ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2015. május 5.

# MATEMATIKA

## EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

## JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

**Figyelem!** Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

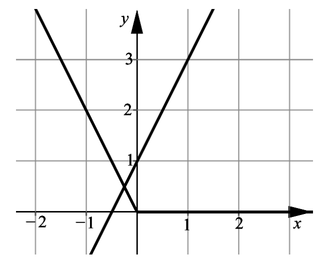
# I.

| **1. a)** | | |
|---|---|---|
| $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítése. | 1 pont | |
| Nullára rendezve: $\sin^2 x + \sin x = 0$. | 1 pont | |
| Szorzattá alakítás után: $\sin x \cdot (\sin x + 1) = 0$. | 1 pont | *A sin x-ben másodfokú egyenlet megoldóképletének helyes felírása.* |
| $\sin x = 0$ pontosan akkor, ha $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$. | 1 pont* | |
| $\sin x = -1$ pontosan akkor, ha $x = \frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. | 1 pont* | |
| Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással. | 1 pont | *A behelyettesítés elfogadható egy $2\pi$ hosszúságú perióduson belül is.* |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés:*
*Ha a vizsgázó a következő hibák közül egyet követ el, akkor a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot, ha egynél többet hibázik, akkor 0 pontot kapjon: a periódusokat lehagyja; fokban oldja meg az egyenletet; fokban és radiánban (vegyesen) dolgozik; sehol nem említi, hogy $k \in \mathbf{Z}$.*

| **1. b)** | | |
|---|---|---|
| Ha $x \geq 0$, akkor $\|x\| = x$. | 1 pont | |
| Ekkor $0 = 2x + 1$, ahonnan $x = -\frac{1}{2}$, | 1 pont | |
| de ez $x \geq 0$ miatt nem megoldás. | 1 pont | *Ez a pont jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel szűri ki a hamis gyököt.* |
| Ha $x < 0$, akkor $\|x\| = -x$, | 1 pont | |
| és az egyenlet: $\|2x\| = 2x + 1$. | 1 pont | |
| (Mivel $x < 0$, ezért) $-2x = 2x + 1$, azaz $x = -\frac{1}{4}$. | 1 pont | |
| Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy (az $x < 0$ feltétel teljesülésének említése mellett) ekvivalens átalakításokra hivatkozással. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Grafikus megoldás esetén az $x \mapsto \left| x - |x| \right|$ ábrázolása ($x \mapsto -2x$, ha $x \leq 0$ és $x \mapsto 0$, ha $x > 0$) 4 pont, az $x \mapsto 2x + 1$ ábrázolása 1 pont. Metszéspont leolvasása 1 pont. Ellenőrzés behelyettesítéssel 1 pont.*



| **2. a) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A képernyő oldalainak hosszát (cm-ben) jelölje $16x$ és $9x$. | 1 pont | |
| 40 col = 101,6 cm | 1 pont | |
| (A Pitagorasz-tétel szerint:) $(16x)^2 + (9x)^2 = 101{,}6^2$. | 1 pont | |
| $337x^2 = 10\ 322{,}56$ | 1 pont | |
| Ebből (mivel $x > 0$) $x \approx 5{,}535$ (cm). | 1 pont | |
| A képernyő oldalainak hossza tehát ($16x \approx$) 88,6 cm és ($9x \approx$) 49,8 cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **2. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A képernyő oldalainak hosszát (col-ban) jelölje $16x$ és $9x$. | 1 pont | |
| (A Pitagorasz-tétel szerint:) $(16x)^2 + (9x)^2 = 40^2$. | 1 pont | |
| $337x^2 = 1600$ | 1 pont | |
| Ebből (mivel $x > 0$) $x \approx 2{,}179$ (col). | 1 pont | |
| A képernyő oldalainak hossza tehát ($16x \approx$) 34,863 (col) és ($9x \approx$) 19,610 (col), | 1 pont | |
| azaz 88,6 cm és 49,8 cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: Más, ésszerű és helyes kerekítésekkel kapott részeredményekből származó (egy tizedesjegyre helyesen kerekített) válasz is elfogadható. Ha a vizsgázó válaszában nem kerekít, vagy rosszul kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

| **2. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az első képernyő területe a második területének 1,69-szerese. | 1 pont | |
| A két (téglalap alakú) képernyő hasonló, ezért | 1 pont | |
| a területük aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A képernyők hasonlóságának (és így átlóik hosszának) aránya $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$. | 1 pont | |
| Az első képernyő átlója 30%-kal nagyobb, mint a másodiké. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **2. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az első képernyő oldalainak hossza $16x$, illetve $9x$, a másodiké pedig $16y$ és $9y$ ($x > 0$ és $y > 0$). | 1 pont | |
| Az első képernyő területe $144x^2$, a másodiké pedig $144y^2$, tehát $144x^2 = 1{,}69 \cdot 144y^2$. | 1 pont | |
| Ebből $x = 1{,}3y$. | 1 pont | |
| Az első képernyő átlójának hossza $\sqrt{256x^2 + 81x^2} = x \cdot \sqrt{337}$, a másodiké pedig $\sqrt{256y^2 + 81y^2} = y \cdot \sqrt{337}$. | 1 pont | *A két képernyő hasonló, ezért az átlóik aránya megegyezik egy megfelelő oldalpárjuk arányával, ami* $\frac{x}{y} = 1{,}3$. |
| Mivel $x = 1{,}3y$, az első képernyő átlója 30%-kal nagyobb, mint a másodiké. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a feladatot úgy oldja meg, hogy a két képernyő területének konkrét értékeket ad, és nem említi, hogy ez nem megy az általánosság rovására, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.*

| **3. a)** | | |
|---|---|---|
| A kerekített bevételek összege $7 \cdot 120 = 840$ (millió Ft). | 1 pont | |
| A medián 120 millió forint, és két 120 millió forintos árbevétel volt, ezért legfeljebb három 120 millió forintnál kisebb bevétel lehet. | 1 pont | *Ha a vizsgázó (indoklás nélkül) helyesen felsorolja a kerekített bevételeket, akkor ezért ebből a 3 pontból 1 pont jár.* |
| Mivel a módusz 100 millió forint, ezért három 100 millió forintos árbevétel volt. | 1 pont | |
| A 160 millió Ft-os árbevétel figyelembevételével a hetedik árbevétel $(840 - 3 \cdot 100 - 2 \cdot 120 - 160 =)$ $= 140$ millió forintnak adódik. | 1 pont | |
| A (kerekített) bevételek szórása: $\sqrt{\frac{3 \cdot (100-120)^2 + 2 \cdot (120-120)^2 + (140-120)^2 + (160-120)^2}{7}} \approx$ | 1 pont | *Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem részletezi a számolás menetét, de számológéppel számolva jó eredményt kap.* |
| $\approx 21{,}4$ millió (Ft). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **3. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A rendes eladási ár árengedmény nélkül $(54 + 9 =)$ 63 millió Ft lett volna. | 1 pont | |
| Tehát az eladott áru beszerzési értéke $\frac{63}{1{,}8} = 35$ millió Ft, | 2 pont | |
| az árnyereség pedig $(54 - 35 =)$ 19 millió Ft volt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **3. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| A rendes eladási ár a beszerzési érték $\frac{9}{5}$-szöröse, a kedvezményes eladási ár pedig a $\frac{9}{10}$-szerese. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A rendes eladási árnak $\frac{5}{9}$ része a beszerzési érték, ezért a rendes eladási árból befolyt összeg $\frac{4}{9}$ része (ár)nyereség; | 1 pont | |
| a kedvezményes eladási árnak $\frac{10}{9}$-szerese a kedvezményesen eladott áru beszerzési értéke, ezért a kedvezményes eladásból befolyt összeg $\frac{1}{9}$ része (ár)veszteség. | 1 pont | |
| Az árnyereség $\left(\frac{4}{9}\cdot 45-\frac{1}{9}\cdot 9=\right)$ 19 millió Ft volt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **3. b)** **harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A nem akciós időszakban eladott áru után 45 millió forint árbevétel keletkezett, az áru beszerzési értéke $\left(\frac{45}{1{,}8}=\right)$ 25 millió forint volt. | 1 pont | |
| A 9 milliós árbevételhez $\left(\frac{9}{0{,}9}=\right)$ 10 millió forint beszerzési érték tartozik. | 1 pont | |
| A beszerzési érték összesen 35 millió forint, | 1 pont | |
| az árnyereség pedig (54 – 35 =) 19 millió forint volt. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó csak* 10 000 *forintos beszerzési értékű termékekkel dolgozik, és nem említi, hogy ez nem megy az általánosság rovására, akkor emiatt 1 pontot veszítsen.*

| **3. c)** | | |
|---|---|---|
| Megmaradt 1 darab M-es, 2 darab L-es és 4 darab XL-es zakó. | 1 pont | |
| Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{7!}{2!\cdot 4!}=$ | 1 pont | $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{4}$ |
| = 105. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

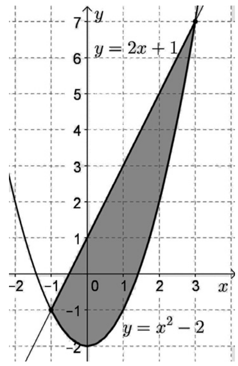
| **4. a)** első megoldás | | |
|---|---|---|
| $\lvert AB\rvert = \sqrt{324+36} = \sqrt{360}$<br>$\lvert AC\rvert = \sqrt{676+64} = \sqrt{740}$<br>$\lvert BC\rvert = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ | 2 pont | *Egy hiba esetén 1 pont jár, két hiba esetén nem jár pont.* |
| Koszinusztétellel:<br>$740 = 360 + 68 - 2\cdot\sqrt{360}\cdot\sqrt{68}\cdot\cos\beta$ | 2 pont | |
| $\cos\beta = \frac{-312}{2\cdot\sqrt{360}\cdot\sqrt{68}} \approx -0{,}9971$ | 1 pont | |
| $\beta \approx 175{,}6°$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **4. a)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{BA}(-18; 6)$, $\overrightarrow{BC}(8; -2)$. | 1 pont | |
| $\lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{360}$ és $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{68}$. | 1 pont | |
| A $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ skaláris szorzatot írjuk fel kétféleképpen:<br>$(-18)\cdot 8 + 6\cdot(-2) = \sqrt{360}\cdot\sqrt{68}\cdot\cos\beta$. | 2 pont | |
| $\cos\beta = \frac{-156}{\sqrt{360}\cdot\sqrt{68}} \approx -0{,}9971$ | 1 pont | |
| $\beta \approx 175{,}6°$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **4. b)** | | |
|---|---|---|
| Az $ABC$ háromszög két (tetszőlegesen választott) oldalfelező merőlegesének metszéspontját kell megkeresnünk (ez a háromszög körülírt körének középpontja). | 1 pont | *Ez a pont jár egy erre a gondolatra utaló jó ábráért is.* |
| $F_{AB}(-7; 7)$ és $\mathbf{n}_{f_{AB}} = \overrightarrow{AB}(18; -6)$. | 1 pont | |
| *Az AB* szakasz felezőmerőlegesének egyenlete:<br>$3x - y = -28$. | 1 pont | |
| $F_{BC}(6; 3)$ és $\mathbf{n}_{f_{BC}} = \overrightarrow{BC}(8; -2)$. | 1 pont | *$F_{AC}(-3; 6)$ és $\mathbf{n}_{f_{AC}} = \overrightarrow{AC}(26; -8)$.* |
| A $BC$ szakasz felezőmerőlegesének egyenlete:<br>$4x - y = 21$. | 1 pont | *Az AC szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $13x - 4y = -63$.* |
| A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása: $x = 49$ és $y = 175$. | 2 pont | |
| Tehát $K(49; 175)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

# II.

| 5. a) | | |
|---|---|---|
| $(2f+g)(x) = 2(2x+1)+x^2-2 = x^2+4x$ | 1 pont | |
| $x(x+4)=0$ | 1 pont | |
| A $2f+g$ függvény zérushelyei a 0 és a –4. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 5. b) | | |
|---|---|---|
| (A kérdéses területet integrálással számítjuk ki.)<br>Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásai adják az integrálás határait. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A $2x+1=x^2-2$ egyenlet megoldásai –1, illetve 3. | 1 pont | |
| Mivel a $[-1; 3]$ zárt intervallumon $f(x) \geq g(x)$<br>(a metszéspontok első koordinátái által meghatározott intervallumon a $g$ grafikonja egy „felfelé nyíló” parabolaív, amely „felett” van az $f$ grafikonja), | 1 pont | *Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.*<br><br> |
| ezért a kérdéses terület $\int_{-1}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx$. | 1 pont | |
| $\int_{-1}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_{-1}^{3}\left((2x+1)-(x^2-2)\right)dx =$<br>$\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx =$ | 1 pont | $\int_{-1}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx =$<br>$= \int_{-1}^{3} f(x)\,dx - \int_{-1}^{3} g(x)\,dx$ |
| $= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3} =$ | 1 pont* | $\int_{-1}^{3}(2x+1)dx = \left[x^2+x\right]_{-1}^{3} =$<br>$= 12$<br>$\int_{-1}^{3}(x^2-2)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_{-1}^{3} =$<br>$= \frac{4}{3}$ |
| $= 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3}$ ($\approx 10{,}67$) | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó a határozott integrál értékét számológéppel helyesen határozza meg.*

| **5. c)** | | |
|---|---|---|
| (A $h(x)$ függvény a megadott intervallumon differenciálható.) $h'(x)=\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{x^2-2}{2x+1}\right)'=\frac{2x(2x+1)-(x^2-2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=$ | 2 pont | |
| $=\frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}=$ | 1 pont | |
| $=\frac{2(x+0{,}5)^2+3{,}5}{(2x+1)^2}$ | 1 pont | *A $2x^2+2x+4=0$ egyenlet diszkriminánsa negatív (–28), továbbá a $2x^2+2x+4$ polinom főegyütthatója pozitív, ezért a polinom minden helyettesítési értéke pozitív..* |
| A tört számlálója és nevezője is pozitív (a $h$ értelmezési tartományán), így a tört értéke is pozitív. | 1 pont | |
| Tehát a függvény valóban szigorúan monoton növekvő. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó függvény helyett csak sorozatra igazolja a monoton növekedést, akkor ezért nem jár pont.*

| **6. a)** | | |
|---|---|---|
| A 4 hibás és 6 ép tojás a sárga tojástartóba $\binom{4}{4}\cdot\binom{16}{6}$(= 8008)-féleképpen kerülhet. | 1 pont* | |
| Az összes eset száma: $\binom{20}{10}$(= 184 756). | 1 pont* | |
| Annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás a sárga dobozba kerül: $p=\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{16}{6}}{\binom{20}{10}}$ (≈ 0,0433). | 1 pont* | |
| (Mivel a 4 hibás tojás a fehér tojástartóba is kerülhet, ezért) a kérdéses valószínűség ennek kétszerese, | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| azaz közelítőleg 0,087. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzések:*
*1. A *-gal jelölt 3 pontot akkor is megkaphatja a vizsgázó, ha annak a valószínűségét, hogy (például) a sárga tojástartóba kerülő mind a 10 tojás ép (és így mind a 4 hibás tojás a fehér tartóba kerül), a* $\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\ldots\cdot\frac{7}{11}$ *szorzattal számítja ki.*
*2. Ha a vizsgázó rossz modellt használ (binomiális eloszlással számol), akkor erre a részre nem kaphat pontot.*

| **6. b)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Annak a valószínűsége, hogy egy tojás ép: 0,98. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Annak a valószínűsége, hogy Csenge nem talál törött tojást a dobozban: $0{,}98^{10}$ ($\approx 0{,}817$). | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy Csenge egy darab törött tojást talál a dobozban: $\binom{10}{1}\cdot 0{,}98^9\cdot 0{,}02$ ($\approx 0{,}167$). | 1 pont | |
| Így a kérdéses valószínűség: $p = 1 - 0{,}98^{10} - 10\cdot 0{,}98^9\cdot 0{,}02 \approx$ | 1 pont | |
| $\approx 0{,}016$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **6. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Annak a valószínűsége, hogy egy tojás ép: 0,98. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Annak a valószínűsége, hogy Csenge 2 darab törött tojást talál a dobozban: $P(2) = \binom{10}{2}\cdot 0{,}98^8\cdot 0{,}02^2$ ($\approx 0{,}0153$). | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy Csenge 3 darab törött tojást talál a dobozban: $P(3) = \binom{10}{3}\cdot 0{,}98^7\cdot 0{,}02^3$ ($\approx 0{,}0008$). | 1 pont | |
| A $P(4)$, $P(5)$, ..., $P(10)$ valószínűségek, és ezek összege is már elhanyagolhatóan kicsi, | 1 pont | |
| így a kérdéses valószínűség megközelítőleg $P(2) + P(3) \approx 0{,}016$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **6. c)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Jelölje *A*, illetve *B* azt az eseményt, hogy a kiválasztott tojás az *A*, illetve a *B* beszállítótól származik, *E* pedig azt az eseményt, hogy a kiválasztott tojás első osztályú. Ezekkel a jelölésekkel meghatározandó a $P(A\|E)$ valószínűség. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A feltételes valószínűség definíciója szerint $P(A\mid E)=\frac{P(AE)}{P(E)}$. | 1 pont | |
| Annak valószínűsége, hogy az *A* beszállítótól választottunk tojást, és az első osztályú: $P(AE)\ (=P(E\mid A)\cdot P(A))=0{,}6\cdot 0{,}6\ (=0{,}36)$. | 1 pont | |
| Annak valószínűsége, hogy a *B* beszállítótól választottunk tojást, és az első osztályú: $P(BE)\ (=P(E\mid B)\cdot P(B))=0{,}3\cdot 0{,}4\ (=0{,}12)$. | 1 pont | |
| Annak valószínűsége, hogy a kiválasztott tojás első osztályú, az előző két valószínűség összege: $P(E)=0{,}6\cdot 0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}3\ (=0{,}48)$. | 1 pont | |
| Tehát $P(A\mid E)=\frac{0{,}36}{0{,}48}=0{,}75$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **6. c)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az *A* beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 36%-a. | 1 pont | |
| a *B* beszállítótól származó első osztályú tojások száma az összesnek 12%-a. | 1 pont | |
| Az összes beszállított tojásnak a 48%-a első osztályú. | 1 pont | |
| Az első osztályú tojások $\left(\frac{0{,}36}{0{,}48}\cdot 100\%=\right)$ 75%-a származik az *A* beszállítótól. | 2 pont | |
| A kérdezett valószínűség tehát 0,75. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: A megoldás teljes értékű akkor is, ha a vizsgázó egy konkrét eset végigszámolása útján jut helyes eredményre, és utal arra, hogy a kapott valószínűség csupán az eloszlástól és nem az önkényesen választott darabszámtól függ.*
*Például:* 1000 *beszállított tojás közül (1 pont)* 600 *darab származik az A beszállítótól, és ezek között* 360 *darab első osztályú van (1 pont),* 400 *darab származik a B beszállítótól, és ezek között* 120 *darab első osztályú van (1 pont). Az összes tojás között tehát* 480 *első osztályú (1 pont), ezeknek a* 75%*-a (azaz* 360 *darab) származik az A beszállítótól. A kérdezett valószínűség tehát* $(360:480=)\ 0{,}75$ *(1 pont). A kiszámított arányok nem függnek a konkrét darabszámtól, ezért az eredmény bármely esetben ugyanennyi (1 pont).*

| 7. a) | | |
|---|---|---|
| A havi törlesztés összege (Ft-ban): $t_{72}=1{,}6\cdot 10^6\cdot\dfrac{1{,}02^{72}\cdot 0{,}02}{1{,}02^{72}-1}$ (≈ 42 123). | 2 pont | |
| A 72 hónap alatt összesen $72\cdot t_{72}$ (≈ 3 032 856) forintot fizetünk vissza, | 1 pont | |
| ami ezer forintra kerekítve 3 033 000 Ft. | 1 pont | *Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.* |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| 7. b) | | |
|---|---|---|
| (Azt a legkisebb *n* pozitív egész számot keressük, amelyre) $2\cdot 10^6\cdot\dfrac{1{,}02^n\cdot 0{,}02}{1{,}02^n-1}\le 60\,000$. | 2 pont | |
| (Mivel $1{,}02^n-1>0$, ezért) $0{,}02\cdot 1{,}02^n\le 0{,}03\cdot(1{,}02^n-1)$. | 1 pont | |
| $3\le 1{,}02^n$ | 1 pont | |
| Az 1,02 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, | 1 pont | *A* 10-*es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő,* |
| ezért $n\ge\log_{1,02}3$. | 1 pont | *ezért* $\lg 3\le\lg 1{,}02^n$, *vagyis* $\lg 3\le n\cdot\lg 1{,}02$. |
| (A logaritmus azonosságát használva:) $n\ge\dfrac{\lg 3}{\lg 1{,}02}\approx 55{,}48$ | 1 pont | $\lg 1{,}02>0$ miatt $n\ge\dfrac{\lg 3}{\lg 1{,}02}\approx 55{,}48$, |
| Tehát a törlesztőrészletek száma legalább 56 (azaz legalább 56 hónapos futamidőt kell választanunk). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

*Megjegyzés: A 8 pont akkor is jár, ha a vizsgázó egyenletet ír fel egyenlőtlenség helyett, azt jól megoldja, és helyes következtetésre jut a törlesztőrészletek minimális számát illetően.*

| 7. c) | | |
|---|---|---|
| A megadott számokkal $t_n = H\cdot(q-1)\cdot\frac{q^n}{q^n-1} = 40\,000\cdot\frac{1{,}02^n}{1{,}02^n-1}$. | 1 pont | $t_n = H\cdot(q-1)\cdot\frac{q^n}{q^n-1} =$ $= H\cdot(q-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}$ |
| Egyszerűsítés után: $t_n = 40\,000\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1{,}02^n}}$. | 1 pont | |
| Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1{,}02^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^n = 0$, | 1 pont | Mivel $q > 1$, így $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q^n} = 0$. |
| ezért $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 40\,000\cdot\frac{1}{1-0} = 40\,000$. | 1 pont | $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = H(q-1) = 40\,000$ |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

*Megjegyzés: A vizsgázó 3 pontot kapjon az alábbi megoldásáért.*
*Megállapítja (tanult ismeretként), hogy a $\{q^n\}$ sorozat határértéke plusz végtelen (1 pont).*
*Kijelenti, hogy „az $\frac{a}{a-1}$ tört értéke az 1-hez tart, ha a számlálója a végtelenhez tart” (de ezt az állítását nem támasztja alá további érveléssel) (1 pont).*
*Fentiek alapján megállapítja, hogy a $\{t_n\}$ sorozat határértéke $H(q-1)$, ami 40 000 (1 pont).*

| 8. a) | | |
|---|---|---|
| Legyen a négyszög legkisebb szöge $\alpha$ fok, a sorozat differenciája pedig $d$ fok ($d \ge 0$). Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) $\alpha$, $\alpha + d$, $\alpha + 2d$ és $\alpha + 3d$ fok nagyságúak. | 1 pont | |
| A négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért $4\alpha + 6d = 360$, | 1 pont | |
| vagyis $2\alpha + 3d = 180$. | 1 pont | |
| $2\alpha + 3d = (\alpha + d) + (\alpha + 2d)$, ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege 180°. | 1 pont | |
| Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz, | 1 pont | |
| ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög. Tehát az állítást igazoltuk. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| 8. b) | | |
|---|---|---|
| A megfordítás: Ha egy négyszög trapéz vagy húr-négyszög, akkor a szögei (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat szomszédos tagjai. | 1 pont | |
| A megfordítás hamis. | 1 pont | |
| Egy megfelelő ellenpélda. | 1 pont | *Például: egy trapéz, amelynek szögei* 50°, 70°, 110° *és* 130° *nagyságúak.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **8. c)** első megoldás | | |
|---|---|---|
| A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Először válasszuk ki a legrövidebb pálcikát, amelynek a hossza $a$ cm, a (konvex négyszögben) vele szemben elhelyezni kívánt pálcika hossza pedig legyen $c$ cm. | 1 pont | |
| A készlet négy pálcikájából pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyszög, ha $a + c = 12$ (cm). | 1 pont | |
| A 12-t hatféleképpen lehet két pozitív egész szám összegére felbontani: $1 + 11 = 2 + 10 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6$. | 1 pont | |
| Ha $a = 1$, akkor $c = 11$, a másik két pálcika hosszának megválasztására pedig 6 különböző lehetőség van (1 és 11, vagy 2 és 10, vagy 3 és 9, vagy 4 és 8, vagy 5 és 7, vagy 6 és 6 cm). | 1 pont | |
| Hasonlóan továbbhaladva kapjuk, hogy ha $a = 2$, akkor 5, ha $a = 3$, akkor 4, ha $a = 4$, akkor 3, ha $a = 5$, akkor 2, és végül, ha $a = 6$, akkor 1 lehetőség van. | 1 pont | |
| Az összes különböző lehetőségek száma tehát $(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =)$ 21. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **8. c)** második megoldás | | |
|---|---|---|
| A négy kiválasztott pálcikából pontosan akkor készíthető érintőnégyszög, ha a két-két szemközti pálcika hosszának összege egyenlő. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A készlet négy pálcikájából tehát pontosan akkor építhető 24 cm kerületű érintőnégyszög, ha a négyszögben egymással szemben elhelyezkedő két-két oldal (centiméterben mért) hossza az (1; 11), (2; 10), (3; 9), (4; 8), (5; 7), (6; 6) számpárok valamelyike. | 2 pont | |
| Annyiféleképpen választható ki négy megfelelő pálcika a készletből, ahányféleképpen a hat számpárból kettő – sorrendre való tekintet nélkül – kiválasztható úgy, hogy egy számpárt kétszer is választhatunk. | 1 pont | |
| Ez a szám 6 különböző objektum másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik meg. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| Az összes különböző lehetőségek száma tehát $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} =$ | 1 pont | |
| $= 21.$ | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó szisztematikusan felsorolja a 21 különböző lehetőséget, akkor ezért teljes pontszámot kapjon.*

| **9. a) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha a kocka éle $a$, a gömb sugara pedig $r$, akkor $6a^2 = 4r^2\pi$. | 1 pont | |
| Ebből $r = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}a$. | 1 pont | $a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}r$ |
| A gömb térfogata $\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}}a\right)^3 =$ | 1 pont | $V_{kocka} = \sqrt{\frac{8\pi^3}{27}}r^3$. |
| $= \sqrt{\frac{6}{\pi}}\cdot a^3$ (ahol $a^3$ a kocka térfogata). | 1 pont | *(Mivel a gömb térfogata* $\frac{4\pi}{3}r^3$, *így) azt kell belátni, hogy* $\frac{4\pi}{3} > \sqrt{\frac{8\pi^3}{27}}$. |
| Mivel $\sqrt{\frac{6}{\pi}} > 1$, | 1 pont | *Ezzel ekvivalens* $2 > \frac{\pi}{3}$, *ami igaz.* |
| ezért a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka térfogatánál. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **9. a) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha a két test felszíne egyaránt $A$, akkor $V_{\text{kocka}}^2 = \frac{A^3}{6^3}$, | 2 pont | |
| $V_{\text{gömb}}^2 = \frac{A^3}{36\pi}$ | 2 pont | |
| Mivel $36\pi < 6^3$, | 1 pont | |
| ezért a gömb térfogata valóban nagyobb a kocka térfogatánál. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzések:*

*1. Ha a vizsgázó egy konkrét felszínű gömb és a vele megegyező felszínű kocka térfogatát hasonlítja össze, akkor ezért legfeljebb 2 pontot kaphat.*

*2. A vizsgázó teljes pontszámot kap, ha ismerteti a vonatkozó izoperimetrikus problémát vagy annak egy szűkített változatát (például: adott felszínű konvex testek között a gömb térfogata a legnagyobb), majd ennek speciális eseteként bizonyítottnak tekinti az állítást.*

| **9. b)** | | |
|---|---|---|
| Az összeolvasztással kapott kocka térfogata $p^3+q^3$, ezért élének hossza $\sqrt[3]{p^3+q^3}$, | 1 pont | |
| felszíne tehát $6\cdot\left(\sqrt[3]{p^3+q^3}\right)^2$, ami valóban $6\cdot\sqrt[3]{(p^3+q^3)^2}$ -nel egyenlő. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

| **9. c)** | | |
|---|---|---|
| A bizonyítandó állítás: $6\cdot\sqrt[3]{(p^3+q^3)^2}<6\cdot(p^2+q^2)$ | 1 pont | |
| Mindkét oldalt 6-tal osztva és köbre emelve (az $x^3$ függvény szigorú monotonitása miatt): $(p^3+q^3)^2<(p^2+q^2)^3$. | 1 pont | |
| Elvégezve a hatványozásokat: $p^6+2p^3q^3+q^6<p^6+3p^4q^2+3p^2q^4+q^6$. | 2 pont | |
| Rendezve és a pozitív $p^2q^2$ szorzattal osztva: $0<3p^2+3q^2-2pq$. | 1 pont* | |
| $0<2p^2+2q^2+(p-q)^2$, | 1 pont* | $0<3(p-q)^2+4pq$, |
| ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon két pozitív és egy nemnegatív szám összege áll). | 1 pont* | *ez pedig mindig igaz (hiszen a jobb oldalon egy nemnegatív és egy pozitív szám összege áll).* |
| Mivel minden átalakítás ekvivalens volt, ezért a bizonyítandó állítás is igaz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **8 pont** | |

*Megjegyzések:*
*1. Ha a vizsgázó egy konkrét (p; q) esetén ellenőrzi az állítás teljesülését, akkor ezért 1 pontot kaphat.*
*2. A *-gal jelölt 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

| | | |
|---|---|---|
| (Rendezve és a pozitív $p^3q^3$ szorzattal osztva:) $2<3\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)$ | 1 pont | |
| ez pedig mindig igaz (hiszen egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2). | 2 pont | |