

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel és/vagy hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. b) harmadik megoldás		
András első dobása 4, 3, 2 vagy 1 lehetett.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha az első dobása 4 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok (a további dobások nagysága szerint rendezve) 4-4-4, 4-3-1, 4-2-2, 4-1-3. Ez 4 lehetőség.	2 pont	
Ha az első dobása 3 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok csak 3-1-4 lehetett. Ez 1 lehetőség.	1 pont	
Ha az első dobása 2 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok 2-2-4, 2-1-1. Ez 2 lehetőség.	1 pont	
Ha az első dobása 1 volt, akkor a lehetséges dobássorozatok 1-3-4, 1-2-1, 1-1-2. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Azaz összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés:

I) Ha a vizsgázó indoklás nélkül, de logikus sorrendben (felismerhető rendszerben), hiánytalanul és hibátlanul felsorolva adja meg a 10 lehetséges dobássorozatot, akkor ezért 6 pontot kapjon.

II) Ha a vizsgázó indoklás és azonosítható logika nélkül (rendszeretlenül), de hiánytalanul és hibátlanul felsorolva adja meg a 10 lehetséges dobássorozatot, akkor ezért legfeljebb 4 pontot kapjon (mert nem derül ki a leírásból, hogy több lehetőség nincs).

Ha a vizsgázó indoklás nélküli felsorolással ad meg lehetséges dobássorozatot, de hibát vét (kihagy dobássorozatot, rosszul vagy duplán ad meg dobássorozatot), akkor az alábbi táblázat szerint kapjon pontot.

hibák száma	pontszám az I. esetben	pontszám a II. esetben
1	5	3
2	4	2
3	3	1
4	2	0
5	1	0
6 vagy több	0	0

- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
- A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
- Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százaléokban megadott helyes válasz is elfogadható.
- Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
- A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

Figyelem! Az útmutató elején olvasható **Fontos tudnivalók** című rész lényegesen megváltozott. Kérjük, hogy a javítás megkezdése előtt figyelmesen tanulmányozza!

I.

1. a) első megoldás		
Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve: $\frac{4x^2 + 44x + 121}{9} = x^2 + 6x + 9.$	2 pont	
$x^2 + 2x - 8 = 0$	2 pont	
$x = 2$ vagy $x = -4.$	1 pont	
A gyökök behelyettesítése után azt kapjuk, hogy mindkettő megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

1. a) második megoldás		
$\frac{2x+11}{3} = x+3 $	1 pont	
Ha $x \geq -3$, akkor az egyenlet: $\frac{2x+11}{3} = x+3$,	1 pont	
amiből $x = 2$ (ez valóban nem kisebb -3 -nál).	1 pont	
Ha $x < -3$, akkor az egyenlet: $\frac{2x+11}{3} = -x-3$,	1 pont	
amiből $x = -4$ (ez valóban kisebb mint -3).	1 pont	
Ellenőrzés: ekvivalenciára hivatkozással vagy behelyettesítéssel.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

1. b)		
$x > 3$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldás helyességét.</i>
(A logaritmus azonosságait és definícióját használva): $\log_2 \frac{(x+1)(x-3)}{x+9} =$	1 pont	
$= \log_2 2$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a következő lépésből derül ki.</i>
(A logaritmus kölcsönös egyértelműsége miatt): $\frac{(x+1)(x-3)}{x+9} = 2$	1 pont	
Rendezve: $x^2 - 4x - 21 = 0.$	1 pont	
A másodfokú egyenlet gyökei 7 és -3 .	1 pont	
Ellenőrzés: a -3 nem, a 7 viszont megoldása az eredeti egyenletnek (behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartományra és ekvivalens átalakításokra hivatkozással).	1 pont	
Összesen:	7 pont	

9. b) első megoldás		
A lehetőségeket aszerint csoportosítjuk, hogy András hányszor dobott 4-est az első három dobásánál.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Háromszor dobott 4-est: 1 lehetőség.	1 pont	
Kétszer dobott 4-est: ez nem lehetséges, mert akkor a harmadik dobásának is 4-esnek kellene lennie.	1 pont	
Egyszer dobott 4-est: az első vagy a harmadik dobása lehetett 4-es.	1 pont	
A másik két dobásának összege is 4 (1-3, 3-1 vagy 2-2); ez mindkét esetben 3 lehetőség.	1 pont	
Ez összesen 6 lehetőség.		
Nem dobott 4-est: ekkor valamilyen sorrendben 1-1-2 volt a három dobása; ez 3 lehetőség.	1 pont	
Összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

9. b) második megoldás		
A negyedik dobás előtt először, másodszor vagy harmadszor állhat András a 4-es mezőn.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha először áll a 4-es mezőn, akkor dobássorozata 1-1-2, 1-2-1 vagy 2-1-1 volt. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Ha másodszor áll a 4-es mezőn, akkor először vagy az első vagy a második lépésével került oda.	1 pont	
Ha először az első lépésével került a 4-es mezőre, akkor az első dobása 4-es volt, a másik kettő pedig 3-1, 1-3 vagy 2-2 volt. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Ha először a második lépésével került a 4-es mezőre, akkor az első két dobása 3-1, 1-3 vagy 2-2 volt, harmadik dobása pedig 4-es volt. Ez 3 lehetőség.	1 pont	
Ha harmadszor áll a 4-es mezőn, akkor mindkét korábbi dobása 4 volt. Ez 1 lehetőség.	1 pont	
Azaz összesen 10-féle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

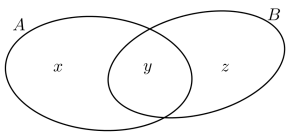
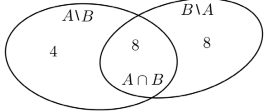
Ha az első dobásunk 1-es volt, akkor innen a következő dobásokkal juthattunk a 4-es mezőre: 3, 2-1, 1-2 vagy 1-1-1.	1 pont	
Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{36} + \frac{2}{216} + \frac{1}{1296}.$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre, az előzőek összege,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
tehát $\frac{343}{1296} \approx 0,265.$	1 pont	<i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	9 pont	

9. a) harmadik megoldás		
Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét. Ha nem léptünk rá a 4-es mezőre, akkor az 1., a 2., a 3. vagy a 4. lépésben átgrottuk azt.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha az első lépésben ugrottuk át, akkor ez a dobásunk 5-ös vagy 6-os lehetett. Ennek a valószínűsége $\frac{2}{6}.$	1 pont	
Ha a második lépésben ugrottuk át, akkor első két dobásunk a következő lehetett: 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6. Ennek a valószínűsége $\frac{12}{36}.$	2 pont	<i>A két dobás összege szerint csoportosítva: 1-4, 2-3, 3-2; 1-5, 2-4, 3-3; 1-6, 2-5, 3-4; 2-6, 3-5; 3-6.</i>
Ha a harmadik lépésben ugrottuk át, akkor 2-1-es vagy 1-2-es első két dobás esetén harmadik dobásunk 5-féle (legalább 2-t dobunk), 1-1-es első két dobás esetén 4-féle lehetett (legalább 3-at dobunk). Ennek a valószínűsége $\frac{14}{216}.$	2 pont	2-1-2, 1-2-2, 1-1-3; 2-1-3, 1-2-3, 1-1-4; 2-1-4, 1-2-4, 1-1-5; 2-1-5, 1-2-5, 1-1-6; 2-1-6, 1-2-6.
Ha a negyedik lépésben ugrottuk át a 4-es mezőt, akkor az első három dobásunk 1-1-1 volt, a negyedik pedig 5-féle lehetett (legalább 2-t dobunk). Ennek a valószínűsége $\frac{5}{1296}.$	1 pont	
Annak a valószínűségét, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre, megkapjuk, ha az előzőek összegét 1-ből kivonjuk. Ez a valószínűség tehát $1 - \left(\frac{2 \cdot 216 + 12 \cdot 36 + 14 \cdot 6 + 5}{1296} \right) = \frac{343}{1296} \approx 0,265.$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i> <i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	9 pont	

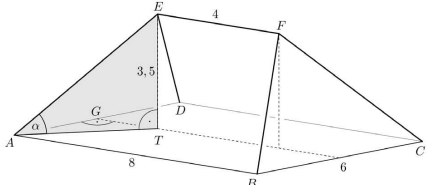
2. a) első megoldás		
5 tanuló van jelese fizikából,	1 pont	
és 7 tanuló van jelese matematikából.	1 pont	
$5 + 7 = 12$, de csak 10 tanuló van legalább az egyik tárgyból jelese, ezért	1 pont	
mindkét tárgyból 2 tanuló van jelese.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

2. a) második megoldás		
(Ha mindkét tárgyból x tanuló van jelese, akkor) csak fizikából $5 - x$,	1 pont	
csak matematikából $7 - x$ tanuló van jelese.	1 pont	
$5 - x + x + 7 - x = 10$	1 pont	
$x = 2$, azaz mindkét tárgyból 2 tanuló van jelese.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

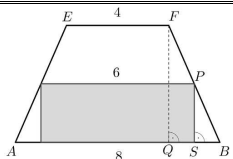
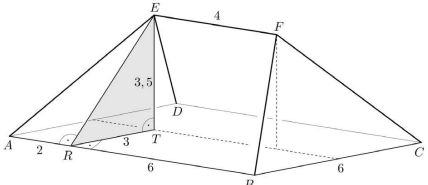
Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen felvett és kitöltött halmazábra segítségével adja meg a helyes eredményt, akkor teljes pontszámot kapjon.

2. b)		
Készítsünk Venn-diagramot!		
 (x, y, z rendre az $A \setminus B$, az $A \cap B$, illetve a $B \setminus A$ halmaz elemeinek számát jelöli).	1 pont	
A számtani sorozat első tagja x , második tagja y , harmadik tagja pedig $x + y$, ezért	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
a számtani sorozat differenciája $(x + y) - y = x$.	1 pont	
Az A halmaz elemeinek száma tehát $3x$, a B halmazé pedig (a sorozat 4. tagja) $4x$.	1 pont	
Az A és B elemszámának összege 28, ezért $3x + 4x = 28$.	1 pont	
A számtani sorozat első tagja és differenciája is 4.	1 pont	
Ellenőrzés: A B halmaz elemszáma 16 (ezért $x = 8$).		
 $A \setminus B = 4, A \cap B = 8, A = 12, B = 16.$ Ez a négy szám valóban egy számtani sorozat négy egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

3. a)

	1 pont	
(Használjuk az ábra jelöléseit!) Az ATG derékszögű háromszögben $GT = 2$ m és $AG = 3$ m, így (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $AT = \sqrt{13} (\approx 3,61)$ (m).	1 pont	$GE = \sqrt{3,5^2 + 2^2} = \sqrt{16,25} (\approx 4,03)$ (m)
(Az ATE derékszögű háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt) $AE = \sqrt{AT^2 + ET^2} = \sqrt{25,25} \approx 5$ (m) a tartógerenda hossza.	1 pont	$AE = \sqrt{GE^2 + GA^2}$
A tartógerenda vízszintessel bezárt szöge az ábrán α -val jelölt EAT szög,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
amelyre $\sin \alpha = \frac{ET}{AE} (\approx 0,6965)$,	1 pont	
ahonnan $\alpha \approx 44^\circ$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

3. b)

A téglalap alakú napelem egyik oldalának hossza legfeljebb a trapéz középvonalának hossza lehet,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
azaz 6 méter.	1 pont	
A téglalap másik oldalának hossza állandó, mert az a trapéz magasságának a fele (az ábrán PS az FQB derékszögű háromszög középvonala).	1 pont	
	1 pont	(A fenti ábra jelöléseit használva:) $PS = \sqrt{PB^2 - SB^2} = \sqrt{6,3125 - 1} = \sqrt{5,3125} (\approx 2,30)$ (m)
(Használjuk az ábra jelöléseit!) A trapéz magasságát az ETR derékszögű háromszögből számítva: $ER = \sqrt{ET^2 + TR^2} = \sqrt{3,5^2 + 3^2} = \sqrt{21,25} (\approx 4,61)$ (m).		

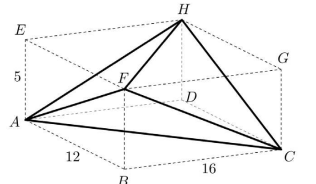
9. a) első megoldás

Egy, kettő, három vagy négy lépésben érthetünk a 4-es mezőre.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Egy lépésben csak úgy érthetünk a 4-es mezőre, ha 4-est dobunk, ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Két lépésben a következő dobásokkal juthatunk a 4-es mezőre: 3-1, 2-2 vagy 1-3.	1 pont	
Ennek a valószínűsége összesen $\left(3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \frac{3}{36}$.	1 pont	
Három lépésben a következő dobásokkal juthatunk a 4-es mezőre: 1-1-2, 1-2-1 vagy 2-1-1.	1 pont	
Ennek a valószínűsége összesen $\left(3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \frac{3}{216}$.	1 pont	
Négy lépésben csak négy 1-es dobással érthetünk a 4-es mezőre, ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer rálépünk a 4-es mezőre az előzőek összege,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
tehát $\frac{343}{1296} \approx 0,265$.	1 pont	<i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	9 pont	

9. a) második megoldás

Az első dobásunk lehetett 4-es, 3-as, 2-es vagy 1-es.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha az első dobásunk 4-es volt, akkor rögtön rá is lépünk a 4-es mezőre. Ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.	1 pont	
Ha az első dobásunk 3-as volt, akkor csak egy következő 1-es dobással juthatunk a 4-es mezőre. Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$.	1 pont	
Ha az első dobásunk 2-es volt, akkor vagy egy következő 2-essel vagy két 1-essel juthatunk a 4-es mezőre.	1 pont	
Ennek a valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$.	1 pont	

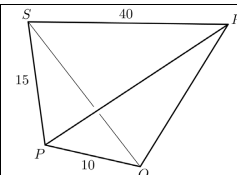
8. b)

	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.
Jó ábra (a tetraéder helyes feltüntetése).		
Egybevágó téglalapok átlói mind ugyanakkora hosszúságúak, ezért $AC = FH$, $AF = CH$ és $AH = CF$.	1 pont	
A tetraéder lapjai tehát olyan háromszögek, amelyeknek oldalai páronként egyenlő hosszúak, ezért ezek mind egybevágók egymással.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8. c)

Annak belátásához, hogy az oldallapháromszögek hegyesszögűek, elegendő azt bizonyítani, hogy az egyik háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó mindhárom szöveget jól kiszámolja. ($83,4^\circ$; $56,4^\circ$; $40,2^\circ$)
Például az AFH háromszögben (Pitagorasz-tétellel) $AF = 13 < AH = \sqrt{281} < FH = 20$,	1 pont	
így a háromszög FH oldalával szemközi φ szögének koszinusza (a koszinusztételből): $\cos \varphi = \frac{169 + 281 - 400}{2 \cdot 13 \cdot \sqrt{281}} \approx 0,1147$.	2 pont	
Mivel ez pozitív szám, ezért φ valóban hegyesszög.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

8. d)

A PRS háromszögben $PS = 15$ cm és $SR = 40$ cm, ezért (a háromszög-egyenlőtlenség miatt a 20, 25, illetve 30 cm közül) $PR = 30$ cm lehet csak.	1 pont	
A PQS háromszögben $PS + PQ = 25$, ezért $QS = 20$ cm lehet csak.	1 pont	
Így $QR = 25$ cm lehet csak, és ekkor az RSQ háromszög is létezik (mert $20 + 25 > 40$).	1 pont	
Tehát egyetlen megfelelő tetraéder van.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

A legnagyobb napelem területe: $\frac{6 \cdot \sqrt{21,25}}{2} \approx 13,83$ (m ²).	1 pont	A legnagyobb napelem területe: $6 \cdot \sqrt{5,3125} \approx 13,83$ (m ²)
Legfeljebb 13,8 m ² területű napelem helyezhető el.	1 pont	Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.
Összesen:	6 pont	

4. a)

A jegybevétel 1500 Ft-os ár és 1000 néző esetén 1 500 000 Ft.	1 pont	
Ha n -szer 5 forinttal növeljük a jegy árát ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor (a modell szerint) a nézők száma $1000 - 10n$ fő lesz.	1 pont	
A módosult bevétel $(1500 + 5n)(1000 - 10n) =$	1 pont	
$= 1\,500\,000 - 10\,000n - 50n^2$ forint,	1 pont	
ami kevesebb, mint 1 500 000 forint,	1 pont*	
mert pozitív értékű tagokat vonunk le belőle.	1 pont*	
Összesen:	6 pont	

A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

Ha b a pozitív valós számok halmazán értelmezett $b(n) = -50n^2 - 10\,000n + 1\,500\,000$ „bevételfüggvény”, akkor $b'(n) = -100n - 10\,000$.	1 pont	
A deriváltfüggvény a teljes értelmezési tartományon negatív, tehát a b függvény szigorúan monoton csökkenő (ilyen tehát a pozitív egészek halmazára leszűkített függvény is).	1 pont	

4. b)

Ha m -szer 5 Ft-tal csökkentjük a jegy árát, akkor a nézők száma $1000 + 10m$ fő lesz ($m \in \mathbb{Z}$).	1 pont	
A módosult bevétel $(1500 - 5m)(1000 + 10m) =$	1 pont	
$= 1\,500\,000 + 10\,000m - 50m^2$ (Ft).	1 pont	
Teljes négyzetté alakítva: $-50(m - 100)^2 + 2\,000\,000$, tehát	2 pont*	
$m = 100$ a maximumhely.	1 pont*	
Ekkor a jegy ára $(1500 - 100 \cdot 5 =) 1000$ Ft.	1 pont	
A legnagyobb bevétel $(1000 \cdot 2000 =) 2\,000\,000$ Ft.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetek valamelyikéért is megkaphatja a vizsgázó:

Ha f a valós számok halmazán értelmezett $f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$ „bevétel-függvény”, akkor $f'(m) = -100m + 10\,000$.	1 pont	
Ha $f'(m) = 0$, akkor $m = 100$.	1 pont	
Mivel $f''(m) = -100 < 0$, ezért a 100 valóban maximumhelye f -nek (és így az egész számok halmazára leszűkített függvénynek is).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol helyesen.</i>

Ha f a valós számok halmazán értelmezett $f(m) = -50m^2 + 10\,000m + 1\,500\,000$ „bevétel-függvény”, akkor f zérushelyei a 300 és a -100 .	1 pont	
f -nek maximuma van, és ezt a zérushelyeinek szám-tani közepénél veszi fel.	1 pont	
Az f maximumhelye tehát a 100. Ez egyben a bevétel maximumhelye is.	1 pont	

II.

5. a) első megoldás		
Az első gépsoron 80, a második gépsoron 170 hibás inget gyártanak.	1 pont	
(Hibás inget 250 ing közül választhatunk, tehát) az összes eset száma 250.	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
(Második gépsoron készült hibás inget 170 ing közül választhatunk, tehát) a kedvező esetek száma 170.	1 pont	
Így a kérdéses valószínűség $\frac{170}{250} =$	1 pont	
$= 0,68$.	1 pont	<i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	5 pont	

7. c)		
Az 5 adat összege az eredeti adatsokaságban $(5 \cdot 22 =)$ 110.	1 pont	
Mivel a módusz 32, ezért a 32 gyakorisága legalább 2.	1 pont	
Az öt adatot nem csökkenő sorrendbe állítva a sorban az m medián előtt álló szám az $m - 4$ (mert ha az m -et 5-tel csökkentjük, akkor az új számsokaságban ez lép az m helyébe).	2 pont*	<i>$m - 4 = 10$ nem lehetséges (például azért, mert ekkor az öt adat összege nem lehetne 110).</i>
A legkisebb adat a 10, így $10 + (m - 4) + m + 32 + 32 = 110$.	1 pont*	
Ebből $m = 20$.	1 pont*	
Az adatok tehát a következők: 10, 16, 20, 32, 32.	1 pont	
Ellenőrzés: az öt szám átlaga 22; ha a 20-at 30-ra cseréljük, akkor 24 lesz az átlag; ha a 20 helyett 15-öt írunk, akkor pedig 16 lesz a medián.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

Az öt adat között szerepel (és a legkisebb) a 10 és legalább kétszer a 32 is.	1 pont	
A két nem ismert adat összege: $110 - (10 + 32 + 32) = 36$.	1 pont	
Ez a két adat pozitív egész, ezért a következő kéttagú összegek lehetségesek: $10 + 26 = 11 + 25 = \dots = 17 + 19$.	1 pont	
Ezek közül a feladat feltételeinek csak a 16 és a 20 felel meg.	1 pont	

8. a)		
Az ACFH tetraéder térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a téglatest térfogatából levonjuk a B, D, G, E csúcsnál látható négy egybevágó háromszög „sarokgúla” térfogatát.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki.</i>
Egy „sarokgúla” térfogata $\frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} = 160$ (cm ³).	1 pont	
Az ACFH tetraéder térfogata $5 \cdot 12 \cdot 16 - 4 \cdot \frac{5 \cdot 12 \cdot 16}{6} =$	1 pont	
$= 320$ cm ³ .	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Az ACFH tetraéder egy lapja területének kiszámításáért önmagában nem jár pont.

7. a) első megoldás		
A nullát nem tartalmazó háromjegyűek száma $9^3 (= 729)$.	1 pont	
Ezek között $8^3 (= 512)$ olyan szám van, amelyben nincs egyes számjegy.	1 pont	
$9^3 - 8^3 (= 217)$ olyan háromjegyű szám van, amely megfelel a feltételeknek.	1 pont	
A megfelelő kétjegyűek száma $9^2 - 8^2 (= 17)$,	1 pont	
és egy darab egyjegyű is van, az 1 szám.	1 pont	
A megfelelő pozitív egészek száma ezek összege, tehát $9^3 - 8^3 + 9^2 - 8^2 + 1 (= 235)$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

7. a) második megoldás		
A nullát nem tartalmazó háromjegyűek között pontosan egy egyest tartalmaz $3 \cdot 8 \cdot 8 (= 192)$ darab.	1 pont	
Két egyest tartalmaz $3 \cdot 8 (= 24)$ darab,	1 pont	
továbbá a 111 az egyetlen három egyest tartalmazó háromjegyű szám.	1 pont	
A nullát nem tartalmazó kétjegyűek között pontosan egy egyest tartalmazó szám $2 \cdot 8 (= 16)$ van, és két egyest tartalmaz a 11, ez tehát összesen 17 megfelelő kétjegyű szám.	1 pont	
Az egyjegyűek között csak az 1 felel meg.	1 pont	
A megfelelő pozitív egészek száma ezek összege, tehát 235.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

7. b)		
Ha az (egyetlen) m számot $m + 10$ -re cseréljük, akkor (az adatok száma nem változik, és) az adatok összege 10-zel növekszik.	1 pont	$22n + 10 = 24n$
Az átlag 2-vel nőtt, ezért az adatok száma $\left(\frac{10}{2} = \right) 5$.	1 pont	$n = 5$
Összesen:	2 pont	

5. a) második megoldás		
Az első gépsoron 80, a második gépsoron 170 hibás inget gyártanak.	1 pont	
Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott inget a második gépsoron gyártották, B pedig azt az eseményt, hogy a kiválasztott ing anyaghibás. Ezekkel a keresett valószínűség: $P(A B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki.</i>
$P(AB) = \frac{170}{9000} = \frac{17}{900}$	1 pont	
$P(B) = \frac{250}{9000} = \frac{25}{900}$	1 pont	
$P(A B) = \frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}} = \frac{17}{25} = 0,68$	1 pont	<i>A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.</i>
Összesen:	5 pont	

5. b)		
Legyen x az ing árleszállítás előtti ára forintban, és legyen $q = 1 - \frac{p}{100}$.	1 pont	
(Ha a két árleszállítás fordított sorrendben történt volna, akkor az ing kétszeres árleszállítás utáni ára $xq - 500$ forint, tehát) $(xq - 500) + 50 = (x - 500) \cdot q$.	2 pont	
(Ha mindkét alkalommal $p\%$ a csökkentés, akkor az új ár xq^2 forint, tehát) $(x - 500) \cdot q + 90 = xq^2$.	2 pont	
Az első egyenletből $q = 0,9$,	1 pont	
azaz $p = 10$.	1 pont	
(A q értékét a második egyenletbe helyettesítve) $(x - 500) \cdot 0,9 + 90 = x \cdot 0,81$.	1 pont	
$x = 4000$	1 pont	
Az ing eredeti ára 4000 Ft, p értéke pedig 10.	1 pont	
Ellenőrzés: $4000 - 500 = 3500$, 10%-kal csökkentve 3150; 4000 csökkentve 10%-kal 3600, $3600 - 500 = 3100$; 4000 csökkentve 10%-kal 3600, újabb 10%-kal csökkentve 3240. $3150 = 3100 + 50$ és $3150 = 3240 - 90$, tehát a kapott eredmények helyesek.	1 pont	<i>Ez a pont csak akkor jár, ha a vizsgázó a feladat szövegébe történő behelyettesítéssel ellenőrzi a megoldások helyességét.</i>
Összesen:	11 pont	

6. a)		
A $\cos x + 2 = \sin x + 2$ egyenletből: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).	1 pont	Ha a vizsgázó számolás nélkül olvassa le, és behelyettesítéssel nem ellenőrzi az intervallum végpontjait, akkor ez a pont nem jár.
A fenti megoldásból adódik, hogy az ábrán megadott két görbe közös pontjainak első koordinátája $-\frac{3\pi}{4}$, illetve $\frac{\pi}{4}$.	1 pont	
$T = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ((\cos x + 2) - (\sin x + 2)) dx =$	2 pont	$T = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 2) dx -$ $- \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + 2) dx =$
$= [\sin x + \cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$	2 pont	$= [\sin x + 2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -$ $- [-\cos x + 2x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$	1 pont	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{2} \right) -$ $- \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{2} \right) \right] =$ $= (\sqrt{2} + 2\pi) - (-\sqrt{2} + 2\pi) =$
$= 2\sqrt{2} \approx 2,82$	1 pont	
Összesen:	8 pont	

6. b) első megoldás		
$a_1 = -\frac{6}{5}, a_2 = -\frac{17}{2}, a_3 = 28.$	1 pont	
Mivel $a_2 < a_1 < a_3$, ezért a sorozat nem monoton.	1 pont	
Ha $n \geq 4$, akkor $a_n > 0$ (mert a definiáló tört számlálója és nevezője is pozitív), tehát a sorozat alulról korlátos (például a $-\frac{17}{2}$ egy alsó korlátja).	1 pont	

(A sorozat hozzárendelési szabályát átalakítva:)		
$a_n = \frac{11 - \frac{5}{n}}{3 - \frac{8}{n}}.$	1 pont	$a_n = \frac{11n - 5}{3n - 8} =$ $= \frac{11}{3} \cdot \frac{(3n - 8) + \frac{73}{3}}{3n - 8} =$
Ha $n \geq 4$, akkor a számláló 11-nél kisebb, a nevező pedig legalább 1,	1 pont	$= \frac{11}{3} + \frac{73}{9n - 24}$
ekkor tehát $a_n < \frac{11}{1} = 11.$	1 pont	Ha $n \geq 4$, akkor ez kisebb, mint 10 ($a_n \leq \frac{11}{3} + \frac{73}{12} = \frac{39}{4} < 10$).
($a_2 < a_3 = 28$ és $a_1 < a_3 = 28$ is igaz, tehát) a sorozat felülről is korlátos, mert a 28 egy felső korlátja.	1 pont	
A vizsgált sorozat tehát (alulról és felülről is korlátos, ezért valóban) korlátos.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

6. b) második megoldás		
$a_1 = -\frac{6}{5}, a_2 = -\frac{17}{2}, a_3 = 28.$	1 pont	
Mivel $a_2 < a_1 < a_3$, ezért a sorozat nem monoton.	1 pont	
Írjuk az $\{a_n\}$ sorozatot definiáló törtet $a_n = \frac{11 - \frac{5}{n}}{3 - \frac{8}{n}}$ alakban.	1 pont	$a_n = \frac{11n - 5}{3n - 8} =$ $= \frac{11}{3} \cdot \frac{(3n - 8) + \frac{73}{3}}{3n - 8} =$
A számlálóban álló képlettel definiált $\{b_n\}$ sorozat konvergens (határértéke 11), és	1 pont	$= \frac{11}{3} + \frac{73}{9n - 24}$
a nevezőben álló képlettel definiált $\{c_n\}$ sorozat is konvergens (határértéke 3).	1 pont	Ha $d_n = \frac{73}{9n - 24}$, akkor a $\{d_n\}$ konvergens (határértéke 0),
Emiatt a $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok hányadosa, vagyis az $\{a_n\}$ sorozat is konvergens (határértéke $\frac{11}{3}$).	1 pont	ezért az $\{a_n\}$ is konvergens (határértéke $\frac{11}{3}$).
Minden konvergens sorozat korlátos,	1 pont	
ezért az $\{a_n\}$ sorozat is az.	1 pont	
Összesen:	8 pont	