Azonosító jel: | | | | | | | | | | | | | | |

ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2016. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2016. május 3. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{2x+11}{3} = \sqrt{x^2+6x+9}$

b) $\log_2(x+1) + \log_2(x-3) - \log_2(x+9) = 1$

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

2. Egy 28 fős osztályban minden tanulónak van év végi osztályzata fizikából és matematikából is. 23 tanuló nem kapott jelest fizikából, és 21 tanuló nem kapott jelest matematikából, de a két tárgy közül legalább az egyikből 10-en kaptak jelest.

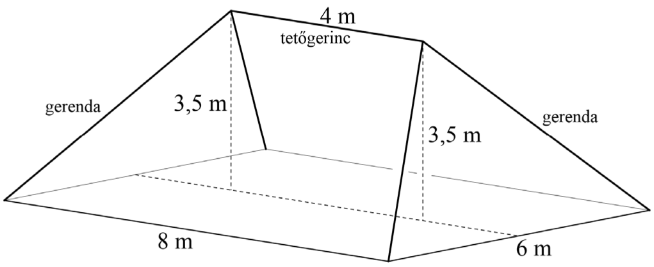
a) Hány tanulónak van jelese mindkét tárgyból?

Az A és B halmazokról tudjuk, hogy az $A \setminus B$, az $A \cap B$, az A és a B halmaz elemszáma (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat első négy tagja. Az A halmaz elemszámának és a B halmaz elemszámának összege 28.

b) Határozza meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját!

a)	4 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	11 pont	

3. Egy 6 méter széles és 8 méter hosszú, téglalap alaprajzú épületre „sátortetőt” építettek. A tető 4 méter hosszú gerince a mennyezet téglalapjának hosszabbik középvonala fölött, attól 3,5 méter távolságra van. A mennyezet téglalapjának négy csúcsában támaszkodó, négy egyenlő hosszúságú gerenda tartja a tetőgerincet.



a) Számítsa ki a tartógerendák hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket!

A tető déli irányba néző, trapéz alakú részére egy téglalap alakú napelemet fektetnek. A téglalap egyik oldala a tető alsó élére, az ezzel szemközti oldala pedig a trapéz középvonalára illeszkedik. A napelem sehol sem nyúlik túl a tetőn.

b) Mekkora a legnagyobb területű napelem, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn?
Válaszát négyzetméterben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

a)	7 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Egy város kézilabdacsapatának vezetői a bajnoki mérkőzések jegybevételét szeretnék növelni. A korábbi évek adatai azt mutatják, hogy 1500 Ft-os jegyár esetén átlagosan 1000-en vásárolnak jegyet. Az adatokból az is kiderül, hogy ahányszor 5 Ft-tal csökkentik a jegy árát, átlagosan annyiszor 10 fővel többen váltanak jegyet az adott mérkőzésre; ha a jegyárat növelik, akkor pedig ahányszor 5 Ft-tal nő a jegy ára, átlagosan annyiszor 10 fővel csökken a jegyet vásárló nézők száma. (A jegy ára forintban kifejezve 0-ra vagy 5-re végződhet.)

a) Mutassa meg, hogy ha a jelenlegi jegyár 1500 forint, akkor a fenti modell szerint a jegyárak bármilyen összegű növelése esetén csökkenni fog az összbevétel!

b) A modell szerint mekkora lehet a jegyárakból származó legnagyobb bevétel egy mérkőzésen, és mennyit kell fizetni ebben az esetben egy jegyért?

a)	6 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy üzemben két automata gépsoron egyforma ingeket gyártanak. Az első gépsoron gyártott 4000 ingnek a 2%-a, a második gépsoron készült 5000 ingnek pedig a 3,4%-a anyaghibás.
Az elkészült ingek ugyanabba a raktárba kerültek és összekeveredtek. A 9000 ing közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt anyaghibásnak találjuk.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás inget a második gépsoron gyártották?

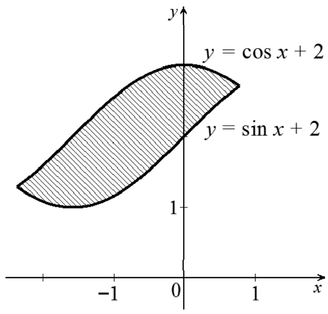
A Kis Áruházban egy anyaghibás ing árából először 500 Ft árengedményt adtak, majd nemsokára az új árat tovább csökkentették annak p%-ával. Így az ing 50 Ft-tal drágább lett, mint ha először engedték volna le az árát p%-kal és utána 500 Ft-tal, viszont 90 Ft-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer p%-kal csökkentették volna az árát.

b) Határozza meg p értékét, valamint az ing eredeti árát!

a)	5 pont	
b)	11 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. **a)** Számítsa ki az ábrán látható, két görbe vonal által közrefogott síkidom területét! (Az egyik határoló vonal az $y = \sin x + 2$, a másik pedig az $y = \cos x + 2$ egyenletű görbének egy része.)



b) Igazolja, hogy ha $a_n = \dfrac{11n-5}{3n-8}$, akkor az $\{a_n\}$ sorozat nem monoton, de korlátos! ($n \in \mathbf{N}^+$)

a)	8 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

7. **a)** Határozza meg, hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amelynek számjegyei között nem szerepel a 0, de szerepel legalább egyszer az 1.

Egy pozitív egész számokból álló adatsokaság módusza 32, átlaga 22, a legkisebb adat a 10. Az m medián eleme a sokaságnak és gyakorisága 1.
Ha az m-et $(m + 10)$-re cserélnénk, akkor az így kapott új sokaság átlaga 24 lenne. Ha az eredeti sokaságban az m számot $(m - 5)$-re cserélnénk, akkor az így kapott sokaság mediánja $m - 4$ lenne.

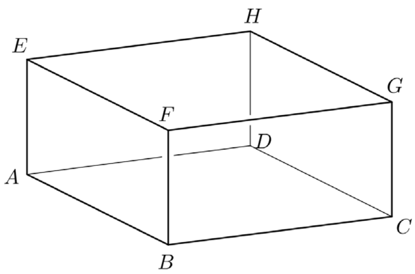
b) Igazolja, hogy az adatsokaságnak öt eleme van!

c) Határozza meg az eredeti adatsokaság elemeit!

a)	6 pont	
b)	2 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Az *ABCDEFGH* téglatest *ABCD* lapjára merőleges élei *AE*, *BF*, *CG* és *DH*. A téglatest három élének hossza: $AB = 12$ cm, $AD = 16$ cm és $AE = 5$ cm.



a) Számítsa ki az *ACFH* tetraéder térfogatát!

b) Igazolja, hogy az *ACFH* tetraéder oldallapjai egybevágó háromszögek!

c) Igazolja, hogy az *ACFH* tetraéder oldallapjai hegyesszögű háromszögek!

A *PQRS* tetraéder *QP* élének hossza 10 cm, *PS* éle 15 cm, *SR* éle pedig 40 cm hosszú. A másik három él hossza 20 cm, 25 cm és 30 cm.

d) Hány különböző tetraéder felel meg a feltételeknek? (Az egybevágó tetraédereket nem tekintjük különbözőknek.)

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy társasjátékban egy hosszú egyenes pályán haladunk a bábunkkal. A Start mezőről indulunk; a szabályos dobókockával dobott pontszámunknak megfelelően léphetünk 1-et, 2-t, 3-at, 4-et, 5-öt vagy 6-ot. Ha a játék során bármikor a 4-es mezőre érkezünk, vissza kell állnunk a Start mezőre, és újra kell kezdenünk a játékot. Ebben a társasjátékban csak a 4-es mezőre érkezés miatt lehet a pályán „visszafelé” haladni.

Start	1	2	3	**4**	5	6	7	…

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egyszer a 4-es mezőre érkezünk?

András eddig háromszor dobott, és a negyedik dobása előtt éppen a Start mezőn áll.

b) Hányféle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat?

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td></td><td>a feladat sorszáma</td><td>maximális pontszám</td><td>elért pontszám</td><td>maximális pontszám</td><td>elért pontszám</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>13</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum

javító tanár

<table>
<tr><td></td><td>elért pontszám egész számra kerekítve</td><td>programba beírt egész pontszám</td></tr>
<tr><td>I. rész</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II. rész</td><td></td><td></td></tr>
</table>

javító tanár

jegyző

dátum

dátum