

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2016. október 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám** a mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott* kipipálás
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, ha csak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. b) második megoldás		
Az $n + 1$ pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n+1) - n(n-1)}{2} = n$ -nel több, mint az n pontú teljes gráf éleinek száma.	2 pont	
Ennek alapján ha d egy pozitív egész szám, akkor az $n + d$ pontú teljes gráfnak $n + (n+1) + \dots + (n+d-1) =$	1 pont	
$= nd + \frac{d(d-1)}{2}$ -vel több éle van, mint az n pontú gráfnak,	1 pont	
az $n + 2d$ pontú teljes gráfnak pedig $(n+d)d + \frac{d(d-1)}{2}$ -vel több éle van, mint az $n + d$ pontú teljes gráfnak.	1 pont	
Mivel $d > 0$, ezért $(n+d)d (= nd + d^2)$ nem lehet egyenlő nd -vel,	1 pont	
tehát a feladat állítása igaz.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
11. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
12. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
13. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A feladat szövege szerint: $\frac{x+27}{2} = \sqrt{27x} + 6$.	1 pont	
$x + 15 = 2\sqrt{27x}$	1 pont	
$x^2 + 30x + 225 = 108x$	1 pont	
$x^2 - 78x + 225 = 0$	1 pont	
Az egyenlet két gyöke $x = 3$ és $x = 75$.	1 pont	
Ellenőrzés: 3 és 27 számtani közepe 15, mértani közepe 9; 75 és 27 számtani közepe 51, mértani közepe 45. Tehát mindkét szám megfelelő.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

1. b)		
Az állítás igaz,	1 pont	
mert két különböző pozitív szám mértani közepe kisebb a számtani közepükénél.	2 pont	$\sqrt{27x} < \frac{27+x}{2}$ $0 < (x-27)^2$, mert $x > 27$.
Összesen:	3 pont	

1. c)		
Az állítás megfordítása: Ha az x -nek és a 27-nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél, akkor $x > 27$.	1 pont	
Az állítás hamis.	1 pont	
Egy megfelelő ellenpélda (bármelyik 27-nél kisebb pozitív valós szám).	1 pont	
Összesen:	3 pont	

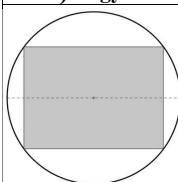
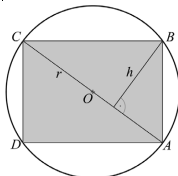
2. a)		
A henger magassága 8 dm, alapkörének sugara 2,5 dm.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó cm-ben számol, de a térfogatot jól számítja át literbe.</i>
$V = r^2 \pi m = 2,5^2 \cdot \pi \cdot 8 = 50\pi \approx 157$ (dm ³),	1 pont	
azaz körülbelül 157 liter.	1 pont	
$A = 2r\pi(r+m) = 2 \cdot 2,5 \cdot \pi \cdot (2,5+8) = 52,5\pi$, azaz körülbelül 165 dm ² .	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés:

- Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért összesen 1 pontot veszíten.
- Ha a vizsgázó valamelyik választát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszíten.

9. b) első megoldás		
Legyen a három teljes gráf pontjainak száma $a, a+d, a+2d$, ahol a és d pozitív egész számok.	1 pont	<i>Legyen a három teljes gráf pontjainak száma $a-d, a, a+d$, ahol a, d pozitív egész számok, $a > d$.</i>
Az élek száma rendre $\frac{a(a-1)}{2}, \frac{(a+d)(a+d-1)}{2}, \frac{(a+2d)(a+2d-1)}{2}$.	1 pont	<i>Az élek száma rendre $\frac{(a-d)(a-d-1)}{2}, \frac{a(a-1)}{2}, \frac{(a+d)(a+d-1)}{2}$.</i>
Indirekt módon tegyük fel, hogy az élek száma egy számtani sorozat három szomszédos tagja! Ekkor (mivel a szomszédos tagok sorrendje megegyezik a megfelelő gráfok pontjai számának sorrendjével)	1 pont	
$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{(a+2d)(a+2d-1)}{2} = \frac{(a+d)(a+d-1)}{2}$.		
$\frac{a^2 - a + a^2 + 2ad - a + 2ad + 4d^2 - 2d}{2} =$ $= a^2 + 2ad + d^2 - a - d$	1 pont	
$2a^2 + 4ad + 4d^2 - 2a - 2d =$ $= 2a^2 + 4ad + 2d^2 - 2a - 2d$	1 pont	$2a^2 + 2d^2 - 2a = 2a^2 - 2a$
$d = 0$	1 pont	
Mivel a feladat szövege szerint $d > 0$, ezért ellentmondásra jutottunk. Tehát a három gráf éleinek száma nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő tagja.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

8. b) negyedik megoldás

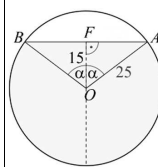
	Tükrözzük a félkört és a téglalapot is a félkör átmérőjének egyenesére, és egyesítsük a tükrözéssel kapott alakzatokat az eredetiekkel. (Egy téglalapot és ennek körülírt körét kapjuk; a kör átmérője 12 m.)	2 pont	
A legnagyobb területű színpadot akkor kapjuk, amikor a 12 m átmérőjű körbe írt téglalap területe (vagyis a színpad területének a kétszerese) a legnagyobb.		2 pont	
	Az ábra jelölése szerint: egy adott r sugarú körbe írt $ABCD$ téglalap területe $2rh$. Ez akkor a legnagyobb, ha h maximális, vagyis $h = r$, azaz a téglalap négyzet.	2 pont*	
Ekkor a keresett szög $\alpha = 45^\circ$,		2 pont	
a legnagyobb színpad területe pedig a négyzet területének a fele: 36 m^2 .		2 pont	
Összesen:	10 pont		

Megjegyzés: Ha a vizsgázó kijelenti, hogy az adott körbe írható legnagyobb területű téglalap a négyzet, de az állítását nem bizonyítja, akkor a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot kapjon.

9. a)

A számtani sorozat tagjai az $5k + 4$ alakú számok, ahol $k \in \mathbb{N}$.	1 pont	
A sorozat 1000-nél kisebb tagjainak száma 200. (A legnagyobb megfelelő tag $k = 199$ esetén 999.)	1 pont	
A mértani sorozat tagjai $3 \cdot 2^{n-1}$ alakúak ($n \in \mathbb{N}^+$), közöttük 9 olyan van, amelyek kisebb 1000-nél (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768).	1 pont	
A mértani sorozat $5k + 4$ alakú tagjai 4-re végződnek (a 9 végződés nem lehetséges), ezek a 24 és 384 (ez a két szám tehát mindkét sorozatnak tagja).	1 pont	
A két sorozatnak együtt összesen $200 + 9 - 2 = 207$ olyan tagja van, amely 1000-nél kisebb (kedvező esetek száma).	1 pont	
Az összes eset száma 999.	1 pont	
A kért valószínűség $\frac{207}{999}$ ($\approx 0,207$),	1 pont	
ami a kért alakban $\frac{23}{111}$.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

2. b)

A térfogatok aránya helyett elegendő a nagyobbik körszelet és a teljes kör területének arányát megadni.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
	Az ábra szerint az OFA derékszögű háromszögből: $\cos \alpha = \frac{15}{25} = 0,6$.	2 pont
Ebből $\alpha \approx 53,13^\circ$, tehát a nagyobbik körcikk középponti szöge $360^\circ - 2\alpha \approx 253,7^\circ$.	1 pont	
A nagyobbik körcikket körszeletté kiegészítő AOB egyenlő szárú háromszög alapja (dm-ben számolva): $AB = 2 \cdot \sqrt{2,5^2 - 1,5^2} = 4$ (dm),	1 pont	$T_1 = \frac{2,5^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} =$
területe $T_1 = \frac{4 \cdot 1,5}{2} = 3$ (dm ²).	1 pont	$= \frac{6,25 \cdot 0,96}{2} = 3$ (dm ²).
A teljes kör területe $T = 2,5^2 \pi \approx 19,63$ (dm ²),	1 pont*	
ezért a nagyobb körcikk területe $T_2 = \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \cdot 2,5^2 \pi \approx 13,84$ (dm ²),	1 pont*	$T_3 = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2,5^2 \pi \approx$
a nagyobb körszelet területe $T_1 + T_2 \approx 16,84$ (dm ²).	1 pont*	$\approx 5,80$ (dm ²).
A betölthető víz térfogata $\frac{16,84}{19,63} \cdot 100 \approx 86$ százaléka a tartály térfogatának.	1 pont*	$T - (T_3 - T_1)$
Összesen:	10 pont	

Megjegyzés:

- A vizsgázó teljes pontszámot kap, ha jól számítja ki a betölthető víz térfogatát (kb. 135 l), majd ennek és a henger térfogata arányának kiszámítása után helyesen adja meg a választ.
- A *-gal jelölt 4 pontot akkor is megkaphatja a vizsgázó, ha a körszelet és a kör területének

$$\text{értékét nem számítja ki, a keresett százaléktérteket pedig a } \frac{T_1 + T_2}{T} = \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \cdot 2,5^2 \pi + 3 = \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} + \frac{3}{6,25\pi} \approx 0,86 \text{ számítás segítségével határozza meg.}$$

- Ha a vizsgázó az üresen maradó résznek és a teljes térfogatnak az arányát adja meg válaszként, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.

3. a)

Az „egyharmados” előírás teljesüléséhez a napi 16 vonat közül legalább 6-nak pontosan (azaz 0 perces késéssel) kell indulnia.	1 pont	
A már elindított 14 vonat közül 5 a menetrendben előírt időpontban indult, tehát a két utolsó vonat közül legalább az egyiknek pontosan kell indulnia.	1 pont	
A másik vonat késése legyen x perc. A késések átlaga nem haladhatja meg a 3 percet: $\frac{0 \cdot 6 + 1 + 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 + 7 + 8 + x}{16} \leq 3.$	1 pont	
$x \leq 5$	1 pont	
A lehetséges (egész) értékek közül $x = 4$ és $x = 5$ esetén a medián nagyobb lenne 3-nál (mindkét esetben 3,5).	2 pont	
A másik vonat legfeljebb 3 percet késhet az indulásnál. (Ezekben az esetekben a medián valóban legfeljebb 3 lesz.)	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó szigorú egyenlőtlenséggel dolgozik, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.

3. b)

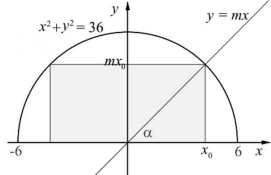
$(209 + p) \left(1 - \frac{p}{100} \right) = 189$	2 pont	
$(209 + p)(100 - p) = 18\,900$	1 pont	
$p^2 + 109p - 2000 = 0$	1 pont	
A másodfokú egyenlet két gyöke $p = 16$ és $p = -125$.	1 pont	
Ellenőrzés: Ha $p = 16$, akkor $209 + 16 = 225$, $225 \cdot 0,84 = 189$. (A negatív gyök nem felel meg a feladat szövegének.)	1 pont	
Tehát $p = 16$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó próbálgatással (például kétoldali becslésekkel) találja meg a helyes megoldást, de nem bizonyítja, hogy más megoldása nincs a feladatnak, akkor 3 pontot kapjon.

8. b) második megoldás

A téglalap oldalainak hossza (méterben): $6 \sin \alpha$, illetve $12 \cos \alpha$,	2 pont	
a téglalap területe pedig $72 \sin \alpha \cos \alpha$ (m^2).	1 pont	
Két pozitív szám mértani és négyzetes közepe közötti egyenlőtlenség miatt:	1 pont	
$72 \sin \alpha \cos \alpha \leq 72 \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2},$	2 pont	
vagyis $72 \sin \alpha \cos \alpha \leq 72 \cdot \frac{1}{2} = 36.$	1 pont	
Egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha $\sin \alpha = \cos \alpha$.	1 pont	
Ekkor $\tan \alpha = 1$, vagyis $\alpha = 45^\circ$.	1 pont	
Tehát a színpad maximális területe ($72 \sin 45^\circ \cos 45^\circ =$) 36 m^2 .	1 pont	
Összesen:	10 pont	

8. b) harmadik megoldás

	1 pont	
A félkör egyenlete: $x^2 + y^2 = 36$, ahol $y \geq 0$, az origón átmenő, α irányszögű egyenes egyenlete pedig: $y = mx$, ahol $m = \tan \alpha$ és $m > 0$.		
Ez az egyenes a félkört az $(x_0; mx_0)$ pontban metszi, tehát $x_0^2 + m^2 x_0^2 = 36$, ebből $x_0^2 = \frac{36}{m^2 + 1}$.	1 pont	
A téglalap területe $t(m) = 2x_0 \cdot mx_0 = 2mx_0^2 =$	1 pont	
$= 72 \cdot \frac{m}{m^2 + 1} \quad (m > 0).$	1 pont	
$t'(m) = 72 \cdot \frac{m^2 + 1 - 2m^2}{(m^2 + 1)^2} = 72 \cdot \frac{1 - m^2}{(m^2 + 1)^2}$	2 pont	
Szélsőérték ott lehet, ahol $t'(m) = 0$, ahonnan ($m > 0$ miatt) $m = 1$.	1 pont	
Ezen a helyen a derivált pozitívból negatívba megy át, tehát a függvénynek itt maximuma van.	1 pont	
A legnagyobb terület: $t(1) = 72 \cdot \frac{1}{1^2 + 1} =$ 36 m^2 ,	1 pont	
az α szög ekkor 45° -os.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

8. a) második megoldás		
Az eladott I., illetve II. kategóriás jegyek száma a feladat szövege szerint $9x$, illetve $11x$,	1 pont	
a III. kategóriás jegyek száma pedig $\frac{2}{3}(9x + 11x)$.	1 pont	
$20x + \frac{2}{3} \cdot 20x = 200$	1 pont	
$x = 6$	1 pont	
$9x = 54$, $11x = 66$, $\frac{2}{3}(54 + 66) = 80$.	1 pont	
Tehát I. kategóriás jegyből 54-et, II. kategóriásból 66-ot, III. kategóriásból pedig 80-at adtak el (így a feladat szövegének feltételei teljesülnek).	1 pont	
Összesen:	6 pont	

8. b) első megoldás		
A téglalap oldalainak hossza (méterben): $6 \sin \alpha$, illetve $12 \cos \alpha$,	2 pont	
a téglalap területe pedig $72 \sin \alpha \cos \alpha$ (m ²).	1 pont	
Keressük az f függvény maximumát, ha $f(\alpha) = 72 \sin \alpha \cos \alpha$ (és $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
(f deriválható, és) $f'(\alpha) = 72 \cos^2 \alpha - 72 \sin^2 \alpha$.	1 pont*	
Az f -nek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0: $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$.	1 pont*	
($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ figyelembe vételével) $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$, amiből $\alpha = \frac{\pi}{4}$.	1 pont*	45° is elfogadható.
Ezen a helyen az f' pozitívból negatívba megy át, tehát itt f -nek maximuma van.	1 pont*	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -144 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$, ami negatív.
A maximális területű téglalap oldalainak hossza (méterben) $3\sqrt{2}$ ($\approx 4,24$), illetve $6\sqrt{2}$ ($\approx 8,49$),	1 pont	
a legnagyobb terület ($3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} =$) 36 m ² .	1 pont	
Összesen:	10 pont	

A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

A $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ azonosság miatt $f(\alpha) = 36 \sin(2\alpha)$.	1 pont	
Az f maximális, ha $\sin(2\alpha)$ maximális.	1 pont	
(Mivel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ezért) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.	2 pont	

4. a) első megoldás		
A lehetőségeket pl. az epres ízesítésű csokoládék száma alapján számolhatjuk össze.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha az epres ízesítésű csokoládék száma 5: akkor 1 lehetőség van; 4: akkor 2 lehetőség (0 vagy 1 lehet a málnás ízesítésű, és minden esetben a narancsos ízesítésűek száma már meghatározott); 3: akkor 3 (0, 1, 2); 2: akkor 4 (0, 1, 2, 3); 1: akkor 5 (0, 1, 2, 3, 4); 0: akkor 6 (0, 1, 2, 3, 4, 5) lehetőség van.	3 pont	
Összesen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ lehetőség van.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

4. a) második megoldás		
(Háromféle csokoládéból öt darabot választunk ki úgy, hogy a kiválasztott csokoládék sorrendje nem számít, továbbá az egyes típusokat többször is kiválaszthatjuk.) A lehetőségek száma a háromféle ízesítés ötödosztályú ismétléses kombinációinak a száma,	2 pont	
azaz $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} =$	2 pont	
$= 21$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja az összes lehetséges esetet (mindegyiket pontosan egyszer, továbbá hibás lehetőséget nem ad meg), majd ez alapján helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

4. b)		
Tegyük fel, hogy n szelet csokoládét vásárolunk. (Ha a reklám állítása igaz, akkor) $0,999^n$ annak a valószínűsége, hogy mindegyik tömege legalább 100 g, így annak valószínűsége, hogy közöttük van 100 g-nál kisebb tömegű: $1 - 0,999^n$.	1 pont	
A feltétel szerint $1 - 0,999^n \geq 0,05$, azaz $0,999^n \leq 0,95$.	1 pont	
A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, tehát: $n \lg 0,999 \leq \lg 0,95$.	1 pont	<i>A 0,999 alapú exponenciális (logaritmus) függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért</i>
(Mivel $\lg 0,999$ negatív, ezért): $n \geq \frac{\lg 0,95}{\lg 0,999} (\approx 51,3)$.	1 pont	$n \geq \log_{0,999} 0,95 (\approx 51,3)$.
Legalább 52 szelet csokoládét kell vásárolnunk.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenlettel jól dolgozik, és ez alapján helyes választ ad, akkor 5 pontot kapjon. További 1 pontot akkor kaphat, ha utal arra, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik a kérdésre adott válasza (például a vásárolt csokoládészeletek számának növekedésével növekszik annak a valószínűsége is, hogy közöttük lesz 100 g-nál kisebb tömegű is).

II.

5. a)		
$x^2 + y^2 - 2,8x + 4,4y - 2,2 = 0$	1 pont	
Átalakítva: $(x - 1,4)^2 + (y + 2,2)^2 = 9$.	1 pont	
A kapott egyenletből következik, hogy a kör középpontja az $(1,4; -2,2)$ pont, sugara pedig 3 egység.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

5. b)		
$\vec{KA} = (-4; 14) - (-5; 7) = (1; 7)$ a keresett egyenes egy normálvektora,	1 pont	
az egyenes egyenlete $x + 7y = 94$.	2 pont	
Összesen:	3 pont	

7. c)		
(A $[2; 8]$ intervallumon a függvényértékek pozitívak, így) $\int_2^t (x^2 - 2) dx = \int_t^8 (-x^2 + 10x + 10) dx$.	1 pont	
$\left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_2^t = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{10x^2}{2} + 10x \right]_t^8$	2 pont	
$\left(\frac{t^3}{3} - 2t \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 \right) =$ $= \left(-\frac{8^3}{3} + \frac{10 \cdot 8^2}{2} + 10 \cdot 8 \right) - \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{10 \cdot t^2}{2} + 10 \cdot t \right)$	2 pont	
$5t^2 + 8t - 228 = 0$	1 pont	
A keresett szám az egyenlet $[2; 8]$ intervallumba eső gyöke: $t = 6$. ($t = -7,6$ nem lehetséges.)	1 pont	$\int_2^6 (x^2 - 2) dx = \frac{184}{3}$ $\int_6^8 (-x^2 + 10x + 10) dx = \frac{184}{3}$
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megmutatja, hogy a $t = 6$ megoldása a feladatnak, de nem igazolja, hogy más megoldás nincs, akkor 3 pontot kapjon.

8. a) első megoldás		
(Az eladott I., II. és III. kategóriás jegyek számát jelölje rendre a , b és c .) A feladat szövege szerint $a + b + \frac{2}{3}(a + b) = 200$,	1 pont	
ahonnan $a + b = 120$.	1 pont	
A 120-at 9 : 11 arányban felosztva: $a = 54$ és $b = 66$.	2 pont	
$c = (200 - 120 =) 80$	1 pont	
Tehát I. kategóriás jegyből 54-et, II. kategóriásból 66-ot, III. kategóriásból pedig 80-at adtak el (így a feladat szövegének feltételei teljesülnek).	1 pont	
Összesen:	6 pont	

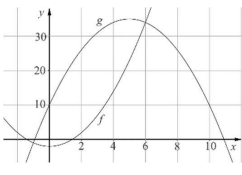
6. c)

A három egymás mellett ülő lányt egy egységnek tekintve ők és az n fiú $(n+1)!$ -féle sorrendben ülhetnek egymás mellé.	1 pont	
Mivel a három lány $3!(=6)$ -féle sorrendben ülhetnek egymás mellett, a kedvező esetek száma összesen $3! \cdot (n+1)!$.	1 pont	
Az $n+3$ személy $(n+3)!$ -féle különböző sorrendben ülhet le egymás mellé (összes eset száma).	1 pont	
Annak a valószínűsége tehát, hogy a három lány egymás mellett ül: $\frac{6 \cdot (n+1)!}{(n+3)!} = \frac{1}{26}$.	1 pont	
Egyszerűsítve: $\frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{26}$.	1 pont	
$n^2 + 5n - 150 = 0$	1 pont	
Az egyenlet két gyöke $n = 10$ és $n = -15$.	1 pont	
A -15 nem megoldása a feladatnak, tehát csak $n = 10$ lehetséges (és ez valóban megfelelő).	1 pont	
Összesen:	8 pont	

7. a)

Megoldandó a $ 10x + 8 \geq 8$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán.	1 pont	
(Az abszolútérték definíciója miatt) $10x + 8 \geq 8$, vagy	1 pont	
$10x + 8 \leq -8$,	1 pont	
tehát $x \geq 0$ vagy $x \leq -1,6$.	1 pont	A megoldáshalmaz: $]-\infty; -1,6] \cup [0; +\infty[$.
Összesen:	4 pont	

7. b)

Az f függvény minimumhelye $x = 0$, a $[2; 8]$ intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő.	1 pont	
$f(2) = 2 (> 0)$	1 pont	
$g(x) = -(x-5)^2 + 35$	1 pont	
A g függvény maximumhelye $x = 5$, az adott intervallumon felvett legkisebb értéke $g(2) = g(8) = 26 (> 0)$,	1 pont	
így a függvények az adott intervallumon valóban csak pozitív értékeket vesznek fel.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

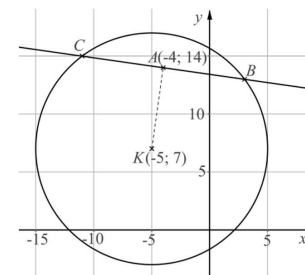
5. c) első megoldás

$KA = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$	1 pont	
Az egyenes metszéspontjait a körrel jelölje B és C . A KAC derékszögű háromszögből $CA = \sqrt{r^2 - KA^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$.	2 pont	
A KBC háromszög egyenlő szárú, KA magassága ezért felezi a CB alapot.	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból kerül ki.
A húr hossza ezért $CB = 2CA = 2\sqrt{50} (\approx 14,14)$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. c) második megoldás

A k egyenlete $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 100$, tehát az $\begin{cases} (x+5)^2 + (y-7)^2 = 100 \\ x+7y = 94 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása adja a metszéspontokat.	1 pont	
A második egyenletből $x = 94 - 7y$, ezt az első egyenletbe behelyettesítve: $(94 - 7y)^2 + (y-7)^2 = 100$.	1 pont	
$50y^2 - 1400y + 9750 = 0$	1 pont	$y^2 - 28y + 195 = 0$
Ebből $y_1 = 13$ és $y_2 = 15$, tehát az e egyenes és a k kör metszéspontjai: $B(3; 13)$, $C(-11; 15)$.	1 pont	
A húr hossza $CB = \sqrt{14^2 + (-2)^2} = \sqrt{200} (\approx 14,14)$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a b) feladatban rossz egyenletet kap, és a kapott egyenlettel, mint kiinduló adattal, a c) feladatban jól számol, akkor a megfelelő pontok járnak, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg (a felírt egyenlethez tartozó egyenes metszi a kört).



5. d)										
(Mivel K rácspont, ezért) a körvonal egy P pontja pontosan akkor lesz rácspont, ha $\overline{KP} = (a;b)$ koordinátái egészek.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>								
$a^2 + b^2 = 100$, tehát a 100-at kell két négyzetszám összegére felbontani.	1 pont*									
A lehetőségek:	2 pont									
<table border="1"> <tr> <td>a</td><td>0</td><td>± 6</td><td>± 8</td><td>± 10</td></tr> <tr> <td>b</td><td>± 10</td><td>± 8</td><td>± 6</td><td>0</td></tr> </table>					a	0	± 6	± 8	± 10	b
a	0	± 6	± 8	± 10						
b	± 10	± 8	± 6	0						
Összesen ($2 + 4 + 4 + 2 =$) 12 rácspont van a körvonalon.	1 pont									
Összesen:	5 pont									

Megjegyzés:

1. A *-gal jelzett 2 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó: Azoknak az $(x; y)$ rendezett számpároknak a számát keressük, amelyek kielégítik az $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 100$ egyenletet, továbbá x és y is egész szám.
2. Ha a vizsgázó indoklás nélkül felsorolja a 12 rácspontot, és ez alapján válaszol, akkor ezért 3 pont jár. A rácspontok a következők: $(-15; 7)$, $(-13; 13)$, $(-11; 15)$, $(-5; 17)$, $(1; 15)$, $(3; 13)$, $(5; 7)$, $(3; 1)$, $(1; -1)$, $(-5; -3)$, $(-11; -1)$, $(-13; 1)$.

6. a) első megoldás				
Vagy három olyan szerző könyvét viheti magával, akiktől 1-1 mű választható, vagy két könyvet választ ilyen szerzőtől, a harmadikat pedig attól, akinek 2 műve is választható.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>		
Az első esetben $\binom{6}{3} (= 20)$ -féle,	1 pont			
a második esetben $\binom{6}{2} \cdot 2 (= 30)$ -féle választási lehetősége van.	1 pont			
A választási lehetőségek száma az előző két érték összege, tehát 50.	1 pont			
Összesen:	4 pont			

6. a) második megoldás		
Az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Kedvezőtlen esetek azok, amelyekben Andi azt a két könyvet is kiválasztja, amelyeknek azonos a szerzője. Ekkor a harmadik könyvet 6-féleképpen választhatja ki.	1 pont	
A nyolc könyvből összesen $\binom{8}{3} (= 56)$ -féleképpen választhat ki hármat.	1 pont	
Összesen tehát $(56 - 6 =)$ 50 választási lehetősége van Andinak.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

6. b) első megoldás		
Csak a nemek szerinti elrendezéseket tekintve négy jó sorrend van: LFLFLF, LFLFFL, LFFLFL és FLFLFL.	2 pont*	
Minden jó sorrendben belül a lányok és a fiúk is $3! (= 6)$ -féle sorrendben helyezkedhetnek el.	1 pont	
Összesen tehát $(4 \cdot 6 \cdot 6 =)$ 144-féleképpen ülhetnek le a feltételeknek megfelelően.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Egy hiba (hiányzó, hibás vagy duplán említett lehetőség) esetén a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot, egynél több hiba esetén 0 pontot kapjon a vizsgázó.

6. b) második megoldás		
A 3 fiú sorrendje $3!$ -féle lehet.	1 pont	
A 3 fiú 4 „köztes helyet” határoz meg (a közöttük lévő két hely, továbbá a három fiútól jobbra, illetve balra eső egy-egy hely), ezekből hármat választunk ki a lányok számára.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A 3 lány a 4 helyre $4 \cdot 3 \cdot 2$ -féleképpen ültethető le,	1 pont	
így a megfelelő sorrendek (üléssorrendek) száma $(3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =)$ 144.	1 pont	
Összesen:	4 pont	