

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. május 3.

MATEMATIKA

**EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA**

**JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK
MINISZTERIUMA**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám** a mellette levő **téglalapba** kerüljön.
- Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
- A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
- Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, ha csak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. c)		
A pozitív valós számok halmazán értelmezett $g(v) = 279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$g'(v) = 279 - \frac{265\,050\,000}{v^2}$	1 pont	
$g'(v) = 0$, ha $v = 100\sqrt{95}$ ($\approx 974,68$) (mert $v > 0$).	1 pont	
A deriváltfüggvény értékei $v < 100\sqrt{95}$ esetén negatívak, $v > 100\sqrt{95}$ esetén pedig pozitívak. Ezért a $100\sqrt{95}$ a g függvénynek abszolút minimumhelye.	1 pont	<i>Mivel a második derivált pozitív, ezért itt (abszolút) minimuma van a g függvénynek.</i>
(A deriváltfüggvény előjele alapján tehát) a g függvény a $[800; 100\sqrt{95}]$ zárt intervallumon szigorúan csökkenő, a $[100\sqrt{95}; 1100]$ zárt intervallumon pedig szigorúan növekvő, ezért a g függvény $[800; 1100]$ intervallumra való leszűkítése a maximumát vagy 800-nál vagy 1100-nál veszi fel.	1 pont	
$g(800) = 52\,312,5$ $g(1100) \approx 45\,654,5$	1 pont	
Tehát a modell szerint 800 km/h átlagsebesség esetén a legnagyobb,	1 pont	
és $(100\sqrt{95} \approx) 975$ km/h átlagsebesség esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

Megjegyzés: A szélsőértékhelyek függetlenek az út hosszától.

9. a) első megoldás		
$f(x) = \frac{1}{20}((x-900)^2 - 810\,000 + 950\,000) =$	2 pont	
$= \frac{1}{20}(x-900)^2 + 7000$	1 pont	
(Mivel $(x-900)^2 \geq 0$, és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = 900$, ezért) az óránkénti üzemanyag-fogyasztás 900 km/h átlagsebesség esetén minimális, és ez a minimum 7000 kg óránként.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

9. a) második megoldás		
(Az egy óra alatti üzemanyag fogyasztásnak ott lehet minimuma, ahol az f függvény deriváltja 0.) $f'(x) = \frac{1}{10}x - 90$	1 pont	
$f'(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 900$.	1 pont	
Mivel a második derivált pozitív ($f''(x) = 0,1$), ezért itt valóban minimuma van az f függvénynek.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol.</i>
Az óránkénti üzemanyag-fogyasztás 900 km/h átlagsebesség esetén lesz minimális, és ez a minimum ($f(900) =$) 7000 kg óránként.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

9. b)		
A repülési idő órában: $t = \frac{5580}{v}$.	1 pont	
Az út során elfogyasztott üzemanyag kg-ban: $t \cdot f(v) = \frac{5580}{v} \cdot \frac{1}{20}(v^2 - 1800v + 950\,000) =$	1 pont	
$= 279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
- A megoldásokért **jutalom pont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
- Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százaléokban megadott helyes válasz is elfogadható.
- Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
- A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A mért tömegek között nincs 490 dkg-nál kisebb, tehát az első feltétel teljesül.	1 pont	
Az 5 kg-tól való eltérések (dkg-ban) rendre 6, 9, 7, 12, 8, 17, 7, 12.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az eltérések átlaga $\left(\frac{78}{8} = \right)$ 9,75 (dkg).	1 pont	
Az árusítást engedélyezik.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

1. b)

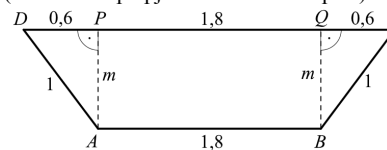
A mért adatok átlaga $\left(\frac{4032}{8} = \right)$ 504 (dkg),	1 pont	
szórása $\sqrt{\frac{2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 8^2 + 4^2 + 2^2}{8}} =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel számolva helyesen választ.</i>
$= \sqrt{91} \approx 9,54$ (dkg).	1 pont	
Összesen:	3 pont	

1. c) első megoldás

Az eper $\left(1 - \frac{7}{20} - \frac{3}{8} = \right) \frac{11}{40}$ része III. osztályú.	1 pont	
Az összes eper együttes tömege $\left(33 : \frac{11}{40} = \right) 120$ kg.	1 pont	
Ebből I. osztályú $(120 \cdot 0,35 =)$ 42 kg, II. osztályú $(120 - 33 - 42 =)$ 45 kg.	1 pont	
Az eredetileg tervezett árakkal számolva $(42 \cdot 800 + 45 \cdot 650 + 33 \cdot 450 =)$ 77 700 Ft lett volna a bevétel.	1 pont	
Ennek a 85%-a 66 045 Ft.	1 pont	
$\frac{66\,045}{120} = 550,375$	1 pont	
Az akciós egységár 550 Ft/kg legyen.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	7 pont	

8. b)

(A hasáb alaplappja az $ABCD$ húrtrapéz.)



Az ábra jelöléseit használva, az APD derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:

$$m = \sqrt{1^2 - 0,6^2} = 0,8 \text{ (m)}.$$

A hasáb alaplajának (az $ABCD$ trapéznek) a területe:

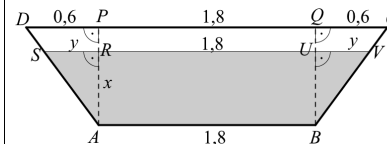
$$\left(\frac{1,8 + 3}{2} \cdot 0,8 = \right) 1,92 \text{ (m}^2\text{)},$$

tehát a hasáb (a konténer) térfogata:
 $(1,92 \cdot 2 =) 3,84 \text{ m}^3$.

A tisztító folyadék x méter magasságban áll a konténerben.

A folyadék egy olyan szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasábot tölt meg,

amelynek a magassága 2 méter, az alaplapjának a területe pedig $\left(\frac{2,7}{2}\right) 1,35 \text{ (m}^2\text{)}$.



Az (ábra szerinti) APD és ARS derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{SR}{AR} = \frac{DP}{AP}$,

$$\text{azaz } \frac{y}{x} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1,8+1,8+1,5x}{2} \cdot x = 1,35.$$

Ebből $1,5x^2 + 3,6x - 2,7 = 0$,

amelynek a gyökei 0,6 és -3 .

(A -3 nem felel meg, tehát) a tisztító folyadék $0,6$ méter magasságban áll a konténerben.

Összesen:

8. a) első megoldás		
0,99 annak a valószínűsége, hogy egy adott szem meggyből az automata eltávolítja a magot.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A komplementer esemény (0 vagy 1 mag kerül az üvegbe) valószínűsége $0,99^{120} + \binom{120}{1} \cdot 0,01 \cdot 0,99^{119}$.	2 pont	$\approx 0,2994 + 0,3629$
Ezért a kért valószínűség: $1 - 0,99^{120} - \binom{120}{1} \cdot 0,01 \cdot 0,99^{119}$,	1 pont	
ami körülbelül 0,34.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

8. a) második megoldás		
0,99 annak a valószínűsége, hogy egy adott szem meggyből az automata eltávolítja a magot.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A kért valószínűség: $\sum_{k=2}^{120} \binom{120}{k} \cdot 0,01^k \cdot 0,99^{120-k}$.	1 pont	
(Az egyes tagok kiszámítása és valószínűségi megfontolások alapján arra jutunk, hogy) a fenti 119 tagú összeg hetedik tagjától kezdve mindegyik tag kisebb $2,8 \cdot 10^{-5}$ -nél,	1 pont	
ezért az utolsó 113 tag összege nem nagyobb 0,0032-nél.	1 pont	
Mivel az első hat tag összege kevesebb 0,338-nál, ezért a kért valószínűség körülbelül 0,34.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: A $\sum_{k=2}^{120} \binom{120}{k} \cdot 0,01^k \cdot 0,99^{120-k}$ összeg első 9 tagja és a megfelelő tagok összege az alábbi táblázatban látható.

i	$\binom{120}{i} \cdot 0,01^i \cdot 0,99^{120-i}$	$\sum_{k=2}^i \binom{120}{k} \cdot 0,01^k \cdot 0,99^{120-k}$
2	$\approx 0,2181$	$\approx 0,2181$
3	$\approx 0,0867$	$\approx 0,3047$
4	$\approx 0,0256$	$\approx 0,3304$
5	$\approx 0,0060$	$\approx 0,3364$
6	$\approx 0,0012$	$\approx 0,3375$
7	$\approx 0,0002$	$\approx 0,3377$
8	$\approx 2,7 \cdot 10^{-5}$	$\approx 0,3377$
9	$\approx 3,4 \cdot 10^{-6}$	$\approx 0,3377$
10	$\approx 3,8 \cdot 10^{-7}$	$\approx 0,3377$

1. c) második megoldás		
Az eper $\left(1 - \frac{7}{20} - \frac{3}{8} = \frac{11}{40}\right)$ része III. osztályú.	1 pont	
Az eredetileg tervezett árakkal számolva az átlagos egységár kilogrammonként $0,35 \cdot 800 + \frac{3}{8} \cdot 650 + \frac{11}{40} \cdot 450 (= 647,5)$ Ft lett volna.	3 pont	
A kereskedő bevétele akkor lesz az eredetileg tervezett bevétel 85%-a, ha az eper az eredeti átlagos egységár 85%-áért értékesíti.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az eredeti átlagos egységár 85%-a 550,375 Ft/kg.	1 pont	
Az akciós egységár 550 Ft/kg legyen.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	7 pont	

2. a) első megoldás		
Az összes eset száma $\binom{10}{5} (= 252)$.	1 pont	<i>Mindkét esetben ugyanannyi az összes eset száma.</i>
Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 2 fehér golyó $\binom{6}{2} \binom{4}{3}$ különböző módon fordulhat elő.	1 pont	
Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 4 fehér golyó $\binom{6}{4} \binom{4}{1}$ különböző módon fordulhat elő.	1 pont	
A két valószínűség: $\frac{\binom{6}{2} \binom{4}{3}}{\binom{10}{5}}$, illetve $\frac{\binom{6}{4} \binom{4}{1}}{\binom{10}{5}}$.	1 pont	$\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$ és $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$
Ez a két valószínűség egyenlő $\left(\frac{5}{21} \approx 0,238\right)$, tehát a tanuló kijelentése igaz.	1 pont	<i>miatt igaz a kijelentés.</i>
Összesen:	5 pont	

2. a) második megoldás		
(Ha egyesével, visszatevés nélkül húzzák ki a golyókat, és figyelembe vesszük a golyók sorrendjét, akkor) az összes eset száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 (= 30\,240)$.	1 pont	<i>Mindkét esetben ugyanannyi az összes eset száma.</i>
Az 5 kihúzott golyó között 2 fehér golyó $\binom{5}{2} \cdot (6 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) (= 7200)$ különböző módon fordulhat elő,	1 pont	

4 fehér golyó pedig $\binom{5}{4} \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 4 (= 7200)$ különböző módon.	1 pont	
A két valószínűség: $\frac{\binom{5}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$, illetve $\frac{\binom{5}{4} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$.	1 pont	$2 \cdot \binom{5}{2} = 4 \cdot \binom{5}{4}$
Ez a két valószínűség egyenlő $\left(\frac{5}{21} \approx 0,238\right)$, tehát a tanuló kijelentése igaz.	1 pont	<i>miatt igaz a kijelentés.</i>
Összesen:	5 pont	

2. b) első megoldás		
Ha egyesével, visszatevéssel húzzák ki a golyókat, akkor az összes eset száma: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 (= 10^5)$.	1 pont	
2 fehér golyót $\binom{5}{2} \cdot 6^2 \cdot 4^3 (= 23\,040)$,	1 pont	
4 fehér golyót $\binom{5}{4} \cdot 6^4 \cdot 4 (= 25\,920)$ különböző módon húzhatunk.	1 pont	
A két valószínűség (három tizedesjegyre kerekítve) 0,230, illetve 0,259.	1 pont	
A két valószínűség különbözik, a tanuló kijelentése ebben az esetben nem igaz.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

2. b) második megoldás		
A fehér golyó húzásának (állandó) valószínűsége 0,6, a piros golyóé 0,4.	1 pont	
2 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3$,	1 pont	
4 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4$.	1 pont	
A két valószínűség (három tizedesjegyre kerekítve) 0,230, illetve 0,259.	1 pont	
A két valószínűség különbözik, a tanuló kijelentése ebben az esetben nem igaz.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

7. a)		
$k(x) = 12 - (2^x - 1)^2 =$	1 pont	
$(= 12 - (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1)) = 12 - (4^x - 2^{x+1} + 1)$	1 pont	
A zárójel felbontása után $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$ adódik, tehát igaz az állítás.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

7. b)		
Megoldandó a $2^{3x+2} - 1 < 3(2^x - 1) + 2$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán.	2 pont	
$4 \cdot 2^{3x} - 1 < 3 \cdot 2^x - 1$	1 pont	
$2^x (4 \cdot 2^{2x} - 3) < 0$	1 pont	
Mivel minden valós szám esetén $2^x > 0$, ezért az egyenlőtlenség ekvivalens a $4^x < 0,75$ egyenlőtlenséggel.	1 pont	$2^{2x} < \frac{3}{4}$
A 4-es alapú exponenciális/logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért	1 pont	<i>A 2-es alapú exponenciális/logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért</i>
$x < \log_4 0,75 (= -1 + \log_2 3 \approx -0,2075)$.	1 pont	$x < 0,5 \log_2 0,75$ $(-1 + \log_2 \sqrt{3} \approx -0,2075)$
Összesen:	7 pont	

7. c)		
A két görbe közös pontjainak első koordinátáját a $12 - x^2 = -4$ egyenlet megoldásai adják:	1 pont	
-4 és 4 .	1 pont	
(Mivel a $[-4; 4]$ intervallumon a h függvény grafikonja az $x \mapsto -4$ függvény grafikonja fölött helyezkedik el, ezért) a kért terület: $\int_{-4}^4 (16 - x^2) dx =$	1 pont	
$= \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 =$	1 pont	
$= \left(64 - \frac{64}{3} \right) - \left(-64 - \left(-\frac{64}{3} \right) \right) = \frac{128}{3} - \left(-\frac{128}{3} \right) =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a határozott integrál értékét számológéppel jól határozza meg.</i>
$= \frac{256}{3}$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

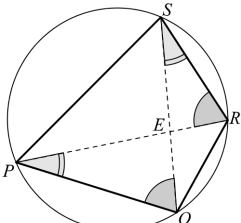
6. c) harmadik megoldás		
Állítsuk sorba a sakkozókat, ezt $8! (= 40\,320)$ -féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
A sorba állított sakkozók közül az 1–2., a 3–4., az 5–6., illetve a 7–8. helyen állók játsszanak egymással.	1 pont	
Ekkor a mérkőzések összes lehetséges sorrendjét és egy-egy mérkőzésen belül a két sakkozó sorrendjét is figyelembe vettük.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
(A mérkőzések sorrendjét azonban nem kell figyelembe venni, ezért) osztani kell a négy mérkőzés lehetséges sorrendjeinek számával, $4!$ -sal,	1 pont	
valamint (a két sakkozó sorrendjét sem kell figyelembe venni egyik mérkőzésen belül sem, ezért) osztani kell $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ -nel is.	1 pont	
A lehetséges párosítások száma ezért $\frac{8!}{4! \cdot 2^4} = 105$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

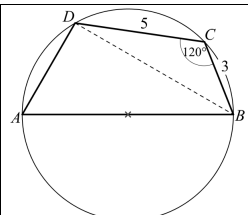
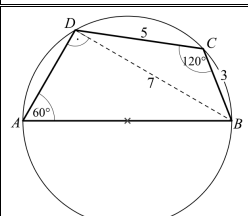
6. c) negyedik megoldás		
Válasszunk ki 4 sakkozót, ezt $\binom{8}{4} (= 70)$ különböző módon tehetjük meg.	1 pont	
A többi 4 sakkozót $4! (= 24)$ különböző módon oszthatjuk szét a kiválasztott 4 sakkozó között (minden egyes „szétosztás” az első forduló egy-egy párosításának felel meg).	1 pont	
Így $\binom{8}{4} \cdot 4! (= 1680)$ párosítást kapunk az első fordulóra.	1 pont	
Ezek között az első forduló minden lehetséges párosítása szerepel, mégpedig mindegyik pontosan $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ -szer (hiszen a forduló négy mérkőzése két-két résztvevőjének sorrendje mindegyik esetben megcserélhető).	2 pont	
Az első forduló különböző párosításainak száma ezért $\frac{\binom{8}{4} \cdot 4!}{2^4} = 105$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

3. a)		
Ha a számtani sorozat első tagja a , akkor a 3. tagja $a + 3,2$. A 7. tag $a + 9,6$.	1 pont	
A mértani sorozat tulajdonsága miatt $(a + 3,2)^2 = a(a + 9,6)$.	1 pont	
$a^2 + 6,4a + 10,24 = a^2 + 9,6a$	1 pont	
$3,2a = 10,24$, amiből $a = 3,2$.	1 pont	
A három szám: 3,2; 6,4; 12,8.	1 pont	
Ellenőrzés: ezek valóban tekinthetők egy (2 kvóciensű) mértani sorozat első három tagjának.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

3. b)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Például az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ számsorozat	1 pont	
konvergens, az értékkészlete azonban végtelen számhalmaz.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

3. c)		
Megfordítás: Ha az $\{a_n\}$ számsorozat értékkészlete véges számhalmaz, akkor az $\{a_n\}$ sorozat konvergens.	1 pont	
A megfordított állítás hamis.	1 pont	
Például a $\{(-1)^n\}$ sorozat	1 pont	
értékkészlete véges ($\{-1; 1\}$), de a sorozat nem konvergens.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. a)			
	Az átlók metszéspontját jelölje E. A kerületi szögek tétele miatt $PQS\angle = PRS\angle$ és $QPR\angle = QSR\angle$ (azonos ívhez tartozó kerületi szögek).		2 pont
	A PEQ és az SER háromszögekben két-két szög megegyezik (így a harmadik is), ezért ez a két háromszög hasonló.		1 pont
	Ugyanígy bizonyíthatjuk a QER és a PES háromszögek hasonlóságát is.		1 pont
	Összesen:		4 pont

4. b)			
BCD háromszögben felírjuk a koszinusztételt: $BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$.			1 pont
$BD = 7$ (cm)			1 pont
(A húrnégyszögek tétele miatt) az $ABCD$ négyszög DAB szöge $(180^\circ - 120^\circ =) 60^\circ$ -os,			1 pont
a Thalész-tétel miatt pedig $ADB\angle = 90^\circ$, ezért az ADB háromszög egy szabályos háromszög fele.			1 pont*
$AD = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4,04$ (cm),			1 pont*
$AB = 2AD \approx 8,08$ (cm).			1 pont*
Színusztétellel a BCD háromszögből: $\frac{\sin CBD\angle}{5} = \frac{\sin 120^\circ}{7}$, $(\sin CBD\angle = \frac{5 \cdot \sin 120^\circ}{7} \approx 0,6186)$.			1 pont**
$CBD\angle \approx 38,2^\circ$ (mert csak hegyesszög lehet)			1 pont**
$ABC\angle \approx (30^\circ + 38,2^\circ =) 68,2^\circ$ és $ADC\angle (= 180^\circ - ABC\angle) \approx 111,8^\circ$.			1 pont**
Összesen:		10 pont	

6. c) első megoldás			
Az első mérkőzés két résztvevőjét $\binom{8}{2} (= 28)$ -féleképpen választhatjuk ki.		1 pont	
A második mérkőzés résztvevőit (a maradék hat sakkozó közül) $\binom{6}{2} (= 15)$ -féleképpen választhatjuk ki.		2 pont	
Hasonlóan a harmadik mérkőzés résztvevőit (a maradék négy sakkozó közül) $\binom{4}{2} (= 6)$ -féleképpen választhatjuk ki. A negyedik mérkőzést az ezek után megmaradt két sakkozó játssza (ez 1 lehetőség).		1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A lehetséges párosítások száma (a mérkőzések sorrendjét is figyelembe véve) a fentiek szorzata,		1 pont	
(de a mérkőzések sorrendjét nem kell figyelembe venni, ezért) osztva a négy mérkőzés lehetséges sorrendjeinek számával, $4!$ -sal, azaz		1 pont	
$\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{4!} = 105$.		1 pont	
Összesen:		6 pont	

6. c) második megoldás			
Válasszunk ki tetszőlegesen egy sakkozót.		1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az ő ellenfelét (a többi sakkozó közül) 7-féleképpen választhatjuk ki.		1 pont	
Folytatva ezt az eljárást a maradék hat sakkozó közül válasszunk ki tetszőlegesen egyet, az ő ellenfelét 5-féleképpen választhatjuk ki, majd a maradék négy sakkozó közül kiválasztva egyet, az ő ellenfelét 3-féleképpen választhatjuk ki. A negyedik párost az ezek után megmaradt két sakkozó alkotja (ez 1 lehetőség).		2 pont	
(Ez az eljárás minden lehetőséget megad, és mindegyiket pontosan egyszer, ezért) a lehetséges párosítások száma a fentiek szorzata, azaz		1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$.		1 pont	
Összesen:		6 pont	

Ennek a csúcsnak a fokszáma tehát legalább 3 lesz. (Az állítást bizonyítottuk.)	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy konkrét nyolc- vagy kilencélű nyolcpontú gráfot rajzol, amelyben minden csúcs fokszáma legalább 2, majd az ábrája alapján bizonyítottnak tekinti az állítást, akkor ezért 1 pontot kapjon.

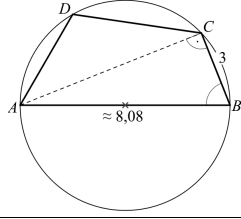
6. b) első megoldás		
Egy szabályos nyolcszög oldalai és átlói számának összege 28.	1 pont	
A 28 szakasz közül négyet $\binom{28}{4} (= 20\,475)$ -féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	
Kedvező eset az, amikor mind a 4 szakaszt az A csúcsból induló 7 szakasz közül választjuk ki.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ezt $\binom{7}{4} (= 35)$ -féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
A kérdéses valószínűség így $\frac{\binom{7}{4}}{\binom{28}{4}} =$	1 pont	
$= \frac{1}{585} (\approx 0,0017)$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

6. b) második megoldás		
Egy szabályos nyolcszög oldalai és átlói számának összege 28.	1 pont	
Egy csúcsból összesen 7 szakasz indul.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Annak a valószínűsége, hogy az első, második, harmadik, majd negyedik kiválasztott szakasz is az A csúcsból indul, rendre $\frac{7}{28}, \frac{6}{27}, \frac{5}{26}$, majd $\frac{4}{25}$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség ezek szorzata, tehát $\frac{7}{28} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{5}{26} \cdot \frac{4}{25} =$	1 pont	
$= \frac{1}{585} (\approx 0,0017)$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

A *-gal jelzett 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

Az ADB derékszögű háromszögben $\sin 60^\circ = \frac{7}{AB}$.	1 pont	$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{7}{AD}$
$AB \left(= \frac{14}{\sqrt{3}} \right) \approx 8,08$ (cm).	1 pont	$AD \left(= \frac{7}{\sqrt{3}} \right) \approx 4,04$ cm
(Pitagorasz-tétellel vagy újabb szögfüggvénnyel) $AD \approx 4,04$ cm.	1 pont	$AB \approx 8,08$ cm

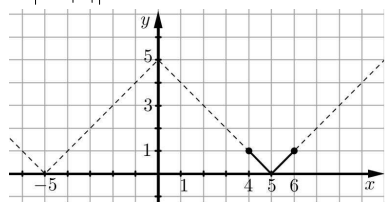
A **-gal jelzett 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

 A Thalész-tétel miatt az ABC háromszög derékszögű.	1 pont	
$\cos \angle ABC = \frac{BC}{AB} \approx 0,3712$,	1 pont	
innen $\angle ABC \approx 68,2^\circ$ és $\angle ADC (= 180^\circ - \angle ABC) \approx 111,8^\circ$.	1 pont	

II.

5. a) első megoldás		
$5 - x = -3$ esetén $ x = 8$,	1 pont	
$5 - x = 3$ esetén $ x = 2$.	1 pont	
Ilyen elemei nincsenek az alaphalmaznak, ezért az eredeti egyenlet megoldáshalmaza az üres halmaz.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

5. a) második megoldás		
Mivel az adott alaphalmazon $ x = x$, ezért az egyenlet az $ 5 - x = 3$ egyenlettel ekvivalens.	2 pont	
Ez az alaphalmaz egyetlen elemére sem teljesül (hiszen az alaphalmaz elemei legfeljebb 1-gyel térnek el az 5-től), ezért az egyenlet megoldáshalmaza az üres halmaz.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

5. a) harmadik megoldásAz $x \mapsto |5 - |x||$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény ábrázolása:

2 pont

Ez a függvény a $[4; 6]$ alaphalmazon nem veszi fel a 3 függvényértéket, ezért az eredeti egyenletnek nincs megoldása.

1 pont

Összesen: 3 pont**5. b) első megoldás**

(Négyzetre emelve:)

$$2x - 3 = x + 10 + 1 - 2\sqrt{x+10}$$

1 pont

$$2\sqrt{x+10} = 14 - x$$

1 pont

(Négyzetre emelve és rendezve:)

$$4(x+10) = 196 + x^2 - 28x$$

1 pont

$$x^2 - 32x + 156 = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = 26$$

1 pont

Ellenőrzés: A 6 (eleme az alaphalmaznak és) kielégíti az eredeti egyenletet (behelyettesítés után mindkét oldalon 3-at kapunk),

1 pont

a 26 pedig hamis gyök.

1 pont

Összesen: 6 pont**5. b) második megoldás**A $[4; 6]$ alaphalmazon mindkét oldal (értelmezve van és) pozitív, ezért itt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

1 pont

 $x \geq 1,5$ miatt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$2x - 3 = x + 10 + 1 - 2\sqrt{x+10}$$

1 pont

$$2\sqrt{x+10} = 14 - x$$

A kapott egyenlet mindkét oldala pozitív a $[4; 6]$ alaphalmazon, ezért itt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

1 pont

 $x \leq 14$ miatt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$4(x+10) = 196 + x^2 - 28x$$

1 pont

$$x^2 - 32x + 156 = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = 26$$

1 pont

Az ekvivalencia miatt a 6 az egyetlen gyöke az egyenletnek.

1 pont

Összesen: 6 pont**5. c)**A $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ ($\cos x$ -ben másodfokú) egyenlet teljesül, ha $\cos x = -1$ vagy $\cos x = 0,5$.

2 pont

(A megadott egyenlőtlenség $\cos x$ -ben másodfokú tagjának együtthatója pozitív, ezért) $-1 \leq \cos x \leq 0,5$.

1 pont

 $-1 \leq \cos x$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén (így az alaphalmaz minden elemére is) igaz.

1 pont*

($[4; 6] \subset [\pi; 2\pi]$ miatt) a koszinuszfüggvény a $[4; 6]$ alaphalmazon szigorúan monoton növekedő,

1 pont*

*Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.*és itt $\cos x = 0,5$, ha $x = \frac{5\pi}{3}$ ($\approx 5,24$),

1 pont*

ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left[4; \frac{5\pi}{3}\right]$.

1 pont*

$$4 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

Összesen: 7 pont*Megjegyzések: 1. Ha a vizsgázó megoldásában nem veszi figyelembe a megadott alaphalmazt, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.**2. A *-gal jelzett 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az egységkörben az alaphalmaz a vonalkázott kör-cikkkel szemléltethető (a határoló sugarakhoz tartozó középponti szögek 4 radián, illetve 6 radián).

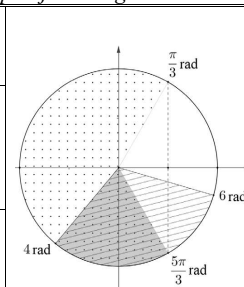
1 pont

A $-1 \leq \cos x \leq 0,5$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát a $[0; 2\pi]$ halmazon a pöttyözött körcikk szemlélteti (ez a $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ intervallumnak felel meg).

2 pont

A két halmaz metszete (szürke körcikk) a $\left[4; \frac{5\pi}{3}\right]$ halmazt szemlélteti. Ez az eredeti egyenlet megoldáshalmaza.

1 pont

**6. a) első megoldás**Ha minden csúcshoz fozsáma legfeljebb 2 lenne, akkor G -nek összesen legfeljebb 8 éle lehetne.

2 pont

Mivel G -nek 9 éle van, ezért ellentmondásra jutottunk.

1 pont

A csúcsok között tehát van olyan, amelyiknek a fokszáma legalább 3. (Az állítást bizonyítottuk.)

1 pont

Összesen: 4 pont**6. a) második megoldás** G csúcsainak fokszámát összeadva az élek számának kétszeresét, azaz 18-at kapunk eredményül.

1 pont

Ha ezt a 18-at egy (kezdetben üres) 8 csúcspontú gráf csúcsai között akarjuk egyesével „szétosztani”, akkor a skatulyaelv miatt biztosan lesz olyan csúcs, amelynek a fokszámát legalább háromszor növeljük meg 1-gyel.

2 pont