b) első megoldás		
Az ABP háromszögben $BPA\angle = 4°$ és $BAP\angle = 57°$.	1 pont	
(A szinusztételt alkalmazva:) $\frac{AB}{BP} = \frac{\sin 4°}{\sin 57°}$,	2 pont	
s ebből $AB \approx 390\cdot\frac{\sin 4°}{\sin 57°}$.	1 pont	
A kilátótorony ≈ 32 méter magas.	1 pont	*Következetes kerekítések esetén a 33 méter is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

3. b) második megoldás		
Mivel $HA = d\cdot\operatorname{tg}33°$,	1 pont	
$HA \approx 221$ (m).	2 pont	*A d felhasználásáért vagy kiszámításáért 1 pont jár.*
$AB = HA - HB$	1 pont	
A kilátótorony ≈ 32 méter magas.	1 pont	*Következetes kerekítések esetén a 33 méter is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

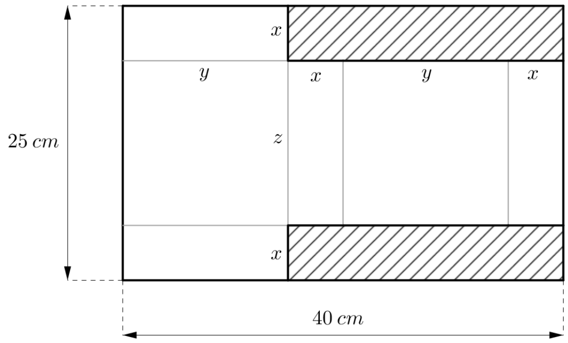
4. első megoldás		
A $4x^2 - 19x + 22 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{11}{4}$.	2 pont	
Mivel a $4x^2 - 19x + 22 < 0$ egyenlőtlenség bal oldalán álló polinom főegyütthatója pozitív,	1 pont	*Ez a pont jár más helyes indoklás (pl. jó ábra) esetén.*
ezért $A = \left]2; \frac{11}{4}\right[$.	2 pont	*Ha valamelyik végpontban nyitott helyett zárt jelet használ, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*

$\sin 2x < 0$ miatt $\pi + 2k\pi < 2x < 2\pi + 2k\pi$.	2 pont	$2x \in \left]\pi + 2k\pi ; 2\pi + 2k\pi\right[$
$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$,	1 pont	$B = \left]\frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + k\pi\right[$
ahol $k \in \mathbf{Z}$.	1 pont	
Mivel $k = 0$ esetén $\frac{\pi}{2} < x < \pi$,	1 pont	$A = \left]2; \frac{11}{4}\right[\subset \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$
és mivel $\frac{\pi}{2} < 2$ és $\frac{11}{4} < \pi$,	2 pont	$\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\subset B$
ezért $A \subset B$ valóban teljesül.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a trigonometrikus egyenlőtlenség megoldásakor nem veszi figyelembe a periodicitást, akkor összesen legfeljebb 9 pontot kaphat.
Ha a vizsgázó a trigonometrikus egyenlőtlenséget fokokban oldja meg, akkor az egyenlőtlenség megoldásáért járó 4 pontot megkaphatja, de az $A \subset B$ vizsgálatáért járó 4 pontot nem.

4. második megoldás		
A $4x^2 - 19x + 22 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{11}{4}$.	2 pont	
Mivel a $4x^2 - 19x + 22 < 0$ egyenlőtlenség bal oldalán álló polinom főegyütthatója pozitív,	1 pont	*Ez a pont jár más helyes indoklás (pl. jó ábra) esetén.*
ezért $A = \left]2; \frac{11}{4}\right[$.	2 pont	*Ha valamelyik végpontban nyitott helyett zárt jelet használ, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*
Azt kell bizonyítanunk, hogy ha $x \in \left]2; \frac{11}{4}\right[$, akkor $\sin 2x < 0$.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha $2 < x < \frac{11}{4}$, akkor $4 < 2x < \frac{11}{2}$.	1 pont	*Ha* $x \in \left]2; \frac{11}{4}\right[$ *,* *akkor* $2x \in \left]4; \frac{11}{2}\right[$.
Mivel $\pi < 4$ és $\frac{11}{2} < 2\pi$,	2 pont	$\left]4; \frac{11}{2}\right[\subset \left]\pi; 2\pi\right[$
továbbá a $\left]\pi; 2\pi\right[$ intervallumon a szinuszfüggvény negatív értékeket vesz fel,	2 pont	
ezért az állítás ($A \subset B$) valóban teljesül.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

II.

5. a) első megoldás		
 ($x = 2$ cm) A téglatest alaplapjának egyik éle: $z = 25 - 2 \cdot 2 = 21$ (cm).	1 pont	
A másik éle kiszámítható a $40 = 2x + 2y$ összefüggésből:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$y = 18$ (cm).	1 pont	
A téglatest felszíne: $A(= 2 \cdot (2 \cdot 21 + 2 \cdot 18 + 21 \cdot 18)) = 912$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. a) második megoldás		
($x = 2$ cm) A $40 = 2x + 2y$ összefüggésből	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$y = 18$ (cm).	1 pont	
A kivágott téglalap másik oldala $2x + y = 22$ (cm).	1 pont	
A téglatest felszíne: $A = 40 \cdot 25 - 2 \cdot 2 \cdot 22 = 912$ cm^2.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b)		
(A téglatest éleinek cm-ben mért hosszát jelölje az **a)** feladat megoldásának ábrája szerint x, y és z.) $0 < x < 12{,}5$,	1 pont	
$y = 20 - x$,	1 pont	
és $z = 25 - 2x$.	1 pont	
A téglatest térfogata: $V(x) = x \cdot (20 - x) \cdot (25 - 2x)$.	1 pont	
A zárójelek felbontása és az összevonás után: $V(x) = 2x^3 - 65x^2 + 500x$ ($0 < x < 12{,}5$).	1 pont	
A V térfogatfüggvény deriváltja: $V'(x) = 6x^2 - 130x + 500$.	1 pont	

(A V függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla,) $6x^2 - 130x + 500 = 0$	1 pont	
Ennek megoldásai $x_1 = 5$ és $x_2 = \frac{50}{3}$.	1 pont	
Ez utóbbi nem megoldása a feladatnak a V függvény értelmezési tartománya miatt.	1 pont	
A térfogatfüggvény második deriváltja: $V''(x) = 12x - 130$. $V''(5) < 0$, tehát az $x = 5$ valóban maximumhely.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltására hivatkozik.*
A kivágott téglalap rövidebb oldala 5 cm.	1 pont	
A téglatest élei 5 cm, 15 cm és 15 cm, így a maximális térfogat: $V(= 5 \cdot 15 \cdot 15) = 1125\ \text{cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

6. a)		
A 9 pontú fagráfnak 8 éle van.	1 pont	
A fokszámok összege (az élek számának kétszerese, tehát) 16.	2 pont	
A megadott fokszámok összege 15.	1 pont	
A hiányzó fokszám tehát 1.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felrajzol egy lehetséges fagráfot és abból leolvassa, hogy a hiányzó fokszám 1, de nem bizonyítja, hogy más lehetőség nincs, akkor 2 pontot kap.

6. b)		
A 9 pontú egyszerű gráfban a fokszámok értéke 0-tól 8-ig terjedhet.	2 pont	
A 0 és a 8 egyszerre nem fordulhat elő,	1 pont	
ezért csak 8 lehetőségünk marad, így (a skatulya elv miatt) biztos van egy ismétlődő fokszám.	1 pont	
Tehát nincs olyan 9 pontú egyszerű gráf, amelyben minden pontnak más a fokszáma.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó pontosan hivatkozik arra a tételre, mely szerint egy (legalább két pontú) egyszerű gráfban létezik két azonos fokszámú pont, akkor megkapja az erre a részre járó 5 pontot.

6. c) első megoldás		
A 9 ember közül kettőt $\binom{9}{2}$-féleképpen, a maradék 7 emberből kettőt $\binom{7}{2}$-féleképpen, a maradék 5 ember közül kettőt $\binom{5}{2}$-féleképpen, a maradék 3 ember közül kettőt $\binom{3}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani.	2 pont	
A fentiek szorzata adja a kiválasztási lehetőségek számát a párok sorrendjét is figyelembe véve.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A kiválasztott négy pár sorrendje nem számít, ezért) a szorzatot osztani kell a négy pár permutációinak számával,	1 pont	*Kevésbé részletezett, de egyértelmű indoklás esetén is járnak ezek a pontok.*
azaz (4!)-sal.	1 pont	
A lehetőségek száma: $\dfrac{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}}{4!} = 945.$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c) második megoldás		
A kilenc ember közül négyet $\binom{9}{4}$-féleképpen választhatunk ki.	1 pont	
A maradék öt ember közül minden kiválasztott emberhez kiválasztunk egyet-egyet, ezt $5\cdot4\cdot3\cdot2$-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
A fentiek szorzata adja a kiválasztási lehetőségek számát, ha az egyes párokon belüli sorrendre is tekintettel vagyunk.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Minden kiválasztott páron belül a két ember kiválasztásának sorrendje felcserélhető,	1 pont	*Kevésbé részletezett, de egyértelmű indoklás esetén is járnak ezek a pontok.*
ezért a szorzatot osztani kell 2^4-nel.	1 pont	
A lehetőségek száma: $\dfrac{\binom{9}{4}\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2^4} = 945.$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c) harmadik megoldás		
A kilenc ember közül lesz egy, aki még senkivel nem fogott kezet, őt 9-féleképpen választhatjuk ki.	2 pont	
A maradék nyolc ember közül egyet kiválasztva 7-féleképpen választhatjuk ki a többiek közül azt, akivel ő kezet fogott. A maradék hat ember közül egyet kiválasztva 5-féleképpen választhatjuk ki a többiek közül azt, akivel ő kezet fogott. A maradék négy ember közül egyet kiválasztva 3-féleképpen választhatjuk ki a többiek közül azt, akivel ő kezet fogott. A maradék két ember egymással fogott kezet.	2 pont	
A fentiek szorzata adja a kiválasztási lehetőségek számát.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A lehetőségek száma: $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 945$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. első megoldás		
Jelölje n a döntőbe jutott versenyzők számát ($n > 1$). A versenyzők pontszámai az utolsótól az elsőig egy olyan szigorúan növekvő számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek első tagja 1, differenciája $d > 0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mivel minden mérkőzésen 1 pontot osztanak szét,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért a számtani sorozat első n tagjának (a versenyzők pontszámainak) összege egyenlő a mérkőzések számával.	1 pont	
Az első n tag összege: $\frac{n}{2} \cdot \left(2 + (n-1) \cdot d\right)$,	1 pont	
a mérkőzések száma $\frac{n(n-1)}{2}$,	1 pont	
tehát $\frac{n}{2} \cdot \left(2 + (n-1) \cdot d\right) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.	1 pont	
Innen ($n \neq 0$-val osztva) $2 + (n-1) \cdot d = n - 1$.	1 pont	
Zárójelfelbontás és rendezés után: $d \cdot (n-1) = n - 3$.	1 pont	$2 = (n-1) \cdot (1-d)$, s mivel $n - 1 > 0$, ezért $1 - d > 0$ is teljesül.
(Tudjuk, hogy $n \neq 1$, ezért) $d = \frac{n-3}{n-1} \left(= 1 - \frac{2}{n-1} \right)$.	1 pont	
Ebből adódik, hogy $d < 1$.	1 pont	
A d biztosan 0,5 pozitív egész számú többszöröse,	1 pont	
ami csak úgy lehet, ha $d = 0{,}5$.	1 pont	

Ekkor viszont $n-1=4$,	1 pont	
azaz 5 versenyző jutott a döntőbe.	1 pont	
A győztes 3 pontot ért el.	1 pont	
Ellenőrzés: a versenyzők pontszámai 1; 1,5; 2; 2,5 és 3, s ez megfelel a feltételeknek.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

Megjegyzés: A bajnokság egy lehetséges eredménytáblázatát mutatja az alábbi ábra.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**pont**
A		1-0	1-0	dönt	dönt	**3**
B	0-1		1-0	1-0	dönt	**2,5**
C	0-1	0-1		1-0	1-0	**2**
D	dönt	0-1	0-1		1-0	**1,5**
E	dönt	dönt	0-1	0-1		**1**

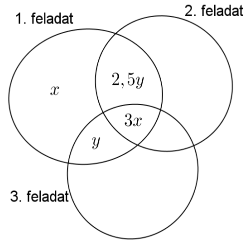
7. második megoldás		
Jelölje n a döntőbe jutott versenyzők számát ($n > 1$). A versenyzők pontszámai az utolsótól az elsőig egy olyan szigorúan növekvő számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek első tagja 1, differenciája $d > 0$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A győztes versenyzőnek $1+(n-1)d$ pontja van,	1 pont	
ahol (mivel egy mérkőzésén legfeljebb 1 pontot szerezhetett, ezért pontjainak száma legfeljebb $n-1$ lehet) $1+(n-1)d \le n-1$.	1 pont	
Innen ($n > 1$ miatt) $d \le \frac{n-2}{n-1}\left(=1-\frac{1}{n-1}\right)$.	1 pont	
Ebből adódik, hogy $d < 1$.	1 pont	
A d biztosan 0,5 pozitív egész számú többszöröse,	1 pont	
ami csak úgy lehet, ha $d = 0,5$.	1 pont	
Mivel minden mérkőzésen 1 pontot osztanak szét,	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért a számtani sorozat első n tagjának (a versenyzők pontszámainak) összege egyenlő a mérkőzések számával.	1 pont	
Az első n tag összege $\frac{2+(n-1)\cdot 0,5}{2}\cdot n$,	1 pont	
a mérkőzések száma $\frac{n(n-1)}{2}$,	1 pont	
tehát $\frac{2+(n-1)\cdot 0,5}{2}\cdot n = \frac{n(n-1)}{2}$.	1 pont	
Innen ($n > 1$ miatt) $n=5$ adódik.	1 pont	
A versenyen 5-en vettek részt.	1 pont	
A győztes 3 pontot ért el.	1 pont	
Ellenőrzés: a versenyzők pontszámai 1; 1,5; 2; 2,5 és 3, s ez megfelel a feltételeknek.	1 pont	
Összesen:	**16 pont**	

8. a)		
A megadott parabolaív tengelytől legtávolabbi pontjának első koordinátája a zérushelyek számtani közepe,	1 pont	
tehát $x = 6$.	1 pont	
A megadott ábra alapján igaz, hogy a legtávolabbi pont a harmadfokú íven ott van, ahol az ívet leíró függvény deriváltja nulla.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$0{,}03x^2 - 1{,}44 = 0$,	1 pont	
ahonnan (felhasználva, hogy $x > 0$) $x = \sqrt{48}$ ($\approx 6{,}93$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. b)		
(A területet az íveket leíró két függvény integráljának különbségéből kapjuk.) $T = \int_0^{12} (-0{,}25x^2 + 3x)dx - \int_0^{12} (0{,}01x^3 - 1{,}44x)dx =$	1 pont	
$= \int_0^{12} (-0{,}01x^3 - 0{,}25x^2 + 4{,}44x)dx =$	1 pont	
$= \left[-0{,}0025x^4 - \frac{0{,}25}{3}x^3 + 2{,}22x^2 \right]_0^{12}$	2 pont	
$T \left(= \frac{3096}{25} \right) = 123{,}84$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: $\int_0^{12} (-0{,}25x^2 + 3x)dx = 72$ *és* $\int_0^{12} (0{,}01x^3 - 1{,}44x)dx = -\frac{1296}{25} = -51{,}84$.

8. c)		
$f(x) = \frac{-0{,}25x(x-12)}{0{,}01x(x-12)(x+12)}$	2 pont	
Egyszerűsítés után: $f(x) = -25 \cdot \frac{1}{x+12} = g(x)$.	1 pont	
A deriváltfüggvény hozzárendelési szabálya: $g'(x) = \frac{25}{(x+12)^2}$.	1 pont	*Ha a vizsgázó ábrájáról kiderül, hogy a g grafikonját tartalmazó hiperbola aszimptotái az y = 0 és az x = –12 egyenesek, akkor 1 pont, a megfelelő hiperbolaív megrajzolásért további 1 pont jár.*
Ez minden $x \in]0;12[$ esetén pozitív,	1 pont	
ezért a g szigorúan monoton növekedő függvény.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

9. a)		
Ha x jelöli a csak az első feladatot megoldók számát, akkor mindhárom feladatot helyesen megoldó tanulók száma $3x$.	1 pont	*Helyes Venn-diagramért is jár ez a 2 pont.* 
A csak az első és a harmadik feladatot megoldók száma legyen y. Ekkor $2,5y$ azoknak a tanulóknak a száma, akik csak az első két feladatot oldották meg.	1 pont	
A kapott adatokból: $4x + 3,5y = 22$ $3x + 2,5y = 16$	2 pont	
Az egyenletrendszer megoldása $x = 2$, $y = 4$.	1 pont	
Mindhárom feladatot tehát ($3x =$) 6 tanuló tudta megoldani.	1 pont	
Ellenőrzés a feladat szövege alapján.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. b)		
Ha az osztályzatok átlaga 3,4, akkor összegük $3,4 \cdot 30 = 102$.	1 pont	
A hiányzó hat osztályzat összege tehát $102 - (35 + 20 + 18 + 8 + 2) = 19$.	1 pont	
Ha az osztályzatok mediánja 3,5, akkor a nagyság szerint sorrendbe állított osztályzatok között a két középső hármas és négyes, tehát összesen 15 legalább négyes és 15 legfeljebb hármas osztályzat született.	1 pont	*Ez a pont jár, ha a vizsgázó kijelenti, hogy a nagyság szerint sorba rendezett osztályzatok között a 15. osztályzat hármas és a 16. osztályzat négyes.*
(Ha az osztályzatok módusza 4, akkor négyesből volt a legtöbb, tehát) a hiányzó osztályzatok között legalább 3 négyes volt.	1 pont	
Több nem is lehetett, mert ezzel megvan a 15 hármasnál jobb osztályzat.	1 pont	
A másik három hiányzó osztályzat tehát legfeljebb hármas, összegük pedig $19 - 12 = 7$.	1 pont	
Két hármas nem lehetett köztük, mert akkor a 3 is módusz lenne,	1 pont	
(és mindhárom nem lehet hármasnál rosszabb, így) az egyik hármas a másik kettő kettes.	1 pont	
A hiányzó hat osztályzat tehát: 4, 4, 4, 3, 2, 2.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	*Kevésbé részletezett, de egyértelmű indoklás esetén is teljes pontszám adható.*