ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2016. május 3.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A mért tömegek között nincs 490 dkg-nál kisebb, tehát az első feltétel teljesül.	1 pont	
Az 5 kg-tól való eltérések (dkg-ban) rendre 6, 9, 7, 12, 8, 17, 7, 12.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az eltérések átlaga $\left(\frac{78}{8}=\right)$ 9,75 (dkg).	1 pont	
Az árusítást engedélyezik.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. b)		
A mért adatok átlaga $\left(\frac{4032}{8}=\right)$ 504 (dkg),	1 pont	
szórása $\sqrt{\frac{2\cdot13^2+2\cdot11^2+2\cdot8^2+4^2+2^2}{8}}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel számolva helyesen válaszol.*
$=\sqrt{91}\approx 9{,}54$ (dkg).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. c) első megoldás		
Az eper $\left(1-\frac{7}{20}-\frac{3}{8}=\right)$ $\frac{11}{40}$ része III. osztályú.	1 pont	
Az összes eper együttes tömege $\left(33:\frac{11}{40}=\right)$ 120 kg.	1 pont	
Ebből I. osztályú (120 · 0,35 =) 42 kg, II. osztályú (120 – 33 – 42 =) 45 kg.	1 pont	
Az eredetileg tervezett árakkal számolva (42 · 800 + 45 · 650 + 33 · 450 =) 77 700 Ft lett volna a bevétel.	1 pont	
Ennek a 85%-a 66 045 Ft.	1 pont	
$\frac{66\,045}{120}=550{,}375$	1 pont	
Az akciós egységár 550 Ft/kg legyen.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**7 pont**	

1. c) második megoldás		
Az eper $\left(1-\frac{7}{20}-\frac{3}{8}=\right)\ \frac{11}{40}$ része III. osztályú.	1 pont	
Az eredetileg tervezett árakkal számolva az átlagos egységár kilogrammonként $0{,}35\cdot 800+\frac{3}{8}\cdot 650+\frac{11}{40}\cdot 450\ (=647{,}5)$ Ft lett volna.	3 pont	
A kereskedő bevétele akkor lesz az eredetileg tervezett bevétel 85%-a, ha az epret az eredeti átlagos egységár 85%-áért értékesíti.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az eredeti átlagos egységár 85%-a 550,375 Ft/kg.	1 pont	
Az akciós egységár 550 Ft/kg legyen.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**7 pont**	

2. a) első megoldás		
Az összes eset száma $\binom{10}{5}\ (=252)$.	1 pont	*Mindkét esetben ugyanannyi az összes eset száma.*
Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 2 fehér golyó $\binom{6}{2}\binom{4}{3}$ különböző módon fordulhat elő.	1 pont	
Az (egyszerre) kihúzott 5 golyó között 4 fehér golyó $\binom{6}{4}\binom{4}{1}$ különböző módon fordulhat elő.	1 pont	
A két valószínűség: $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{3}}{\binom{10}{5}}$, illetve $\frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}}$.	1 pont	$\binom{6}{2}=\binom{6}{4}$ *és* $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}$
Ez a két valószínűség egyenlő $\left(\frac{5}{21}\approx 0{,}238\right)$, tehát a tanuló kijelentése igaz.	1 pont	*miatt igaz a kijelentés.*
Összesen:	**5 pont**	

2. a) második megoldás		
(Ha egyesével, visszatevés nélkül húzzák ki a golyókat, és figyelembe vesszük a golyók sorrendjét, akkor) az összes eset száma: $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\ \ (=30\,240)$.	1 pont	*Mindkét esetben ugyanannyi az összes eset száma.*
Az 5 kihúzott golyó között 2 fehér golyó $\binom{5}{2}\cdot(6\cdot 5)\cdot(4\cdot 3\cdot 2)\ (=7200)$ különböző módon fordulhat elő,	1 pont	

4 fehér golyó pedig $\binom{5}{4}\cdot(6\cdot5\cdot4\cdot3)\cdot4\ (=7200)$ különböző módon.	1 pont	
A két valószínűség: $\dfrac{\binom{5}{2}\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}$, illetve $\dfrac{\binom{5}{4}\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}$.	1 pont	$2\cdot\binom{5}{2}=4\cdot\binom{5}{4}$
Ez a két valószínűség egyenlő $\left(\frac{5}{21}\approx0{,}238\right)$, tehát a tanuló kijelentése igaz.	1 pont	*miatt igaz a kijelentés.*
Összesen:	**5 pont**	

2. b) első megoldás		
Ha egyesével, visszatevéssel húzzák ki a golyókat, akkor az összes eset száma: $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\ (=10^5)$.	1 pont	
2 fehér golyót $\binom{5}{2}\cdot6^2\cdot4^3\ (=23\,040)$,	1 pont	
4 fehér golyót $\binom{5}{4}\cdot6^4\cdot4\ (=25\,920)$ különböző módon húzhatunk.	1 pont	
A két valószínűség (három tizedesjegyre kerekítve) 0,230, illetve 0,259.	1 pont	
A két valószínűség különbözik, a tanuló kijelentése ebben az esetben nem igaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

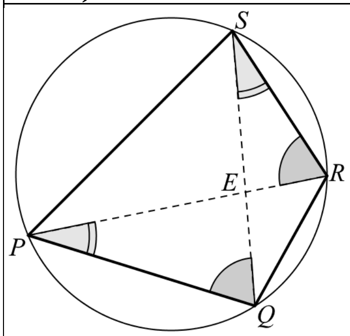
2. b) második megoldás		
A fehér golyó húzásának (állandó) valószínűsége 0,6, a piros golyóé 0,4.	1 pont	
2 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{2}\cdot0{,}6^2\cdot0{,}4^3$,	1 pont	
4 fehér golyó húzásának a valószínűsége $\binom{5}{4}\cdot0{,}6^4\cdot0{,}4$.	1 pont	
A két valószínűség (három tizedesjegyre kerekítve) 0,230, illetve 0,259.	1 pont	
A két valószínűség különbözik, a tanuló kijelentése ebben az esetben nem igaz.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a)		
Ha a számtani sorozat első tagja a, akkor a 3. tagja $a + 3{,}2$. A 7. tag $a + 9{,}6$.	1 pont	
A mértani sorozat tulajdonsága miatt $(a+3{,}2)^2 = a(a + 9{,}6)$.	1 pont	
$a^2 + 6{,}4a + 10{,}24 = a^2 + 9{,}6a$	1 pont	
$3{,}2a = 10{,}24$, amiből $a = 3{,}2$.	1 pont	
A három szám: 3,2; 6,4; 12,8.	1 pont	
Ellenőrzés: ezek valóban tekinthetők egy (2 kvóciensű) mértani sorozat első három tagjának.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

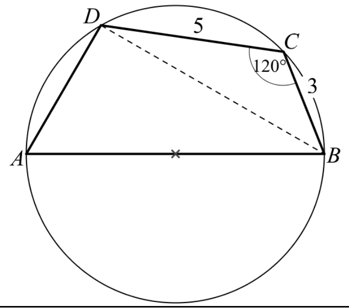
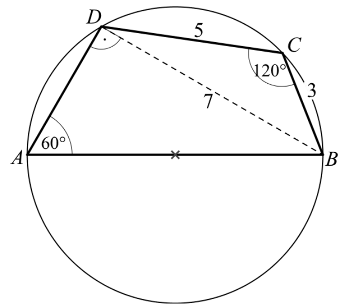
3. b)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Például az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ számsorozat	1 pont	
konvergens, az értékkészlete azonban végtelen számhalmaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c)		
Megfordítás: Ha az $\{a_n\}$ számsorozat értékkészlete véges számhalmaz, akkor az $\{a_n\}$ sorozat konvergens.	1 pont	
A megfordított állítás hamis.	1 pont	
Például a $\{(-1)^n\}$ sorozat	1 pont	
értékkészlete véges ($\{-1; 1\}$), de a sorozat nem konvergens.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a)

 Az átlók metszéspontját jelölje E. A kerületi szögek tétele miatt $PQS\angle = PRS\angle$ és $QPR\angle = QSR\angle$ (azonos ívhez tartozó kerületi szögek).	2 pont	*$PEQ\angle = SER\angle$, mert csúcsszögek.*
A PEQ és az SER háromszögekben két-két szög megegyezik (így a harmadik is), ezért ez a két háromszög hasonló.	1 pont	
Ugyanígy bizonyíthatjuk a QER és a PES háromszögek hasonlóságát is.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

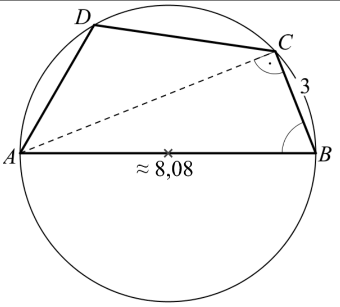
4. b)

BCD háromszögben felírjuk a koszinusztételt: $BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120°$.	1 pont	
$BD = 7$ (cm)	1 pont	
(A húrnégyszögek tétele miatt) az $ABCD$ négyszög DAB szöge (180° – 120° =) 60°-os,	1 pont	
a Thalész-tétel miatt pedig $ADB\angle = 90°$,	1 pont	
ezért az ADB háromszög egy szabályos háromszög fele.	1 pont*	
$AD = \dfrac{BD}{\sqrt{3}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} \approx 4{,}04$ (cm),	1 pont*	
$AB = 2AD \approx 8{,}08$ (cm).	1 pont*	
Szinusztétellel a BCD háromszögből: $\dfrac{\sin CBD\angle}{5} = \dfrac{\sin 120°}{7}$, ($\sin CBD\angle = \dfrac{5\cdot\sin 120°}{7} \approx 0{,}6186$).	1 pont**	
$CBD\angle \approx 38{,}2°$ (mert csak hegyesszög lehet)	1 pont**	
$ABC\angle \approx (30° + 38{,}2° =)\ 68{,}2°$ és $ADC\angle\ (= 180° - ABC\angle) \approx 111{,}8°$.	1 pont**	
Összesen:	**10 pont**	

*A *-gal jelzett 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az ADB derékszögű háromszögben $\sin 60° = \frac{7}{AB}$.	1 pont	$\text{tg}\,60° = \frac{7}{AD}$
$AB\left(=\frac{14}{\sqrt{3}}\right) \approx 8{,}08$ (cm).	1 pont	$AD\left(=\frac{7}{\sqrt{3}}\right) \approx 4{,}04$ cm
(Pitagorasz-tétellel vagy újabb szögfüggvénnyel) $AD \approx 4{,}04$ cm.	1 pont	$AB \approx 8{,}08$ cm

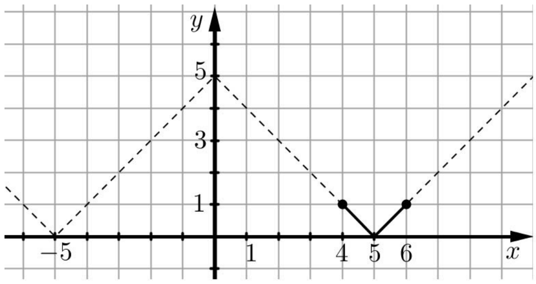
*A **-gal jelzett 3 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

 A Thalész-tétel miatt az ABC háromszög derékszögű.	1 pont	
$\cos ABC\angle = \frac{BC}{AB} \approx 0{,}3712$,	1 pont	
innen $ABC\angle \approx 68{,}2°$ és $ADC\angle\ (= 180° - ABC\angle) \approx 111{,}8°$.	1 pont	

II.

5. a) első megoldás		
$5 - \lvert x \rvert = -3$ esetén $\lvert x \rvert = 8$,	1 pont	
$5 - \lvert x \rvert = 3$ esetén $\lvert x \rvert = 2$.	1 pont	
Ilyen elemei nincsenek az alaphalmaznak, ezért az eredeti egyenlet megoldáshalmaza az üres halmaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. a) második megoldás		
Mivel az adott alaphalmazon $\lvert x \rvert = x$, ezért az egyenlet az $\lvert 5 - x \rvert = 3$ egyenlettel ekvivalens.	2 pont	
Ez az alaphalmaz egyetlen elemére sem teljesül (hiszen az alaphalmaz elemei legfeljebb 1-gyel térnek el az 5-től), ezért az egyenlet megoldáshalmaza az üres halmaz.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

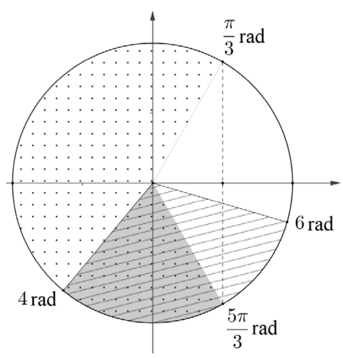
5. a) harmadik megoldás		
Az $x \mapsto \lvert 5-\lvert x\rvert \rvert$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény ábrázolása: 	2 pont	
Ez a függvény a [4; 6] alaphalmazon nem veszi fel a 3 függvényértéket, ezért az eredeti egyenletnek nincs megoldása.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b) első megoldás		
(Négyzetre emelve:) $2x-3=x+10+1-2\sqrt{x+10}$	1 pont	
$2\sqrt{x+10}=14-x$	1 pont	
(Négyzetre emelve és rendezve:) $4(x+10)=196+x^2-28x$ $x^2-32x+156=0$	1 pont	
$x_1=6$, $x_2=26$	1 pont	
Ellenőrzés: A 6 (eleme az alaphalmaznak és) kielégíti az eredeti egyenletet (behelyettesítés után mindkét oldalon 3-at kapunk),	1 pont	
a 26 pedig hamis gyök.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. b) második megoldás		
A [4; 6] alaphalmazon mindkét oldal (értelmezve van és) pozitív, ezért itt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.	1 pont	$x \geq 1{,}5$ *miatt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.*
$2x-3=x+10+1-2\sqrt{x+10}$	1 pont	
$2\sqrt{x+10}=14-x$ A kapott egyenlet mindkét oldala pozitív a [4; 6] alaphalmazon, ezért itt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.	1 pont	$x \leq 14$ *miatt a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.*
$4(x+10)=196+x^2-28x$ $x^2-32x+156=0$	1 pont	
$x_1=6$, $x_2=26$	1 pont	
Az ekvivalencia miatt a 6 az egyetlen gyöke az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. c)		
A $2\cos^2 x+\cos x-1=0$ ($\cos x$-ben másodfokú) egyenlet teljesül, ha $\cos x = -1$ vagy $\cos x = 0,5$.	2 pont	
(A megadott egyenlőtlenség $\cos x$-ben másodfokú tagjának együtthatója pozitív, ezért) $-1 \le \cos x \le 0,5$.	1 pont	
$-1\le \cos x$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén (így az alaphalmaz minden elemére is) igaz.	1 pont*	
($[4;\ 6] \subset [\pi;\ 2\pi]$ miatt) a koszinuszfüggvény a $[4;\ 6]$ alaphalmazon szigorúan monoton növekedő,	1 pont*	*Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.*
és itt $\cos x = 0,5$, ha $x=\frac{5\pi}{3}$ ($\approx 5,24$),	1 pont*	
ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left[4;\frac{5\pi}{3}\right]$.	1 pont*	$4 \le x \le \frac{5\pi}{3}$
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések: 1. Ha a vizsgázó megoldásában nem veszi figyelembe a megadott alaphalmazt, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.
*2. A *-gal jelzett 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az egységkörben az alaphalmaz a vonalkázott körcikkel szemléltethető (a határoló sugarakhoz tartozó középponti szögek 4 radián, illetve 6 radián).	1 pont	
A $-1 \le \cos x \le 0,5$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát a $[0;\ 2\pi]$ halmazon a pöttyözött körcikk szemlélteti (ez a $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$ intervallumnak felel meg).	2 pont	
A két halmaz metszete (szürke körcikk) a $\left[4;\frac{5\pi}{3}\right]$ halmazt szemlélteti. Ez az eredeti egyenlet megoldáshalmaza.	1 pont	

6. a) **első megoldás**		
Ha minden csúcs fokszáma legfeljebb 2 lenne, akkor G-nek összesen legfeljebb 8 éle lehetne.	2 pont	
Mivel G-nek 9 éle van, ezért ellentmondásra jutottunk.	1 pont	
A csúcsok között tehát van olyan, amelyiknek a fokszáma legalább 3. (Az állítást bizonyítottuk.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. a) **második megoldás**		
G csúcsainak fokszámát összeadva az élek számának kétszeresét, azaz 18-at kapunk eredményül.	1 pont	
Ha ezt a 18-at egy (kezdetben üres) 8 csúcspontú gráf csúcsai között akarjuk egyesével „szétosztani”, akkor a skatulyaelv miatt biztosan lesz olyan csúcs, amelynek a fokszámát legalább háromszor növeljük meg 1-gyel.	2 pont	

Ennek a csúcsnak a fokszáma tehát legalább 3 lesz. (Az állítást bizonyítottuk.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy konkrét nyolc- vagy kilencélű nyolcpontú gráfot rajzol, amelyben minden csúcs fokszáma legalább 2, majd az ábrája alapján bizonyítottnak tekinti az állítást, akkor ezért 1 pontot kapjon.

6. b) első megoldás		
Egy szabályos nyolcszög oldalai és átlói számának összege 28.	1 pont	
A 28 szakasz közül négyet $\binom{28}{4}$ (= 20 475)-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma).	1 pont	
Kedvező eset az, amikor mind a 4 szakaszt az *A* csúcsból induló 7 szakasz közül választjuk ki.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ezt $\binom{7}{4}$ (= 35)-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
A kérdéses valószínűség így $\frac{\binom{7}{4}}{\binom{28}{4}} =$	1 pont	
$= \frac{1}{585}$ (≈ 0,0017).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. b) második megoldás		
Egy szabályos nyolcszög oldalai és átlói számának összege 28.	1 pont	
Egy csúcsból összesen 7 szakasz indul.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy az első, második, harmadik, majd negyedik kiválasztott szakasz is az *A* csúcsból indul, rendre $\frac{7}{28}$, $\frac{6}{27}$, $\frac{5}{26}$, majd $\frac{4}{25}$.	2 pont	
A kérdéses valószínűség ezek szorzata, tehát $\frac{7}{28}\cdot\frac{6}{27}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{4}{25} =$	1 pont	
$= \frac{1}{585}$ (≈ 0,0017).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c) első megoldás		
Az első mérkőzés két résztvevőjét $\binom{8}{2}$(= 28)-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
A második mérkőzés résztvevőit (a maradék hat sakkozó közül) $\binom{6}{2}$(= 15)-féleképpen választhatjuk ki. Hasonlóan a harmadik mérkőzés résztvevőit (a maradék négy sakkozó közül) $\binom{4}{2}$(= 6)-féleképpen választhatjuk ki. A negyedik mérkőzést az ezek után megmaradt két sakkozó játssza (ez 1 lehetőség).	2 pont	
A lehetséges párosítások száma (a mérkőzések sorrendjét is figyelembe véve) a fentiek szorzata,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(de a mérkőzések sorrendjét nem kell figyelembe venni, ezért) osztva a négy mérkőzés lehetséges sorrendjeinek számával, 4!-sal, azaz	1 pont	
$\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{4!}=105$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c) második megoldás		
Válasszunk ki tetszőlegesen egy sakkozót.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az ő ellenfelét (a többi sakkozó közül) 7-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Folytatva ezt az eljárást a maradék hat sakkozó közül válasszunk ki tetszőlegesen egyet, az ő ellenfelét 5-féleképpen választhatjuk ki, majd a maradék négy sakkozó közül kiválasztva egyet, az ő ellenfelét 3-féleképpen választhatjuk ki. A negyedik párost az ezek után megmaradt két sakkozó alkotja (ez 1 lehetőség).	2 pont	
(Ez az eljárás minden lehetőséget megad, és mindegyiket pontosan egyszer, ezért) a lehetséges párosítások száma a fentiek szorzata, azaz	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$7\cdot5\cdot3\cdot1=105$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c) harmadik megoldás		
Állítsuk sorba a sakkozókat, ezt 8!(= 40 320)-féleképpen tehetjük meg.	1 pont	
A sorba állított sakkozók közül az 1–2., a 3–4., az 5–6., illetve a 7–8. helyen állók játsszanak egymással.	1 pont	
Ekkor a mérkőzések összes lehetséges sorrendjét és egy-egy mérkőzésen belül a két sakkozó sorrendjét is figyelembe vettük.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A mérkőzések sorrendjét azonban nem kell figyelembe venni, ezért) osztani kell a négy mérkőzés lehetséges sorrendjeinek számával, 4!-sal,	1 pont	
valamint (a két sakkozó sorrendjét sem kell figyelembe venni egyik mérkőzésen belül sem, ezért) osztani kell $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$-nel is.	1 pont	
A lehetséges párosítások száma ezért $\frac{8!}{4! \cdot 2^4} = 105$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. c) negyedik megoldás		
Válasszunk ki 4 sakkozót, ezt $\binom{8}{4}$(= 70) különböző módon tehetjük meg.	1 pont	
A többi 4 sakkozót 4!(= 24) különböző módon oszthatjuk szét a kiválasztott 4 sakkozó között (minden egyes „szétosztás” az első forduló egy-egy párosításának felel meg).	1 pont	
Így $\binom{8}{4} \cdot 4!$ (= 1680) párosítást kapunk az első fordulóra.	1 pont	
Ezek között az első forduló minden lehetséges párosítása szerepel, mégpedig mindegyik pontosan $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$-szer (hiszen a forduló négy mérkőzése két-két résztvevőjének sorrendje mindegyik esetben megcserélhető).	2 pont	
Az első forduló különböző párosításainak száma ezért $\frac{\binom{8}{4} \cdot 4!}{2^4} = 105$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a)		
$k(x) = 12 - (2^x - 1)^2 =$	1 pont	
$(= 12 - (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1)) = 12 - (4^x - 2^{x+1} + 1)$	1 pont	
A zárójel felbontása után $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$ adódik, tehát igaz az állítás.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. b)		
Megoldandó a $2^{3x+2} - 1 < 3(2^x - 1) + 2$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán.	2 pont	
$4 \cdot 2^{3x} - 1 < 3 \cdot 2^x - 1$	1 pont	
$2^x (4 \cdot 2^{2x} - 3) < 0$	1 pont	
Mivel minden valós szám esetén $2^x > 0$, ezért az egyenlőtlenség ekvivalens a $4^x < 0{,}75$ egyenlőtlenséggel.	1 pont	$2^{2x} < \frac{3}{4}$
A 4-es alapú exponenciális/logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért	1 pont	*A 2-es alapú exponenciális/logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért*
$x < \log_4 0{,}75 \; (= -1 + \log_4 3 \approx -0{,}2075)$.	1 pont	$x < 0{,}5 \log_2 0{,}75$ $(-1 + \log_2 \sqrt{3} \approx -0{,}2075)$
Összesen:	**7 pont**	

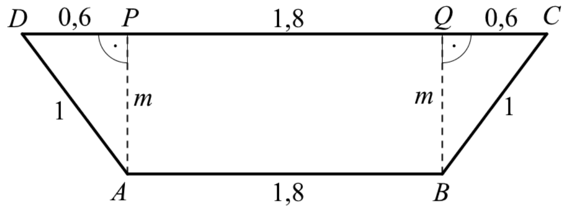
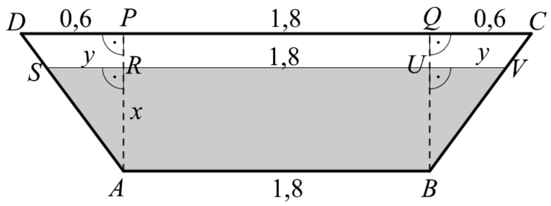
7. c)		
A két görbe közös pontjainak első koordinátáját a $12 - x^2 = -4$ egyenlet megoldásai adják:	1 pont	
–4 és 4.	1 pont	
(Mivel a [–4; 4] intervallumon a h függvény grafikonja az $x \mapsto -4$ függvény grafikonja fölött helyezkedik el, ezért) a kérdezett terület: $\int_{-4}^{4} (16 - x^2)\,dx =$	1 pont	
$= \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{4} =$	1 pont	
$= \left(64 - \frac{64}{3}\right) - \left(-64 - \left(-\frac{64}{3}\right)\right) = \frac{128}{3} - \left(-\frac{128}{3}\right) =$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a határozott integrál értékét számológéppel jól határozza meg.*
$= \frac{256}{3}$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a) **első megoldás**		
0,99 annak a valószínűsége, hogy egy adott szem meggyből az automata eltávolítja a magot.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A komplementer esemény (0 vagy 1 mag kerül az üvegbe) valószínűsége $0{,}99^{120}+\binom{120}{1}\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{119}$.	2 pont	$\approx 0{,}2994+0{,}3629$
Ezért a kérdezett valószínűség: $1-0{,}99^{120}-\binom{120}{1}\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{119}$,	1 pont	
ami körülbelül 0,34.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a) **második megoldás**		
0,99 annak a valószínűsége, hogy egy adott szem meggyből az automata eltávolítja a magot.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kérdezett valószínűség: $\sum_{k=2}^{k=120}\binom{120}{k}\cdot 0{,}01^{k}\cdot 0{,}99^{120-k}$.	1 pont	
(Az egyes tagok kiszámítása és valószínűségi megfontolások alapján arra jutunk, hogy) a fenti 119 tagú összeg hetedik tagjától kezdve mindegyik tag kisebb $2{,}8\cdot 10^{-5}$-nél,	1 pont	
ezért az utolsó 113 tag összege nem nagyobb 0,0032-nél.	1 pont	
Mivel az első hat tag összege kevesebb 0,338-nál, ezért a kérdezett valószínűség körülbelül 0,34.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: *A* $\sum_{k=2}^{120}\binom{120}{k}\cdot 0{,}01^{k}\cdot 0{,}99^{120-k}$ *összeg első 9 tagja és a megfelelő tagok összege az alábbi táblázatban látható.*

i	$\binom{120}{i}\cdot 0{,}01^{i}\cdot 0{,}99^{120-i}$	$\sum_{k=2}^{i}\binom{120}{k}\cdot 0{,}01^{k}\cdot 0{,}99^{120-k}$
2	$\approx 0{,}2181$	$\approx 0{,}2181$
3	$\approx 0{,}0867$	$\approx 0{,}3047$
4	$\approx 0{,}0256$	$\approx 0{,}3304$
5	$\approx 0{,}0060$	$\approx 0{,}3364$
6	$\approx 0{,}0012$	$\approx 0{,}3375$
7	$\approx 0{,}0002$	$\approx 0{,}3377$
8	$\approx 2{,}7\cdot 10^{-5}$	$\approx 0{,}3377$
9	$\approx 3{,}4\cdot 10^{-6}$	$\approx 0{,}3377$
10	$\approx 3{,}8\cdot 10^{-7}$	$\approx 0{,}3377$

8. b)		
(A hasáb alaplapja az *ABCD* húrtrapéz.)  Az ábra jelöléseit használva, az *APD* derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel: $m=\sqrt{1^2-0{,}6^2}=0{,}8$ (m).	1 pont	
A hasáb alaplapjának (az *ABCD* trapéznak) a területe: $\left(\frac{1{,}8+3}{2}\cdot 0{,}8=\right)1{,}92$ (m^2),	1 pont	
tehát a hasáb (a konténer) térfogata: $(1{,}92\cdot 2=)$ 3,84 m^3.	1 pont	
A tisztító folyadék *x* méter magasságban áll a konténerben. A folyadék egy olyan szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasábot tölt meg,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
amelynek a magassága 2 méter, az alaplapjának a területe pedig $\left(\frac{2{,}7}{2}=\right)1{,}35$ (m^2).	1 pont	
 Az (ábra szerinti) *APD* és *ARS* derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{SR}{AR}=\frac{DP}{AP}$,	1 pont	
azaz $\frac{y}{x}=\frac{0{,}6}{0{,}8}=\frac{3}{4}$.	1 pont	$y=0{,}75x$
$SV=1{,}8+2y=1{,}8+1{,}5x$, ezért (mivel az *ABVS* trapéz területe 1,35 m^2) $\frac{1{,}8+1{,}8+1{,}5x}{2}\cdot x=1{,}35$.	1 pont	
Ebből $1{,}5x^2+3{,}6x-2{,}7=0$,	1 pont	$5x^2+12x-9=0$
amelynek a gyökei 0,6 és –3.	1 pont	
(A –3 nem felel meg, tehát) a tisztító folyadék 0,6 méter magasságban áll a konténerben.	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

9. a) első megoldás		
$f(x)=\frac{1}{20}((x-900)^2-810\,000+950\,000)=$	2 pont	
$=\frac{1}{20}(x-900)^2+7000$	1 pont	
(Mivel $(x-900)^2 \geq 0$, és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = 900$, ezért) az óránkénti üzemanyag-fogyasztás 900 km/h átlagsebesség esetén minimális,	1 pont	
és ez a minimum 7000 kg óránként.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. a) második megoldás		
(Az egy óra alatti üzemanyag fogyasztásnak ott lehet minimuma, ahol az f függvény deriváltja 0.) $f'(x)=\frac{1}{10}x-90$	1 pont	
$f'(x)=0$ pontosan akkor, ha $x = 900$.	1 pont	
Mivel a második derivált pozitív ($f''(x)=0{,}1$), ezért itt valóban minimuma van az f függvénynek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol.*
Az óránkénti üzemanyag-fogyasztás 900 km/h átlagsebesség esetén lesz minimális,	1 pont	
és ez a minimum ($f(900) =$) 7000 kg óránként.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b)		
A repülési idő órában: $t=\frac{5580}{v}$.	1 pont	
Az út során elfogyasztott üzemanyag kg-ban: $t\cdot f(v)=\frac{5580}{v}\cdot\frac{1}{20}(v^2-1800v+950\,000)=$	1 pont	
$=279v-502\,200+\frac{265\,050\,000}{v}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. c)		
A pozitív valós számok halmazán értelmezett $g(v)=279v-502\,200+\dfrac{265\,050\,000}{v}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$g'(v)=279-\dfrac{265\,050\,000}{v^2}$	1 pont	
$g'(v)=0$, ha $v=100\sqrt{95}$ (≈ 974,68) (mert $v > 0$).	1 pont	
A deriváltfüggvény értékei $v<100\sqrt{95}$ esetén negatívak, $v>100\sqrt{95}$ esetén pedig pozitívak. Ezért a $100\sqrt{95}$ a g függvénynek abszolút minimumhelye.	1 pont	*Mivel a második derivált pozitív, ezért itt (abszolút) minimuma van a g függvénynek.*
(A deriváltfüggvény előjele alapján tehát) a g függvény a $[800;100\sqrt{95}]$ zárt intervallumon szigorúan csökkenő, a $[100\sqrt{95};1100]$ zárt intervallumon pedig szigorúan növekvő, ezért a g függvény [800; 1100] intervallumra való leszűkítése a maximumát vagy 800-nál vagy 1100-nál veszi fel.	1 pont	
$g(800) = 52\,312{,}5$ $g(1100) \approx 45\,654{,}5$	1 pont	
Tehát a modell szerint 800 km/h átlagsebesség esetén a legnagyobb,	1 pont	
és ($100\sqrt{95}\approx$) 975 km/h átlagsebesség esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: A szélsőértékhelyek függetlenek az út hosszától.