ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2015. október 13.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

Figyelem! Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész 2015 májusában lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

I.

1. a)		
Óránként 4, egy nap alatt tehát $(24 \cdot 4 =)$ 96 alkalommal történik meg a 2%-os növekedés.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Az olajfolt területe 15 perc alatt 1,02-szorosára nő,	1 pont	
tehát egy nap múlva $400 \cdot 1{,}02^{96} \approx$	1 pont	
≈ 2677 m^2 lett.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
A naponta eltávolított olajfoltterületek (m^2-ben mérve) egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek első tagja 130, az első 31 tagjának összege pedig 12 400.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A napi növekedés legyen d (m^2). Ekkor $\frac{(260+30d)\cdot 31}{2}=12\,400$.	1 pont	
Ebből $d = 18$ (m^2).	1 pont	
A napi növekedés tehát 18 m^2 volt.	1 pont	
Ellenőrzés. (A 31. napon 670 m^2-rel csökkentették az olajfolt területét, tehát a 31 nap alatt $\frac{(130+670)\cdot 31}{2}=400\cdot 31=12\,400$ m^2-rel csökkent az olajfolt mérete, vagyis valóban megszűnt.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

2. a)		
Az eredeti papírlap rövidebb oldala legyen x hosszúságú, ekkor a hosszabb oldala $\sqrt{2}\,x$ hosszúságú.	1 pont	
A félbevágással kapott papírlap egyik oldalának hossza x, a másik oldalának hossza pedig $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ lesz.	1 pont	
(Mivel $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, ezért) $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ a rövidebb oldal hosszúsága.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A félbevágással kapott papír méretaránya $x:\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2}$, ez valóban megegyezik az eredetivel.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó konkrét és megfelelő oldalméretekkel számol, de nem említi, hogy ez nem megy az általánosság rovására, akkor ezért legfeljebb 2 pontot kaphat.

2. b) első megoldás		
(Ha a rövidebb oldal hossza x méter, akkor) a papír területe: $x\cdot\sqrt{2}x = 1$ (m²).	1 pont	
A papír rövidebb oldala $x=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\approx 0{,}841$ (m),	1 pont	$x=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
azaz 841 (mm),	1 pont	
hosszabb oldala $\sqrt{2}x\approx 1189$ (mm) hosszúságú.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b) második megoldás		
Az A0-s papírlap területe 1 000 000 mm².	1 pont	
(Ha a rövidebb oldal hossza x milliméter, akkor) a papír területe: $x\cdot\sqrt{2}x = 1\,000\,000$ (mm²).	1 pont	
A papír rövidebb oldala $x=\sqrt{\frac{1\,000\,000}{\sqrt{2}}}\approx 841$ (mm),	1 pont	
hosszabb oldala $\sqrt{2}x\approx 1189$ (mm) hosszúságú.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a b) kérdésre adott válaszában kerekítési hibát vét, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

2. c) első megoldás		
Egy A4-es lap az 1 m²-es A0-s lap négyszeri félbevágásával kapható (A0→A1→A2→A3→A4),	1 pont	
ezért az A4-es lap $\frac{1}{16}$ m² területű.	1 pont	
Egy darab A4-es lap $(80:16=)$ 5 g tömegű,	1 pont	
tehát 1 csomag tömege: $500\cdot 5+20=2520$ gramm,	1 pont	
azaz 2,52 kg.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. c) második megoldás		
Egy A4-es lap az 1 m²-es A0-s lap négyszeri félbevágásával kapható (A0→A1→A2→A3→A4),	1 pont	
tehát 16 darab A4-es lap együttes területe 1 m².	1 pont	
Az 500 darab A4-es lap területe összesen 31,25 m².	1 pont	
Ezért 1 csomag tömege $31{,}25\cdot 80+20=2520$ gramm,	1 pont	
azaz 2,52 kg.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a) első megoldás		
$x \geq 0$ (és $y \geq 0$)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
A második egyenletből $y = 2\sqrt{x}$-et behelyettesítve az első egyenletbe: $2x = 12 - 2\sqrt{x}$.	1 pont	
($\sqrt{x}$-re nézve másodfokú egyenletet kapunk.) $2x + 2\sqrt{x} - 12 = 0$	1 pont	
Az egyenlet gyökei: $(\sqrt{x})_1 = -3$ és $(\sqrt{x})_2 = 2$.	1 pont	
$\sqrt{x} = -3$ nem lehetséges.	1 pont	
Ha $\sqrt{x} = 2$, akkor $x = 4$, és így $y = 4$,	1 pont	
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a) második megoldás		
$x \geq 0$ (és $y \geq 0$)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
A két egyenlet összeadásával: $2x + 2\sqrt{x} = 12$.	1 pont	
$\sqrt{x} = 6 - x$, amiből (négyzetre emelés és rendezés után) $x^2 - 13x + 36 = 0$ adódik.	1 pont	
Az egyenlet gyökei: 4 és 9.	1 pont	
A 9 nem megoldása a $\sqrt{x} = 6 - x$ egyenletnek.	1 pont	
Tehát $x = 4$, és így $y = 4$.	1 pont	
Ellenőrzés mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a) harmadik megoldás		
$x \geq 0$ (és $y \geq 0$)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
A második egyenletből négyzetre emelés, majd 4-gyel való osztás után kapjuk: $x = \frac{y^2}{4}$.	1 pont	
Az első egyenletbe helyettesítve és rendezve: $y^2 + 2y - 24 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei: 4 és –6.	1 pont	

$y = -6$ esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek.	1 pont	*Ha* $y = -6$, *akkor* ($2\sqrt{x} = y$ *miatt*) $\sqrt{x} = -3$, *ami nem lehetséges.*
$y = 4$ és így $x = 4$ adódik egyetlen megoldásként.	1 pont	
Ellenőrzés mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) első megoldás		
Értelmezési tartomány: $x \neq -2$ és $y \neq 3$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
Az első egyenletből: $4x - 3y = 19$.	1 pont	
A második egyenletből: $x = 3y - 11$.	1 pont	
Behelyettesítve: $4(3y - 11) - 3y = 19$.	1 pont	*Az egyenlő együtthatók módszerével:* $3x = 30$.
$y = 7$	1 pont	$x = 10$
$x = 10$	1 pont	$y = 7$
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) második megoldás		
Értelmezési tartomány: $x \neq -2$ és $y \neq 3$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
A második egyenletből $\frac{x+2}{3} = y - 3$.	1 pont	
Behelyettesítve az első egyenletbe: $y - 3 - \frac{y-3}{4} = 3$.	1 pont	$4y - 12 - (y - 3) = 12$
$\frac{3}{4}(y-3) = 3$	1 pont	$3y - 9 = 12$
$y = 7$	1 pont	
$x = 10$	1 pont	
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) harmadik megoldás		
Értelmezési tartomány: $x \neq -2$ és $y \neq 3$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőriz.*
Vezessünk be új ismeretleneket: $a = \frac{x+2}{3}$, $b = \frac{y-3}{4}$, melyekkel az egyenletrendszer: $\begin{cases} a - b = 3 \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{4b} = 0 \end{cases}$ (és a feltételek miatt $a \neq 0$ és $b \neq 0$ is teljesül).	1 pont	
A második egyenletből $a = 4b$.	1 pont	
Ezt az első egyenletbe írva kapjuk: $b = 1$.	1 pont	
Ebből $y = 7$,	1 pont	
majd ($a = 4$ miatt) $x = 10$ adódik.	1 pont	
Ellenőrzés (például mindkét egyenletbe történő behelyettesítéssel).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a)		
Az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola a (–2; 0), illetve a (2; 0) pontban metszi az abszcisszatengelyt (és az emblémát határoló parabolaív az x tengely fölött van).	1 pont	
A parabolaszelet területe: $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx =$	1 pont	$2 \cdot \int_{0}^{2} (4 - x^2)dx =$
$= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} =$	1 pont*	$= 2 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{2} =$
$\left(= 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right) = \frac{32}{3}$.	1 pont	$\left(= 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} - 0 \right) \right) = \frac{32}{3}$
A kör egyenletét átalakítva: $x^2 + (y - 1{,}3)^2 = 1{,}3^2$,	1 pont	
ebből a kör sugara 1,3, területe pedig $1{,}69\pi$ ($\approx 5{,}31$).	1 pont	
A kör és a parabolaszelet területének aránya: $1{,}69\pi : \frac{32}{3}$ ($\approx 0{,}4977$).	1 pont	*Kerekített értékekkel:* 5,31 : 10,67 (≈ 0,4977)
A kör területe (a kért kerekítéssel) a parabolaszelet területének 50%-a.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen	**8 pont**	

**Megjegyzés: Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a határozott integrál értékét számológéppel számítja ki.*

4. b) első megoldás		
A lejátszott mérkőzések száma $\binom{18}{2}=153$,	1 pont	
tehát a Zöld Iskola teniszezőinek összesen $\frac{1}{3}\cdot 153=$ $= 51$ megnyert mérkőzése volt.	2 pont	
Ennek a 8 tanulónak az egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ez $\binom{8}{2}$ (= 28) győzelmet jelent.	1 pont	
A Zöld Iskola tanulói az 51 győztes mérkőzésük közül tehát (51 – 28 =) 23-at nyertek a Piros Iskola tanulói ellen.	1 pont	
Összesen	**6 pont**	

4. b) második megoldás		
A lejátszott mérkőzések száma $\binom{18}{2}=153$.	1 pont	
A Zöld Iskola 8 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 8 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek,	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ez $\binom{8}{2}$ (= 28) győzelmet jelent.	1 pont*	
Ha a Zöld Iskola tanulói x mérkőzést nyertek a Piros Iskola tanulói ellen, akkor megnyert mérkőzéseik száma összesen $x + 28$, a Piros Iskola tanulói által nyert mérkőzések száma pedig $(153 - (x + 28) =)\ 125 - x$.	1 pont*	
A szöveg szerint $125 - x = 2(x + 28)$, amiből $x = 23$.	1 pont	
A Zöld Iskola tanulói 23 mérkőzést nyertek a Piros Iskola tanulói ellen.	1 pont	
Összesen	**6 pont**	

*A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

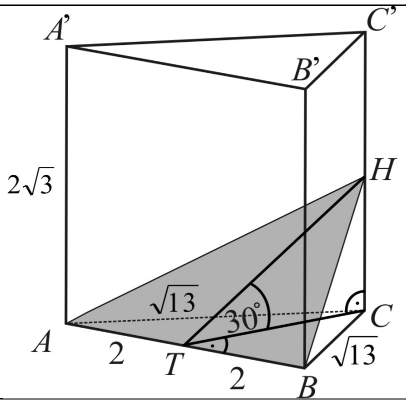
A Piros Iskola 10 tanulójának egymás közötti mérkőzései mindig a 10 tanuló valamelyikének győzelmével végződtek,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ez $\binom{10}{2}$ (= 45) győzelmet jelent.	1 pont	
A két iskola tanulói egymás ellen $(8\cdot 10 =)$ 80 mérkőzést játszottak. Ha ebből a Zöld Iskola tanulói x mérkőzést nyertek, akkor megnyert mérkőzéseik száma összesen $x + 28$, a Piros Iskola tanulói által nyert mérkőzések száma pedig $45 + (80 - x) = 125 - x$.	1 pont	

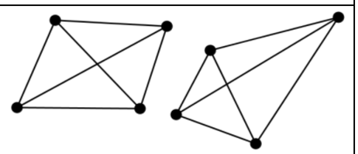
II.

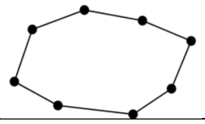
5. a) **első megoldás**		
A *B* futószalagra került darabok tömege 49 g, 48 g, 53 g és 54 g.	1 pont	
A 4-4 tömeg átlaga: $\frac{51+52+47+46}{4}=\frac{196}{4}=49$ (g), illetve $\frac{49+48+53+54}{4}=\frac{204}{4}=51$ (g).	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az átlagot és a szórást (vagy annak közelítő értékét) számológéppel helyesen határozza meg.*
A 4-4 tömeg szórása: $\sqrt{\frac{(49-51)^2+(49-52)^2+(49-47)^2+(49-46)^2}{4}}=$ $=\sqrt{6{,}5}$ (g), illetve $\sqrt{\frac{(51-49)^2+(51-48)^2+(51-53)^2+(51-54)^2}{4}}=$ $=\sqrt{6{,}5}$ (g).	2 pont	
A két átlag tehát valóban különböző, a két szórás pedig egyenlő.	1 pont	*Ha a szórások pontos értéke nem szerepel, akkor ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a szórásnégyzetek egyenlőségét látja be, de nem említi, hogy ekkor a szórások is megegyeznek, akkor ezért 1 pontot veszítsen.

5. a) **második megoldás**		
A *B* futószalagra került darabok tömege 49 g, 48 g, 53 g és 54 g.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Az *A* futószalagra került darabok tömege csökkenő sorrendben 52 g, 51 g, 47 g és 46 g, a *B* futószalagra került darabok tömege pedig 54 g, 53 g, 49 g, 48 g, tehát) a *B* futószalagra került darabok tömege rendre 2 grammal nagyobb, mint a megfelelő, *A* futószalagra került darabé.	1 pont	
Ha egy adatsokaság minden adatához c-t hozzáadunk, akkor a sokaság átlaga c-vel változik, a szórása pedig változatlan marad.	2 pont	
Tehát a két futószalagra került darabok tömegének átlaga különböző (a különbség $c = 2$ gramm), szórása pedig egyenlő.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

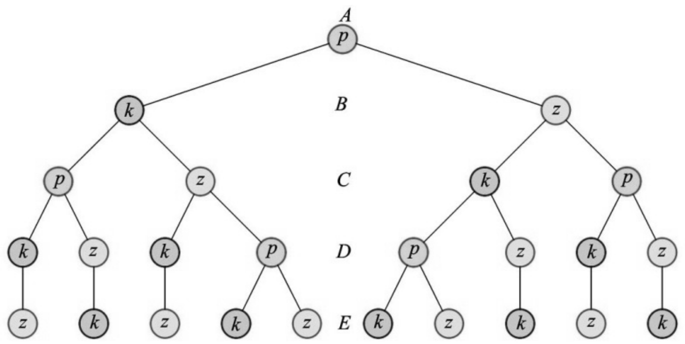
5. b)		
	1 pont	*Ez a pont jár, ha a vizsgázó ábra nélkül vagy kevésbé részletezett ábrával helyesen számol.*
A 30°-os szög helyes értelmezése (például a szög jelölése az ábrán).	1 pont	
Az ABC egyenlőszárú háromszög AB oldalához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel): $TC = 3$.	1 pont	
Az S sík a CC' élt a H pontban metszi. A TCH derékszögű háromszögből: $\text{tg}\,30^\circ = \dfrac{CH}{TC}$,	1 pont	
ahonnan $CH = (TC \cdot \text{tg}\,30^\circ =)\ 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.	1 pont	
Az ABC lapot tartalmazó rész egy tetraéder, melynek ABC lapjához tartozó magassága CH.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
($T_{ABC} = 6$, ezért) $V_{ABCH} = \dfrac{T_{ABC} \cdot CH}{3} = 2\sqrt{3}$ $(\approx 3{,}46)$.	1 pont	
A másik rész térfogatát megkapjuk, ha az első rész térfogatát levonjuk az eredeti hasáb térfogatából.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$V_{ABCA'B'C'} = T_{ABC} \cdot CC' = 12\sqrt{3}$ $(\approx 20{,}78)$	1 pont	
$V_{ABHA'B'C'} = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ $(\approx 17{,}32)$	1 pont	
$\dfrac{V_{ABCH}}{V_{ABHA'B'C'}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \dfrac{1}{5}$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az arányt közelítő értékekkel írja fel helyesen.*
Összesen:	**11 pont**	

6. a)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Ellenpélda: a nyolcpontú egyszerű gráf két négypontú teljes gráf egyesítése.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. b)		
A megfordítás: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf összefüggő, akkor a gráf minden pontjának fokszáma legalább 3.	1 pont	
A megfordított állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen jó ellenpélda.	1 pont	*Például:* 
Összesen:	**3 pont**	

6. c) első megoldás		
Rögzítsük A és B színét, például pirosra és kékre.	1 pont	
Ekkor C, D és E (ebben a sorrendben) a következőképpen színezhető: pkz, pzk, zpz, zpk, zkz.	2 pont*	
Mivel A és B színe $(3 \cdot 2 =)$ 6-féleképpen választható meg,	1 pont	
ezért összesen $(5 \cdot 6 =)$ 30 különböző színezés lehetséges.	1 pont	
Összesen	**5 pont**	

*Megjegyzés: Hibának számít, ha a felsorolt esetek között rossz is szerepel, egy lehetséges esetet többször felsorol vagy egy lehetséges esetet nem ad meg a vizsgázó. Egy hiba esetén a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot veszítsen, egynél több hiba esetén nem jár pont erre a részre.*

6. c) második megoldás		
 Az A csúcsot pirosnak választva a B csúcsig 2,	1 pont	
a C-ig 4, a D-ig 8-féle színezés lehetséges.	2 pont	
Az E csúcsnál csak akkor van két színezési lehetőség, ha a D csúcs piros volt, így az E-ig 10-féle színezés van.	1 pont	
Az A csúcs színe háromféleképpen választható meg, tehát az ötszögnek $(3 \cdot 10 =)$ 30 megfelelő színezése van.	1 pont	
Összesen	**5 pont**	

6. c) harmadik megoldás		
Színezzük az A csúcsot például pirosra és a vele szomszédos B és E csúcsot például kékre. Ekkor a C és D színezése piros-zöld vagy zöld-piros lehet. Tehát 2 ilyen színezés van.	1 pont	
Ha tehát olyan színezést választunk, amelyben az A-val szomszédos B és E csúcsok színe azonos, akkor ennek a három csúcsnak a színezését $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen választhatjuk meg. Ezért ilyen színezésből $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ darab van.	1 pont	
Ha az A csúcs például piros, a B és az E pedig különböző színűek, például a B csúcs kék, és az E csúcs zöld, akkor a C és a D színe (ebben a sorrendben) lehet piros-kék, zöld-kék vagy zöld-piros. Vagyis 3 lehetőség van a színezésre.	1 pont	
Az A, B, E csúcsok színezését 3 különböző színnel $3! = 6$ különböző módon választhatjuk meg, tehát ilyen színezésből $6 \cdot 3 = 18$ darab van.	1 pont	
A lehetséges színezések száma tehát $12 + 18 = 30$.	1 pont	
Összesen	**5 pont**	

6. c) negyedik megoldás		
Egy adott színt legfeljebb kétszer használhatunk színezésre (mert nem tudunk az öt csúcsból három, páronként nem szomszédos csúcsot kiválasztani).	1 pont	
Az öt csúcs színezésére tehát mindhárom színt fel kell használnunk: így biztosan (lesz 2 olyan szín, amivel éppen 2 csúcsot és) lesz 1 olyan szín, amivel 1 csúcsot színezünk, tehát ennek a csúcsnak *egyedi színe* lesz.	1 pont	
Az *egyedi szín* 3-féle lehet, és az 5 csúcs bármelyike lehet *egyedi színű*, tehát 15 választási lehetőség van az *egyedi színnel* színezésre.	1 pont	
Ha az *egyedi színt* rögzítettük (például az A csúcs piros), akkor a másik két színt csak felváltva használhatjuk, de kétféle sorrendben (B kék, C zöld, D kék, E zöld, vagy fordítva: B zöld, C kék, D zöld, E kék).	1 pont	
Összesen $(15 \cdot 2 =)$ 30 lehetőség van.	1 pont	
Összesen	**5 pont**	

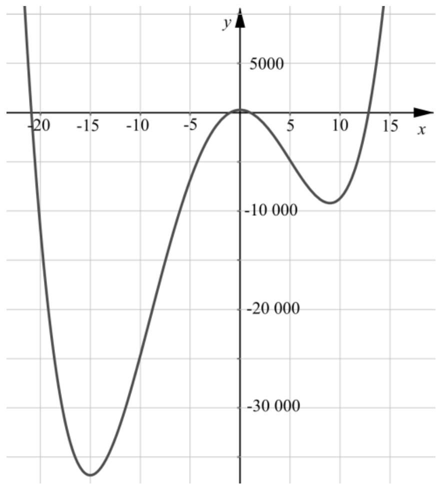
Megjegyzés: A vizsgázó teljes pontszámot kap, ha a 30 lehetséges színezést hibátlanul megadja (például felsorolja). Hibának számít, ha a felsorolt színezések között rossz is szerepel, egy lehetséges színezést többször ad meg, vagy egy lehetséges színezést kihagy a vizsgázó: minden hibáért 1 pontot veszítsen.

6. d)		
Egy négypontú teljes gráfnak $\binom{4}{2}=6$ éle van.	1 pont	
Ezek közül 4 élt $\binom{6}{4}$ = 15-féleképpen lehet kiválasztani. (Ez az összes esetek száma.)	1 pont	
Ha a zöld élek kört alkotnak, akkor a 2 nem zöld él a gráf két-két különböző pontját köti össze.	1 pont	*Ha a gráf csúcsai A, B, C és D, akkor a kör csúcsai egy körüljárás szerint ABCDA, ABDCA, ACBDA lehetnek. A kedvező esetek száma tehát 3.*
A két nem zöld él kiválasztása 3-féleképpen történhet; ez a kedvező esetek száma. (Ha a gráf csúcsai *A*, *B*, *C*, *D*, akkor a megfelelő kiválasztások: *AB*-*CD*, *AC*-*BD*, *AD*-*BC*.)	1 pont	
A keresett valószínűség: $p=\frac{3}{15}=0{,}2$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a)		
(Az *f* egy nyílt intervallumon deriválható függvény, ezért) az *f* függvénynek ott lehet szélsőérték-helye, ahol az első deriváltfüggvényének zérushelye van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x)=4x^3+24x^2-540x$	1 pont	
(Mivel $4x^3+24x^2-540x=x(4x^2+24x-540)$, ezért) az f' egyik zérushelye a 0,	1 pont	
további két zérushelyét a $4x^2+24x-540=0$ egyenlet gyökei adják: 9 és –15.	1 pont	
A (harmadfokú) deriváltfüggvény –15-ben és 9-ben negatívból pozitívba megy át, ezért ezek lokális minimumhelyei, 0-ban pedig pozitívból negatívba megy át, ezért ez lokális maximumhelye a függvénynek.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a második derivált előjelével indokol.*
Mivel $f(-15)=-36\,850<f(9)=-9202$,	1 pont	
továbbá a $]-\infty; -15[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $]9; +\infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton növekedő az *f* függvény, ezért a –15 valóban abszolút minimumhelye *f*-nek.	2 pont	*Ez a 2 pont jár annak bármilyen helyes indoklásáért, hogy a két lokális minimumhely egyike egyben abszolút minimumhely is.*
Összesen:	**9 pont**	

7. b)		
$f''(x) = 12x^2 + 48x - 540$ $(x \in \mathbf{R})$	1 pont	
Az $f''(x) = 0$ egyenletnek két gyöke van: –9 és 5.	1 pont	
Az f'' grafikonja egy „felfelé nyíló parabola”, ezért a két zérushely között az f'' negatív.	1 pont	
Mivel az f'' függvény a]–9; 5[intervallumon negatív, ezért az *f* függvény itt konkáv.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Az f grafikonjának egy részletét mutatja az ábra.



7. c)		
$\int_0^5 f(x)dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2x^4 - 90x^3 + 275x\right]_0^5 =$	1 pont	
= (625 + 1250 – 11 250 + 1375) – 0 =	1 pont	
= –8000	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: A végeredmény indoklás nélküli közléséért nem jár pont.

8. a) első megoldás		
P(legalább 3 találat) = = 1 – [*P*(0 találat) + *P*(1 találat) + *P*(2 találat)]	1 pont	
P(0 találat) = $0{,}75^8$ (≈ 0,1001) *P*(1 találat) = $\binom{8}{1} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^7$ (≈ 0,2670) *P*(2 találat) = $\binom{8}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^6$ (≈ 0,3115)	3 pont	
P(legalább 3 találat) ≈ 0,321.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

8. a) második megoldás		
$P(3\text{ találat}) = \binom{8}{3}\cdot 0{,}25^3\cdot 0{,}75^5 \approx 0{,}2076$	2 pont	
$P(4$ találat$) \approx 0{,}0865$, $P(5$ találat$) \approx 0{,}0231$, $P(6$ találat$) \approx 0{,}0038$, $P(7$ találat$) \approx 0{,}0004$, $P(8$ találat$) \approx 0{,}0000$	2 pont	*Ha a vizsgázó egy hibát vét, akkor 1 pontot veszítsen, több hiba esetén erre a részre nem kap pontot.*
A legalább 3 találat valószínűsége a fenti számok összege (0,3214, ami három tizedesjegyre kerekítve): 0,321.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

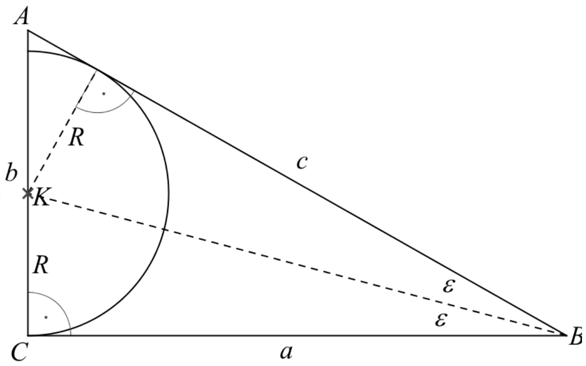
Megjegyzés: Ha a vizsgázó az a) feladat megoldása során az egyes valószínűségek három tizedesjegyre kerekített értékével jól számol, akkor 0,322 is elfogadható.

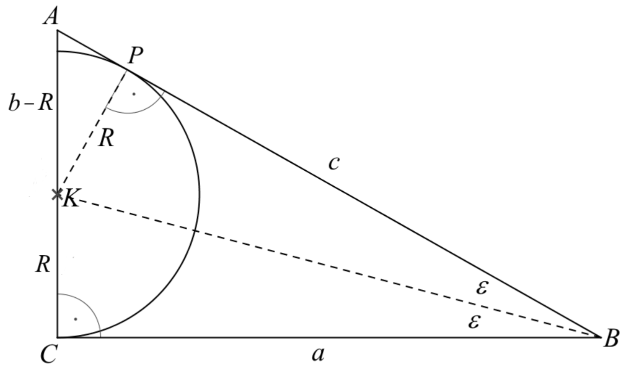
8. b)		
P(legalább 1 találat) = 1 – P(0 találat)	1 pont	
$1 - 0{,}75^n \geq 0{,}95$	1 pont	
rendezve $0{,}75^n \leq 0{,}05$.	1 pont	
$n\cdot \lg 0{,}75 \leq \lg 0{,}05$	1 pont	*A* 0,75 *alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért* $n \geq \log_{0{,}75} 0{,}05$.
(Mivel lg 0,75 < 0, így) $n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75} \approx 10{,}41$.	1 pont	
Daninak legalább 11 lövésre van szüksége.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

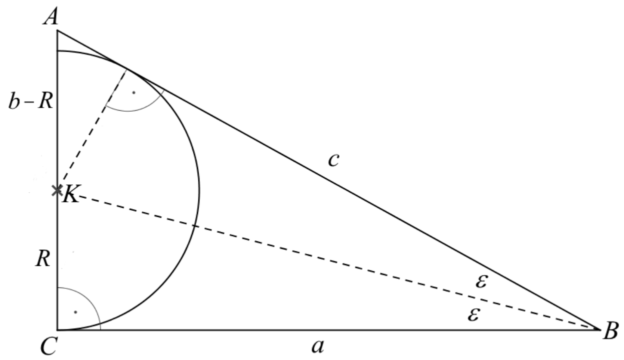
Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel dolgozik, s azt jól megoldva helyes következtetésre jut, akkor maximális pontszámot kap.

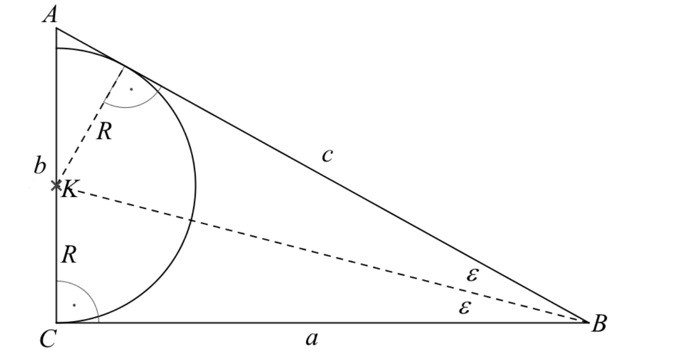
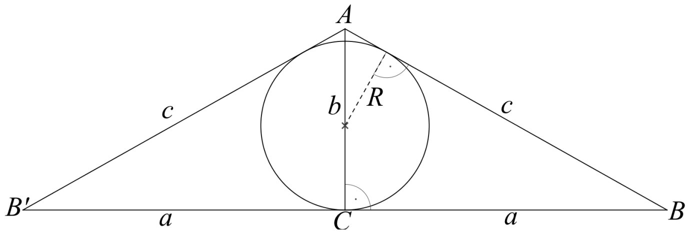
8. c)		
(Ha a második félév végén Dani egy lövésből p valószínűséggel ért el találatot, akkor három lövésből a pontosan egy vagy pontosan két találat valószínűsége) P(1 találat) + P(2 találat) = $3p^2(1-p)+3p(1-p)^2 =$	1 pont	*Komplementer eseménnyel számolva a keresett valószínűség:* *1 – P(3 találat) – P(0 találat) =* $1 - p^3 - (1-p)^3$
$= 3p(1-p) = 0{,}72$.	1 pont	$1 - p^3 - 1 + 3p - 3p^2 + p^3 = 0{,}72$
$0 = 3p^2 - 3p + 0{,}72$	1 pont	
Ebből $p = 0{,}4$ vagy $p = 0{,}6$.	1 pont	
A második félév végén tehát egy lövésből Dani 0,4 vagy 0,6 valószínűséggel (azaz $\frac{8}{20}$ vagy $\frac{12}{20}$ esélylyel) ért el találatot.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

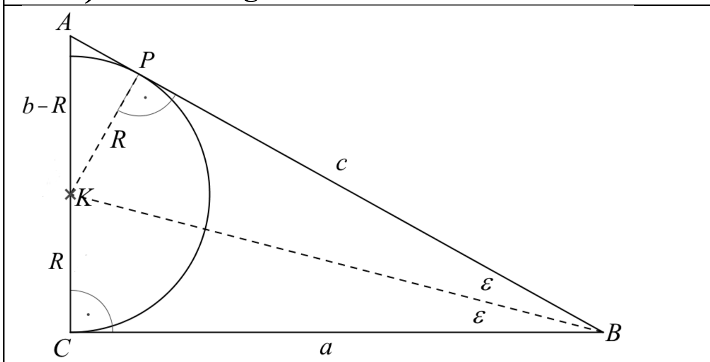
9. a)		
Azt állítjuk, hogy $\frac{ab}{a+c}=\frac{ac-a^2}{b}$ igaz (a, b, $c>0$).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mindkét oldalt a-val osztva, majd $b(c+a)$-val szorozva: $b^2=(c-a)(c+a)$.	1 pont	
Átalakítva: $a^2+b^2=c^2$, ami a Pitagorasz-tétel miatt minden derékszögű háromszögre igaz.	1 pont	
Az alkalmazott átalakítások ekvivalensek voltak,	1 pont	
ezért az eredeti $\frac{ab}{a+c}=\frac{ac-a^2}{b}$ állítás is igaz (tehát $R_A=R_P$).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) első megoldás		
	1 pont	
A derékszögű háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk: $T=\frac{ab}{2}$, illetve $T=T_{KCB\Delta}+T_{KAB\Delta}=\frac{aR}{2}+\frac{cR}{2}$.	1 pont	
Tehát $ab=aR+cR$,	1 pont	
vagyis $R=\frac{ab}{a+c}$. (Ezt kellett bizonyítani.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) második megoldás		
	1 pont	
Ha P-vel jelöljük az átfogón a félkör érintési pontját, akkor a szögek egyenlősége miatt $ABC\Delta \sim AKP\Delta$.	1 pont	
Tehát (a megfelelő oldalak arányának egyenlősége miatt) $\frac{b-R}{R}=\frac{c}{a}$.	1 pont	
Ebből $R(a + c) = ab$, ami ekvivalens az állítással. (Ezt kellett bizonyítani.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

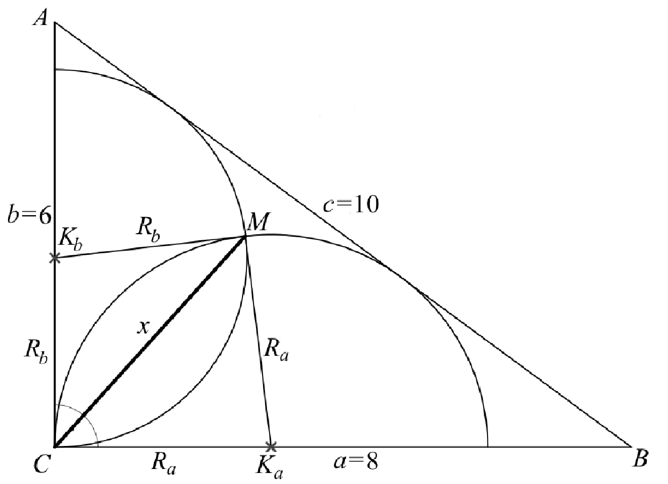
9. b) harmadik megoldás		
	1 pont	
A félkör K középpontját a B csúcshoz tartozó belső szögfelező félegyenes metszi ki a b befogóból.	1 pont	
A szögfelező tétel szerint $\frac{b-R}{R}=\frac{c}{a}$.	1 pont	
Átalakítva: $R(a + c) = ab$, ami ekvivalens az eredeti állítással. (Ezt kellett bizonyítanunk.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) **negyedik megoldás**		
	1 pont	
Tükrözzük az *ABC* derékszögű háromszöget a *b* befogó egyenesére! Az *R* sugarú kör a *BAB′* háromszög beírt köre. 	1 pont	
A *BAB′* háromszög területe egyrészt *ab*, másrészt (a $T = Rs$ képletből) $R(a + c)$.	1 pont	
Tehát $R(a + c) = ab$, ami ekvivalens az eredeti állítással. (Ezt kellett bizonyítanunk.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

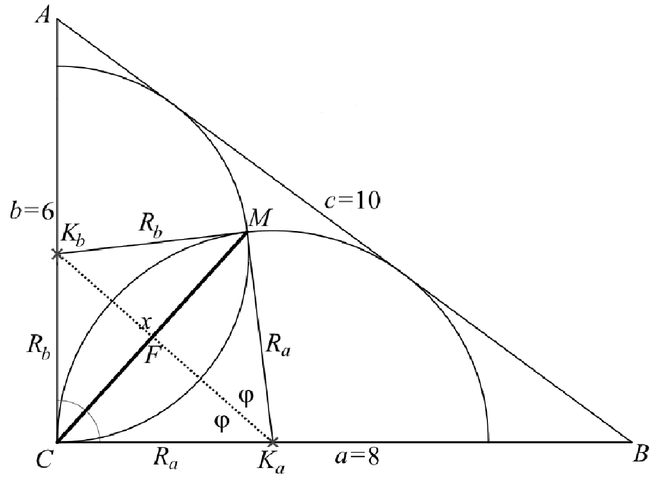
9. b) **ötödik megoldás**		
	1 pont	
Ha *P*-vel jelöljük az átfogón a félkör érintési pontját, akkor a szögek egyenlősége miatt $ABC\Delta \sim AKP\Delta$.	1 pont	
Az *AP* szakasz hossza $c - a$, így igaz a következő egyenlőség: $\frac{c-a}{R} = \frac{b}{a}$.	1 pont*	
Ebből $R = \frac{ac - a^2}{b}$, tehát igaz Petra képlete, de ekkor (az a) feladat szerint) Andrea képlete is. (Ezt kellett bizonyítanunk.)	1 pont*	
Összesen:	**4 pont**	

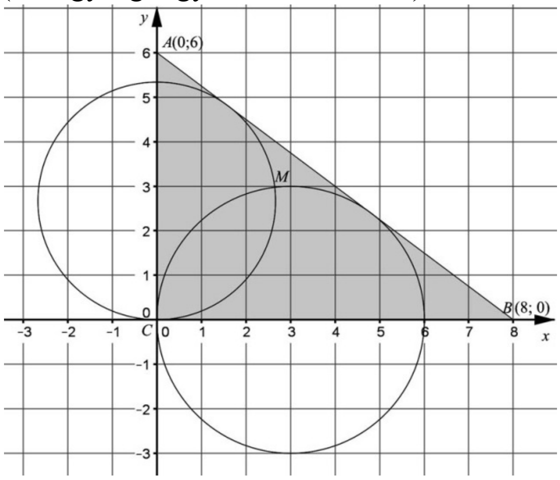
*A *-gal jelzett 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

Az *AKP* derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva: $R^2+(c-a)^2=(b-R)^2$.	1 pont	
Ebből rendezés, majd 2*b*-vel való osztás után $R=\frac{ac-a^2}{b}$ adódik, tehát igaz Petra képlete, de ekkor (az a) feladat szerint) Andrea képlete is. (Ezt kellett bizonyítanunk.)	1 pont	

9. c) első megoldás		
(Az ábra jelöléseit használjuk.)  A CK_aMK_b négyszög egy (derékszögű) deltoid.	1 pont	
A deltoid két oldalának hossza: $R_b=\frac{ab}{a+c}=\frac{48}{18}=\frac{8}{3}$ (cm),	1 pont	
másik két oldalának hossza: $R_a=\frac{ab}{b+c}=\frac{48}{16}=3$ (cm).	1 pont	
A derékszögű deltoid területe: $R_a\cdot R_b=8$ (cm^2).	1 pont*	
Ezt a területet kiszámíthatjuk az átlók segítségével is: $\frac{x\cdot K_aK_b}{2}=8$.	1 pont*	
A K_aCK_b derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $K_aK_b\left(=\sqrt{3^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{145}}{3}\right)\approx 4{,}01$ (cm).	1 pont*	
A *CM* távolság: $x=\frac{16}{K_aK_b}\left(=\frac{48}{\sqrt{145}}\right)\approx 3{,}99$ (cm).	1 pont*	
Összesen:	**7 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A K_aK_b átló a deltoid szögfelezője (mert szimmetria-átló), amely az F pontban merőlegesen felezi a CM szakaszt. 	1 pont	*A pont az ábra megrajzolása nélkül is jár.*
Legyen $\varphi = \frac{MK_aC\sphericalangle}{2}$. Például a K_aCK_b derékszögű háromszögből szögfüggvénnyel: $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{R_b}{R_a} = \frac{8}{9}$, amiből $\varphi \approx 41{,}63°$	1 pont	
A CFK_a derékszögű háromszögben $CF = \frac{x}{2} = R_a \cdot \sin\varphi \approx 3 \cdot \sin 41{,}63°$.	1 pont	
Tehát a CM távolság: $x \approx 6 \cdot \sin 41{,}63° \approx 3{,}99$ (cm).	1 pont	

9. c) második megoldás		
Helyezzük el a derékszögű háromszöget és a két kört az ábra szerint derékszögű koordináta-rendszerben. (Az egység legyen 1 cm hosszú.) 	1 pont	
A két kör sugara: $R_a = \frac{ab}{b+c} = \frac{48}{16} = 3$,	1 pont	
$R_b = \frac{ab}{a+c} = \frac{48}{18} = \frac{8}{3}$.	1 pont	
A körök egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x = 0$, illetve $x^2 + y^2 - \frac{16}{3}y = 0$.	1 pont	
A két kör egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása megadja az M pontot: $M\left(\frac{384}{145}; \frac{432}{145}\right)$.	2 pont	*Két tizedesjegyre kerekítve:* $M(2,65; 2,98)$.
A CM távolság: $\left(\sqrt{\frac{384^2 + 432^2}{145^2}} = \frac{48}{\sqrt{145}}\right) \approx 3,99$ (cm).	1 pont	*A CM távolság:* $(\sqrt{2,65^2 + 2,98^2} \approx)$ $\approx 3,99$ (cm).
Összesen:	**7 pont**	