

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	12		51	
	2.	11			
	3.	14			
	4.	14			
II. rész		16		64	
		16			
		16			
		16			
			← nem választott feladat		
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				115	

dátum

javító tanár

	pontszáma egész számra kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2017. május 9. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

[illegible]

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológép és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. **A gondolatmenet kifejtése során a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban feltehető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\lg$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egy-egy tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

[illegible]This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\lg x < 2$

b) $4x < 5 - x^2$

c) $0,5^{|x-3|} < 0,25$

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

9. Több részletben összesen 350 tonna árut szeretnénk vasúton elszállíttatni. Az egyik szállítócég árajánlatában a szállítási díj két összetevőből áll. Egyrészt a szállított áru tömegének négyzetével arányos díjat kell fizetnünk, másrészt az áru tömegétől független állandó alapidíjat is felszámítanak: ha egyszerre t tonna áru elszállítását rendeljük meg, akkor ezért $\frac{t^2}{10} + 205$ eurót kell fizetnünk.

- a) Igazolja, hogy ha két részletben (két alkalommal) szállíttatnánk el a 350 tonna árut, akkor a vasúti költség abban az esetben lenne a legkisebb, ha az árut két egyenlő tömegű részre osztanánk!

A vasúti szállítás költségének csökkentése érdekében a 350 tonna tömegű árut n egyenlő részre osztjuk, és azt tervezzük, hogy minden egyes alkalommal egy-egy részt szállíttatunk el a vasúttal. ($n \in \mathbb{N}^+$)

- b) Igazolja, hogy a szállítócég ajánlata szerint az n alkalommal történő vasúti szállítás költsége összesen $\frac{12\,250}{n} + 205n$ euró lenne!

A vasúti szállítás költségén kívül figyelembe kell vennünk azt is, hogy ha a 350 tonna árut n egyenlő tömegű részre akarjuk szétosztatni, akkor a munka elvégzéséért nekünk $(n-1) \cdot 400$ eurót kell fizetnünk. ($n \in \mathbb{N}^+$)

- c) Hány egyenlő tömegű részletre bontva lenne a legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása?

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Noémi első egyetemi vizsgálója három részből áll: egy projektmunkából, egy írásbeli dolgozatból, valamint egy szóbeli feleletből. Mindhárom rész eredményét százalékban adják meg.

A vizsga végeredményét egyetlen számmal jellemzik úgy, hogy kiszámolják a három rész százalékban megadott eredményének súlyozott számtani közepét: a projektmunka eredményét 2-es súllyal, az írásbeli dolgozat eredményét 5-ös súllyal, a szóbeli felelet eredményét 3-as súllyal veszik figyelembe.

Noémi projektmunkája 73%-os, írásbeli vizsgálója 64%-os lett.

- a) Hány százalékra kell teljesítenie a szóbeli vizsgáját, hogy vizsgájának végeredménye legalább 70%-os legyen?

Az első évfolyam adatainak összesítésekor kiderült, hogy a 75 lány vizsgaeredményeinek átlaga 70%, a fiúk vizsgaeredményeinek átlaga 62% lett. A kollégiumban lakó 40 hallgató vizsgaeredményeinek átlaga 71%, a nem kollégistáké pedig 65% lett.

- b) Hányan vizsgáztak összesen az első évfolyamról?

a)	4 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	11 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

8. Járványos időszakban egy nagyváros lakóinak 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Ebben az időszakban a város lakói közül 80-an ugyanazon az autóbusszon utaznak.

- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az autóbusz 80 utasa között van legalább egy fertőzött? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A járvány terjedésére vonatkozó előrejelzések szerint a nagyvárosban a fertőzöttek száma minden nap az előző napi érték 105%-ára növekszik.

- b) Ha a növekedés üteme az előrejelzés szerint alakulna, akkor hány nap alatt emelkedne a város összlakosságának 0,2%-áról az összlakosság 1%-ára az összes fertőzött száma?

Egy kereskedelmi forgalomban is kapható gyorsvizsgát az ígéri a felhasználóknak, hogy a vizsga kimutatja a vírustartalmat. A vizsga leírásában ez áll: „A vizsga a vírussal fertőzött embereknek 99% valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget. A vírussal nem fertőzött emberek esetében olykor szintén fertőzöttséget jelez a vizsga, ám ennek a téves jelzésnek a valószínűsége mindössze 4%.”

- c) Tudjuk, hogy a város lakosságának 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Mutassa meg, hogy ha egy véletlenszerűen választott városlakó gyorsvizsgát fertőzöttséget mutat, akkor 0,05-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a vizsga valóban vírustartalmú (tehát a gyorsvizsgát nem a fertőzöttség megbízható kimutatására alkalmas)!

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Egy baráti társaság 8 tagjának tömegét mutatja az alábbi táblázat.

név	Albert	Bori	Csaba	Dénes	Elek	Frigyes	Gabi	Helga
tömeg (kg)	82	74	90	88	85	85	63	71

- a) Adja meg a 8 adat mediánját, átlagát és szórását!

Ez a 8 ember lifttel szeretne feljutni egy épület legfelső emeletére, ahol a baráti társaság rendezvényét tartják. A kisméretű lift ajtaján ez a felirat áll: „*Max. 3 személy vagy 230 kg*” (vagyis a liftben nem utazhat 3-nál több személy, továbbá a liftben utazók tömegének összege nem lehet több 230 kg-nál).

- b) Igazolja, hogy a lift három fordulója már elegendő ahhoz, hogy (az előírás betartásával) mind a 8 ember lifttel mehessen fel a rendezvény helyszínére!

A lift felújításakor a liftben együtt utazók megengedett össztömegét 300 kg-ra növelik, de a személyek számára vonatkozó korlátozás megmarad (legfeljebb 3 fő utazhat együtt).

- c) Az új előírás figyelembevételével hányféleképpen mehetne fel a baráti társaság 8 tagja a lifttel, ha minden fordulóban legalább két személy utazna együtt? (Két „feljutást” különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csoport összetétele nem azonos a két feljutásban, vagy a csoportok más sorrendben jutottak fel a legfelső emeletre.)

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

7. a) Hány olyan különböző hegyesszögű háromszög van, melynek szögei fokban mérve különböző egész számok, és a szögek egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha nem hasonlók egymáshoz.)
- b) Igazolja, hogy nincs olyan szabályos n -szög, amelynek a belső szögei n fokosak!
- c) Egy szabályos n -szögről tudjuk, hogy a belső szögei fokban mérve egész számok. Hányféle lehet az n értéke?

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4. a) Mekkora területű síkidomot zár közre az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola és az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenes?

Az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontban metszi.

- b) Számítsa ki a parabola B pontbeli érintőjének meredekségét, ha tudjuk, hogy a B pont első koordinátája pozitív!

a)	8 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	14 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

6. a) Az A és C kijelentések logikai értéke igaz, a B kijelentés logikai értéke hamis.

Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét!

(Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

- (1) $\neg A \vee \neg B$
- (2) $(A \wedge B) \vee \neg C$
- (3) $B \rightarrow \neg A$
- (4) $\neg A \leftrightarrow B$
- (5) $A \rightarrow (B \wedge C)$

A H halmaz a tízpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: *Ha egy (tízpontú egyszerű) gráfnak legfeljebb 8 éle van, akkor nem tartalmaz kört.*

- b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
- c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Egy tízpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt.
(Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

- d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három kiválasztott él a gráfnak egy körét alkotja!

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
d)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

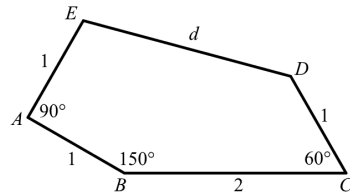
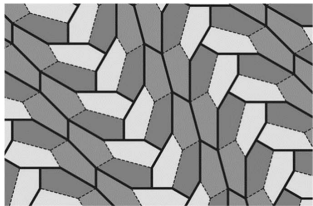
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

5. Az interneten érdekes hírként jelent meg 2015-ben, hogy a matematikusok újabb, egybevágó ötszögekből álló hézagmentes síklefedést (parkettázást) fedeztek fel. (A két ábrán a parkettázás egy részlete, illetve a parketta egyik ötszögének néhány adata látható: $EA = AB = CD = 1$, $BC = 2$, $EAB\angle = 90^\circ$, $ABC\angle = 150^\circ$, $BCD\angle = 60^\circ$.)



- a) Igazolja, hogy az ábrán megadott ötszög B csúcsából húzott két átló 75° -os szöget zár be egymással!
- b) Igazolja (például addíciós tételek segítségével), hogy $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- c) Igazolja, hogy az ötszög DE oldala hosszának pontos értéke $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
- d) Igazolja, hogy $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--