Azonosító jel: | | | | | | | | | | | | | | |

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. október 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2016. október 18. 8:00

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**

6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

10. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!

11. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Legyen az x pozitív valós szám.

a) Határozza meg x értékét úgy, hogy a 27 és az x számtani közepe 6-tal nagyobb legyen, mint a mértani közepük!

b) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az alábbi állítás! Válaszát indokolja!
Ha $x > 27$, akkor a 27-nek és az x-nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél.

c) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

a)	6 pont	
b)	3 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	12 pont	

2. Ádámék kerti zuhanyozójának tartálya egy feketére festett, forgáshenger alakú, acéllemezből készült hordó. A henger átmérője 50 cm, magassága 80 cm.

a) Számítsa ki a hordó térfogatát és felszínét! (A lemez vastagsága a hordó méreteihez viszonyítva elhanyagolható.) A térfogatot egész literre, a felszínt egész négyzetdeciméterre kerekítve adja meg!

A megadott méretű hordót úgy szerelik fel, hogy a forgástengelye vízszintes legyen. Ebben a helyzetben – a beömlő nyílás miatt – csak 40 cm magasságig lehet feltölteni vízzel.

b) A teljes térfogatának hány százalékáig tölthető fel a vízszintes tengelyű tartály?

a)	4 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	14 pont	

3. Egy kisváros vasútállomásáról munkanapokon 16 vonat indul, ezek indulási időpontjáról kimutatást vezetnek. A mellékelt táblázat ezt mutatja egy adott munkanap esetében.
A vasútvállalat pontosságra vonatkozó előírása szerint munkanapokon a vonatok legalább egyharmadának pontosan kell indulnia az állomásról, továbbá a késéseknek sem az átlaga, sem a mediánja nem haladhatja meg a 3 percet.

Indulás időpontja		
menetrend szerint	**ténylegesen**	**késés (perc)**
6:10	6:10	0
6:32	6:33	1
8:10	8:10	0
8:32	8:38	6
10:10	10:15	5
10:32	10:37	5
12:10	12:10	0
12:32	12:35	3
14:10	14:14	4
14:32	14:40	8
16:10	16:17	7
16:32	16:32	0
18:10	18:14	4
18:32	18:32	0
20:10		
20:32		

a) Legfeljebb hány perc késéssel indulhat a választott munkanapon az utolsó két vonat, hogy mindegyik előírás teljesüljön?
(A késéseket egész percekben mérik, a pontos indulást 0 perces késésnek számítják, a vonatok a menetrendben előírt indulási időpontjuknál korábban nem indulhatnak el.)

Egy külföldi utazás teljes árú vasúti menetjegye tavaly 209 euróba került. A menetjegy árát fél évvel ezelőtt p euróval felemelték, majd a múlt héten p százalékkal csökkentették ($p > 0$). Így a menetjegy ára 189 euró lett.

b) Határozza meg p értékét!

a)	7 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

4. Egy kis boltban három különböző ízesítésű csokoládé kapható: epres, málnás és narancsos.

a) Ha összesen öt tábla csokoládét akarunk ebben a boltban vásárolni, és csak az ízesítéseket vesszük figyelembe, akkor hány különböző lehetőségünk van?

A Finom csokoládé csomagolásán az áll, hogy a tömege 100 g. A gyártó cég a saját megbízhatóságát így reklámozza: 99,9% annak a valószínűsége, hogy egy csokoládészelet tömege legalább 100 gramm.

b) Ha a reklám állítása igaz, akkor legalább hány szelet Finom csokoládét kell (véletlenszerűen) vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 0,05 valószínűséggel legyen közöttük 100 grammnál kisebb tömegű is?
(Számításaiban a vásárlást modellezze visszatevéses mintavétellel!)

a)	5 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	11 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. **a)** Adja meg az $5x^2+5y^2-14x+22y-11=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

Adott a k kör, amelynek középpontja a $K(-5;\ 7)$ pont, és a sugara 10 egység. Ezen a körön belül adott az $A(-4;\ 14)$ pont.

b) Írja fel annak az A ponton áthaladó e egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a KA szakaszra!

c) Határozza meg a k kör e egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!

A koordináta-rendszer $P(x;\ y)$ pontját rácspontnak nevezzük, ha x és y egész számok.

d) Hány rácsponton megy át a k körvonal?

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. A 11. b osztály a következő tanévre nyolc kötelező olvasmányt kapott. Ezek közül kettő ugyanannak a szerzőnek a munkája, a többi szerzőnek csak egy-egy könyve van az olvasmányok között. Andi még nyáron szeretne elolvasni a nyolc könyv közül hármat. A nyarat a nagyszüleinél tölti, ezért a kiválasztott három könyvet magával viszi.

a) Hányféleképpen választhatja ki Andi, hogy melyik három könyvet vigye magával, ha azt szeretné, hogy a három könyv három különböző szerző műve legyen?

Az osztály tanulói közül hatan: Andi, Barbara, Csilla, Dani, Elek és Feri moziba mennek.

b) Hányféleképpen ülhetnek le hat egymás melletti székre úgy, hogy semelyik két lány ne üljön egymás mellett?

Három lány és *n* fiú véletlenszerű elrendezésben leül egy sorba.

c) Határozza meg *n* értékét, ha $\frac{1}{26}$ annak a valószínűsége, hogy a három lány egymás mellett ül!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Adott a valós számok halmazán értelmezett *f* és *g* függvény:

$$f(x) = x^2 - 2 \text{ és } g(x) = 10 + 10x - x^2.$$

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x) + g(x)| \geq 8$ egyenlőtlenséget!

b) Igazolja, hogy a [2; 8] intervallumon az *f* és a *g* függvény is csak pozitív értékeket vesz fel!

c) Határozza meg azt a *t* valós számot a [2; 8] intervallumban, amelyre teljesül, hogy az *f* függvény görbéje alatti terület a [2; *t*] intervallumon megegyezik a *g* függvény görbéje alatti területtel a [*t*; 8] intervallumon.
(Egy [*a*; *b*] intervallumon folytonos függvény görbéje alatti terület ezen az intervallumon megegyezik az *x* tengely, az $x = a$, az $x = b$ egyenletű egyenesek és a függvény grafikonja által meghatározott síkidom területével.)

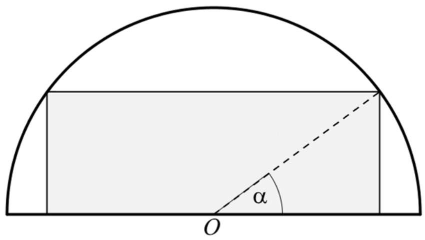
a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy színházban a jegyek az I., a II. vagy a III. árkategóriába tartoznak. Az egyik esti előadásra összesen 200 jegyet adtak el. Az eladott jegyek között a III. árkategóriájúak száma a másik két árkategóriába tartozó jegyek együttes számának kétharmada, az I., illetve II. árkategóriájú jegyek számának aránya pedig 9:11 volt.

a) Hány jegyet adtak el az egyes árkategóriákban?

Egy várrom területén szabadtéri színházat alakítanak ki. A tervrajz szerint a téglalap alakú színpadot az egyik bástya félkör alakban elhelyezkedő falmaradványai közé helyeznék el. A bástya belső átmérője 12 méter. (Az ábrán a tervrajz egy részlete látható: *O* a félkör középpontja, a téglalap csúcsába vezető sugár és az átmérő közötti szög pedig α; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.)



b) Hogyan kell megválasztani az α szöget, hogy a színpad területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a legnagyobb terület?

a)	6 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. **a)** Egy számtani sorozat első tagja 4, differenciája 5.
Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa 2.
Az 1000-nél kisebb pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mekkora a valószínűsége, hogy olyan számot választottunk, amely tagja valamelyik sorozatnak?

Válaszát $\frac{p}{q}$ alakban adja meg úgy, hogy p és q pozitív egészek és relatív prímek legyenek!

b) Három teljes gráf pontjainak száma egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a három gráf éleinek száma ekkor nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő tagja!
(Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		**51**	
	2.	14			
	3.	14			
	4.	11			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	elért pontszám **egész számra** kerekítve	programba beírt **egész** pontszám
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző