

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA

**EMELT SZINTŰ
ÍRÁSBELI VIZSGA**

**JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ**

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott* kipipálás
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. c) első megoldás		
A szállítás és a szétosztás tervezett együttes költsége: $\frac{12\,250}{n} + 205n + 400(n-1) \quad (n \in \mathbb{N}^+).$	1 pont	
(Vizsgáljuk a pozitív valós számok halmazán értelmezett f függvényt, ha) $f(x) = \frac{12\,250}{x} + 605x - 400$.	1 pont	
Az f deriválható, és $f'(x) = -\frac{12\,250}{x^2} + 605$.	1 pont	
(Ott lehet szélsőértéke f -nek, ahol f' -nek zérushelye van:) $-\frac{12\,250}{x^2} + 605 = 0$.	1 pont	
(Mivel $x > 0$, ezért) $x = \sqrt{\frac{12\,250}{605}} \approx 4,4998$.	1 pont	
Mivel $f''(x) = \frac{24\,500}{x^3}$ ($x \in \mathbb{R}^+$) mindenütt pozitív, ezért a $\sqrt{\frac{12\,250}{605}}$ az f -nek abszolút minimumhelye.	1 pont	Egyéb helyes indoklások is elfogadhatók, például az első derivált előjelváltására való hivatkozás.
A kapott minimumhely azonban nem egész szám, ezért (az f függvény monotonitási tulajdonságai miatt) két lehetőség van: 4 vagy 5 részre kell osztani az elszállítandó árut.	1 pont	A $]0; 4,4997[-$ -on szigorúan monoton csökken, a $]4,4998; +\infty[$ -on szigorúan monoton nő az f .
Ha $n = 4$, akkor a költség 5082,5 euró, ha $n = 5$, akkor pedig 5075 euró.	1 pont	
Tehát 5 egyenlő részre osztva legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása.	1 pont	
Összesen:	9 pont	
9. c) második megoldás		
$f(1) = 12\,455$, $f(2) = 6935$, $f(3) \approx 5498$, $f(4) = 5082,5$, $f(5) = 5075$, $f(6) \approx 5272$.	2 pont	
Azt sejtjük, hogy az 5 egyenlő részre bontáshoz tartozik a legkisebb költség.	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.
Vizsgáljuk ezért (a valós számok halmazán) a $\frac{12\,250}{n} + 605n - 400 < 5075$ egyenlőtlenséget,	2 pont	
amely ($n > 0$ miatt) ekvivalens a $12\ln^2 - 1095n + 2450 < 0$ egyenlőtlenséggel.	1 pont	
Ennek a megoldáshalmaz a $\left] \frac{490}{121}; 5 \right]$,	1 pont	
de ebben a halmazban nincs egész szám.	1 pont	
Tehát 5 egyenlő részre osztva legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

- Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
- A megoldásokért **jutalom pont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
- Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytablázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\lg$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
- Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
- Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százlékban megadott helyes válasz is elfogadható.
- Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
- A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A lg függvény szigorúan monoton növekedő, ezért $x < 100$.	1 pont	<i>Ezek a pontok járnak egy megfelelő ábráért is.</i>
(A lg függvény értelmezési tartománya miatt) $x > 0$.	1 pont	
Tehát $0 < x < 100$.	1 pont	<i>A megoldáshalmaz: $]0; 100[$</i>
Összesen:	3 pont	

1. b)		
Nullára rendezve: $x^2 + 4x - 5 < 0$.	1 pont	
Az $x^2 + 4x - 5 = 0$ egyenlet gyökei 1 és -5 .	1 pont	
Mivel a négyzetes tag együtthatója pozitív, ezért $-5 < x < 1$.	1 pont	<i>Ez a pont jár egy megfelelő ábráért vagy az $(x+5)(x-1) < 0$ alakért.</i>
Összesen:	4 pont	

1. c)		
$0,5^{ x-3 } < 0,5^2$	1 pont	
A $0,5$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökken, így $ x-3 > 2$.	1 pont	
Ez akkor teljesül, ha $x-3 > 2$ vagy $x-3 < -2$, azaz $x > 5$ vagy $x < 1$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az $|x-3| < 2$ egyenlőtlenséget oldja meg, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

2. a)		
(Ha Noémi szóbeli vizsgájának eredménye x százalékos, akkor) a vizsga végeredménye $\frac{2 \cdot 73 + 5 \cdot 64 + 3x}{2+5+3}$ százalékos.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A feladat szövege szerint: $\frac{2 \cdot 73 + 5 \cdot 64 + 3x}{2+5+3} \geq 70$.	1 pont	
$x \geq 78$	1 pont	
Noéminek legalább 78%-os szóbeli eredményre van szüksége.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, és helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

9. a) második megoldás		
Ha az egyik rész tömege $175 - x$ tonna ($0 \leq x < 175$), akkor a másik részé $175 + x$, és ekkor a szállítási költség $k(x) = \frac{(175-x)^2}{10} + 205 + \frac{(175+x)^2}{10} + 205$ (euró).	1 pont	
A zárójelek felbontása és rendezés után: $k(x) = \frac{1}{5}x^2 + 6535$.	1 pont	
Ez pontosan akkor minimális, ha $x = 0$, tehát az állítás igaz.	2 pont	
Összesen:	4 pont	

9. a) harmadik megoldás		
Ha az egyik rész tömege x tonna ($0 < x < 350$), akkor a szállítási költség $k(x) = \frac{x^2}{10} + 205 + \frac{(350-x)^2}{10} + 205$ (euró).	1 pont	
Ez pontosan akkor minimális, ha az $x^2 + (350-x)^2$ összeg minimális.	1 pont	
A négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség miatt: $x^2 + (350-x)^2 \geq 2 \cdot \frac{(x+350-x)^2}{4} = \frac{350^2}{2}$.	1 pont	
Egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha $x = 350 - x$, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

9. b)		
A vasúti szállításért fizetendő összeg: $n \cdot \frac{350^2}{10n^2} + 205n$.	2 pont	<i>Az összeg mindkét tagjáért 1-1 pont jár.</i>
A négyzetre emelést és az osztást elvégezve kapjuk, hogy ez valóban $\frac{12\,250}{n} + 205n$ -nel egyenlő.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

8. c) második megoldás		
Jelölje A azt az eseményt, hogy a teszt pozitív, B pedig azt az eseményt, hogy a vizsgált személy fertőzött. Meghatározandó a $P(B A)$ valószínűség.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Annak a valószínűsége, hogy egy fertőzött emberen végeztek el a tesztet, és az pozitív lett: $P(AB) = 0,002 \cdot 0,99$ ($= 0,00198$).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy egy nem fertőzött emberen végeztek el a tesztet, és az pozitív lett: $P(\overline{AB}) = 0,998 \cdot 0,04$ ($= 0,03992$).	1 pont	
(Az AB és az $\overline{AB}$ egymást kizáró események, ezért annak a valószínűsége, hogy egy – a városban lakó, véletlenszerűen kiválasztott – ember pozitív teszt-eredményt kap, a két esemény valószínűségének összege:) $P(A) = 0,998 \cdot 0,04 + 0,002 \cdot 0,99$ ($= 0,0419$).	1 pont	
$P(B A) = \frac{P(AB)}{P(A)} =$	1 pont	
$= \frac{0,002 \cdot 0,99}{0,002 \cdot 0,99 + 0,998 \cdot 0,04} \approx 0,0473,$	1 pont	$\frac{0,00198}{0,0419} \approx 0,0473$
azaz valóban 0,05-nél kisebb a fertőzöttség valószínűsége pozitív teszt-eredmény esetén.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

9. a) első megoldás		
Ha az egyik rész tömege x tonna ($0 < x < 350$), akkor a másik részé $350 - x$, és ekkor a szállítási költség $k(x) = \frac{x^2}{10} + 205 + \frac{(350-x)^2}{10} + 205$ (euró).	1 pont	
A zárójel felbontása és rendezés után: $k(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 350x + 63\,300)$.	1 pont	$k'(x) = \frac{1}{5}(2x - 350)$
$k(x) = \frac{1}{5}(x - 175)^2 + 6535$ (vagy $k'(175) = 0$) miatt a k függvény értéke pontosan akkor minimális, ha $x = 175$, tehát az állítás igaz.	2 pont	
Összesen:	4 pont	

2. b) első megoldás		
(Ha az első évfolyamon összesen n vizsgázó volt, akkor) a fiúk száma $n - 75$, a nem kollégista hallgatók száma $n - 40$.	1 pont	<i>Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
Az átlag egyrészt $\frac{75 \cdot 70 + (n - 75) \cdot 62}{n}$, másképp $\frac{40 \cdot 71 + (n - 40) \cdot 65}{n}$.	1 pont	
Megoldandó tehát a $\frac{75 \cdot 70 + (n - 75) \cdot 62}{n} = \frac{40 \cdot 71 + (n - 40) \cdot 65}{n}$ egyenlet.	1 pont	
$n = 120$	2 pont	<i>Ez a 2 pont az egyenlet megoldásáért jár.</i>
Tehát 120 hallgató vizsgázott az évfolyamon.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján (a 120 vizsgázó átlagára mindkét csoportosítás esetében 67% adódik).	1 pont	
Összesen:	7 pont	

2. b) második megoldás		
Ha a fiúk száma f , a nem kollégisták száma k , akkor a vizsgaeredmények átlaga egyrészt $\frac{75 \cdot 70 + f \cdot 62}{f + 75}$, másképp $\frac{40 \cdot 71 + k \cdot 65}{k + 40}$.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A feladat szövege szerint $f + 75 = k + 40$, továbbá $\frac{75 \cdot 70 + f \cdot 62}{f + 75} = \frac{40 \cdot 71 + k \cdot 65}{k + 40}$.	1 pont	
$f = 45$ (és $k = 80$).	2 pont	<i>Ez a 2 pont az egyenletrendszer megoldásáért jár.</i>
Összesen ($75 + 45 =$) 120 hallgató vizsgázott az első évfolyamról.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján (a 120 vizsgázó átlagára mindkét csoportosítás esetében 67% adódik).	1 pont	
Összesen:	7 pont	

3. a)		
A medián: 83,5 (kg),	1 pont	
az átlag: 79,75 (kg),	1 pont	
a szórás: $\sqrt{\frac{2,25^2 + 5,75^2 + 10,25^2 + 8,25^2 + 2 \cdot 5,25^2 + 16,75^2 + 8,75^2}{8}} =$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel számolva, indoklás nélkül helyesen válaszol.</i>
($= \sqrt{77,9375}$) $\approx$ 8,83 (kg).	1 pont	
Összesen:	4 pont	

3. b)		
Mivel $90 + 88 = 178$,	1 pont	
$85 + 82 + 63 = 230$ és $85 + 71 + 74 = 230$,	1 pont	
ezért a három forduló valóban elegendő.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

3. c)		
(Bármelyik 3 személy együttes tömege kisebb 300 kg-nál.) Vagy mindegyik fordulóban 2 személy megy fel (négy forduló), vagy egy fordulóban 2, és további két fordulóban még 3-3 személy (három forduló).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha mindegyik fordulóban két ember megy fel, akkor a különböző lehetőségek száma: $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} (= 2520).$	1 pont	<i>Sorba állítjuk a 8 embert, a négy darab 2-es csoporton belül a sorrend nem számít. A lehetőségek száma: $\frac{8!}{(2!)^4} (= 2520).$ </i>
Ha három fordulóban mennek fel, akkor a liftben utazó személyek száma $2 + 3 + 3$, vagy $3 + 2 + 3$, vagy $3 + 3 + 2$ lehet.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Mindegyik eset $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} (= 560)$ különböző módon valósulhat meg,	1 pont	$\frac{8!}{2! \cdot (3!)^2}$
vagyis $3 \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} (= 1680)$ ilyen eset lehetséges.	1 pont	
A lehetőségek száma összesen: $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} + 3 \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} =$	1 pont	
$= 4200.$	1 pont	
Összesen:	7 pont	

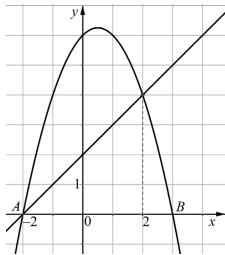
8. c) első megoldás		
Ha a város lakóinak száma n ,	1 pont	<i>A kiindulásul választott lélekszámtól nem függ a feladat kérdésére adott válasz. Legyen például $n = 1\,000\,000$.</i>
akkor a fertőzöttek száma $0,002n$, a nem fertőzöttek száma $0,998n$.	1 pont	<i>Ekkor a lakosok közül 2000 fertőzött, 998 000 nem fertőzött.</i>
Ha minden lakost tesztelnének, akkor a $0,002n$ fertőzött között $0,002n \cdot 0,99 = 0,00198n$ pozitív, $0,00002n$ negatív,	1 pont	<i>A 2000 fertőzött esetében ($2000 \cdot 0,99 =$) 1980 pozitív, 20 negatív eredményt adna a teszt,</i>
a $0,998n$ nem fertőzött között pedig $0,998n \cdot 0,04 = 0,03992n$ pozitív, $0,95808n$ negatív tesztteredmény lenne.	1 pont	<i>míg a 998 000 nem fertőzött ember közül ($998\,000 \cdot 0,04 =$) 39 920 pozitív, 958 080 negatív eredményt kapna.</i>
A pozitív tesztteredmények száma $0,00198n + 0,03992n = 0,0419n$, közülük $0,00198n$ fertőzött.	1 pont	<i>A pozitív tesztteredmények száma $39\,920 + 1980 =$ $= 41\,900$, közülük 1980 fertőzött.</i>
$\frac{0,00198n}{0,0419n} \approx 0,0473$,	1 pont	$\frac{1980}{41\,900} \approx 0,0473$
azaz valóban 0,05-nél kisebb a fertőzöttség valószínűsége pozitív tesztteredmény esetén.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

8. a) első megoldás		
Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lakos nem fertőzött: 0,998.	1 pont	
$P(80 \text{ ember közt van legalább 1 fertőzött}) =$ $= 1 - P(\text{senki nem fertőzött}) =$	1 pont	
$= 1 - 0,998^{80} \approx$	1 pont	
$\approx 0,15.$	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	4 pont	

8. a) második megoldás		
Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lakos nem fertőzött: 0,998.	1 pont	
$P(1 \text{ fertőzött}) = \binom{80}{1} \cdot 0,002 \cdot 0,998^{79} \approx 0,1366.$	1 pont	
Hasonlóan $P(2 \text{ fertőzött}) \approx 0,0108,$ $P(3 \text{ fertőzött}) \approx 0,0006.$	1 pont	
Mivel $P(4 \text{ fertőzött}) \approx 0,00002$ (és a további valószínűségek értékei gyorsan csökkennek), ezért az összeg további tagjai (a kért pontosság esetén) elhanyagolhatók.	1 pont	
Így $P(80 \text{ ember közt van legalább 1 fertőzött}) \approx$ $\approx 0,1366 + 0,0108 + 0,0006 \approx 0,15.$	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	4 pont	

8. b)		
A fertőzöttek aránya a teljes lakosságon belül minden nap az előző napi arány 1,05-szorosára nő.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A keresett napok számát jelölje x , ekkor $0,2 \cdot 1,05^x = 1.$	1 pont	
$1,05^x = 5$	1 pont	
$x = \frac{\lg 5}{\lg 1,05} \approx 32,99$	1 pont	$x = \log_{1,05} 5$
(Mivel a fertőzöttek száma növekszik, ezért) körülbelül 33 nap alatt érné el a fertőzöttek száma az összlakosság 1%-át.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: A vizsgázó teljes pontszámot kaphat, ha egyenlet helyett egyenlőtlenséggel jól dolgozik.

4. a)		
A parabola és az egyenes metszéspontjait az $\left. \begin{aligned} y &= -x^2 + x + 6 \\ 0 &= x - y + 2 \end{aligned} \right\} \text{ egyenletrendszer megoldásaiként}$ kapjuk.	1 pont	
A második egyenletből y kifejezésével: $-x^2 + x + 6 = x + 2$	1 pont	
(Rendezve: $x^2 = 4$, ahonnan) $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.	1 pont	
(Mivel a parabola a $[-2; 2]$ intervallumon az egyenes felett helyezkedik el, ezért)	1 pont*	
$T = \int_{-2}^2 ((-x^2 + x + 6) - (x + 2)) dx =$	1 pont*	
$= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx =$	1 pont*	
$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 =$	1 pont*	
$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3} \right) =$	1 pont*	
$= \frac{32}{3}$	1 pont*	
Összesen:	8 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

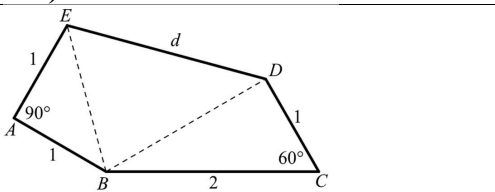
$\int_{-2}^2 (-x^2 + x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^2 =$	1 pont	
$= \frac{34}{3} - \left(-\frac{22}{3} \right) = \frac{56}{3}$	1 pont	
$\int_{-2}^2 (x + 2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^2 =$	1 pont	
$= 6 - (-2) = 8$	1 pont	
(Mivel a parabola a $[-2; 2]$ intervallumon az egyenes felett helyezkedik el, ezért) $T = \frac{56}{3} - 8 = \frac{32}{3}.$	1 pont	

4. b)		
Az x tengellyel való metszéspontban $y = 0$, így $-x^2 + x + 6 = 0$.	1 pont	
Innen $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.	1 pont	
Mivel a B pont első koordinátája pozitív, $B(3; 0)$.	1 pont	
Az $f(x) = -x^2 + x + 6$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény derivált-függvénye $f'(x) = -2x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$).	1 pont*	
A B pontban húzott érintő meredeksége $f'(3) =$	1 pont*	
$(= -2 \cdot 3 + 1) = -5$.	1 pont*	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

A B ponton átmenő, a parabola tengelyével nem párhuzamos, m meredekségű egyenes egyenlete felírható $y = mx - 3m$ alakban is.	1 pont	
Ennek az egyenesnek pontosan akkor van egy közös pontja a parabolával, ha az $x^2 + (m-1)x - 3(m+2) = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0-val egyenlő.	1 pont	
A diszkrimináns $(m-1)^2 + 12(m+2) = (m+5)^2$, tehát az érintő meredeksége -5 .	1 pont	

II.

5. a)		
	1 pont	
Az ABE háromszög derékszögű és egyenlő szárú, ezért $ABE\angle = 45^\circ$.	1 pont	
Ha egy 2 egység oldalú szabályos háromszöget az egyik szimmetriatengelyével kettévágunk, akkor az így kapott háromszögek egybevágók a BCD háromszöggel (két oldalukban és az ezek által közbezárt szögükben megegyeznek),	1 pont	A BC oldal felezőpontját kössük össze a D csúccsal! Ez a szakasz a BCD háromszöget egy egységnyi oldalú szabályos háromszögre és egy egyenlő szárú háromszögre bontja.
ezért $DBC\angle = 30^\circ$.	1 pont	
A két átló által bezárt szög tehát: $EBD\angle = ABC\angle - ABE\angle - DBC\angle = 75^\circ$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

7. c)		
Az n oldalú ($n \geq 3$) szabályos sokszög egy belső szögének nagysága fokban mérve: $\frac{(n-2) \cdot 180}{n}$, és ez egy k pozitív egész számmal egyenlő.	1 pont*	Ha az n oldalú szabályos sokszög egy belső szöge fokban mérve k ($k \in \mathbf{N}^+$), akkor egy külső szöge $180 - k$.
Tehát $nk = n \cdot 180 - 360$,	1 pont*	A külső szögek összege 360° , így $\frac{360}{n} = 180 - k$.
amiből $k = 180 - \frac{360}{n}$.	1 pont*	
Mivel $n \geq 3$, ezért a 360 pozitív osztói közül a 2-nél nagyobbak mind megfelelnek (mert ezekben az esetekben k -ra 180-nál kisebb pozitív egész szám adódik).	1 pont*	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.
A 360 osztópárjai: (1; 360), (2; 180), (3; 120), (4; 90), (5; 72), (6; 60), (8; 45), (9; 40), (10; 36), (12; 30), (15; 24), (18; 20).	2 pont**	Mivel $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, ezért a 360 pozitív osztóinak száma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
A 360-nak 24 pozitív osztója van.	1 pont	
(Az osztók közül az 1 és a 2 nem felel meg, ezért) 22-féleképpen választható meg az n értéke.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

Megjegyzések:

1. Az alábbi táblázat tartalmazza az n lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó k értékeket.

n	k (fok)	n	k (fok)	n	k (fok)	n	k (fok)	n	k (fok)
3	60	9	140	20	162	40	171	90	176
4	90	10	144	24	165	45	172	120	177
5	108	12	150	30	168	60	174	180	178
6	120	15	156	36	170	72	175	360	179
8	135	18	160						

2. Ha a vizsgázó legfeljebb 9 osztópárt talál meg, akkor a *-gal jelölt 2 pontból 0 pontot, ha 10 vagy 11 osztópárt talál meg, akkor 1 pontot kapjon.

3. A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

Egy szabályos sokszög egy belső szöge fokban mérve pontosan akkor egész szám, amikor ez egy külső szögére is igaz. Vizsgáljuk ezért a sokszög egy külső szögét.	1 pont	
Az n oldalú ($n \geq 3$) szabályos sokszög egy külső szöge $\frac{360}{n}$ fokos,	1 pont	
egy belső szöge tehát fokban mérve akkor lesz egész, amikor $\frac{360}{n}$ értéke (180-nál kisebb) egész szám.	1 pont	
Mivel $n \geq 3$, ezért a 360 pozitív osztói közül a 2-nél nagyobbak mind megfelelnek.	1 pont	Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

7. a)		
A feltételek miatt elegendő a háromszög szögeit vizsgálni. A háromszög középső szögét a -val, a sorozat differenciáját d -vel ($d > 0$) jelölve, a három szög $a - d$, a és $a + d$ fokok (a és d egészek).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$(a - d) + a + (a + d) = 180$, ahonnan $a = 60$ (a háromszög középső szöge).	1 pont	
Ha a háromszög hegyesszögű (és d pozitív egész), akkor a legnagyobb szöge legalább 61 , legfeljebb 89 fokok.	1 pont	
Tehát 29 különböző, a feltételeknek megfelelő háromszög van.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

7. b) első megoldás		
Egy ilyen n szög belső szögeinek összege fokban mérve n^2 , így $n^2 = (n - 2) \cdot 180$.	1 pont	
$n^2 - 180n + 360 = 0$ ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geq 3$).	1 pont	
A másodfokú egyenlet megoldásai nem egészek ($\approx 177,98$, illetve $\approx 2,02$).	1 pont	
Tehát valóban nincs a feltételnek megfelelő n -szög.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

7. b) második megoldás		
Ha egy szabályos sokszög egy belső szöge 179° , akkor 360 oldala van (és nem 179), tehát $n \neq 179$.	1 pont	
Ha egy szabályos sokszög egy belső szöge 178° , akkor 180 oldala van (és nem 178), tehát $n \neq 178$, hasonlóképpen, ha egy szabályos sokszög egy belső szöge 177° , akkor 120 oldala van (és nem 177), tehát $n \neq 177$.	1 pont	
Az n oldalú szabályos sokszög külső szöge $\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$ fordítottan arányos az n -nel. Ha tehát a belső szög csökken, akkor (mivel a külső szög növekszik) az oldalszám is csökken, ha pedig az oldalszám növekszik, akkor a belső szög is növekszik.	1 pont	
Ezért $n < 120$ lehetne csak, de 120° -nál kisebb belső szögei csak a szabályos három-, négy- és ötszögnek vannak. Ezek sem felelnek meg, tehát a feladat állítása igaz.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó (megfelelő indoklással) az összes olyan szabályos sokszög oldal-számát felsorolja, melynek szögei fokban mérve egészek, és ez alapján helyesen megállapítja, hogy nincs a feltételnek megfelelő sokszög, akkor teljes pontszámot kapjon. (A 7.c feladat megoldásához fűzve megtalálható az a táblázat, amely tartalmazza a lehetséges eseteket.)

5. b) első megoldás		
$\cos 75^\circ = \cos (30^\circ + 45^\circ) =$ $= \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ =$	1 pont	
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$	1 pont	
$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (tehát az állítás igaz).	1 pont	
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: Közelítő értékekkel való számolás nem fogadható el.

5. b) második megoldás		
$\cos^2 75^\circ = \frac{1 + \cos 150^\circ}{2} =$	1 pont	
$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.	1 pont	
Mivel $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, ezért az állítás igaz (hiszen $\cos 75^\circ > 0$).	1 pont	
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: Közelítő értékekkel való számolás nem fogadható el.

5. c)		
$BE = \sqrt{2}$	1 pont	
$BD = \sqrt{3}$	1 pont	
Az EBD háromszögben a koszinusztétel szerint: $DE^2 = 2 + 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$	1 pont	
$= 2 + \sqrt{3}$.	1 pont	
Tehát valóban $DE = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

5. d)		
$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{4} =$	1 pont	$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} =$
$= 2 + \sqrt{3} \left(= \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 \right)$	1 pont	$\sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} =$
Mindkét megadott szám pozitív, és a négyzetük egyenlő, tehát az állítás igaz.	1 pont	$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklásához közelítő értéket is használ, akkor 0 pontot kapjon.

6. a)		
(1) igaz (2) hamis (3) igaz (4) igaz (5) hamis	3 pont	4 jó válaszáért 2 pont, 3 jó válaszáért 1 pont jár. 3-nál kevesebb jó válasz esetén nem jár pont.
Összesen:	3 pont	

6. b)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen megfelelő ellenpélda (kört tartalmazó tíz-pontú egyszerű gráf legfeljebb 8 éllel).	2 pont	
Összesen:	3 pont	

6. c)		
A megfordítás: <i>Ha egy (tízpontú egyszerű) gráf nem tartalmaz kört, akkor a gráfnak legfeljebb 8 éle van.</i>	1 pont	
A megfordított állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen megfelelő ellenpélda (tízpontú fa).	2 pont	
Összesen:	4 pont	

6. d) első megoldás		
A 10 pontú teljes gráfnak $\left(\frac{10 \cdot 9}{2} = \right)$ 45 éle van.	1 pont	
A három él kiválasztása $\binom{45}{3} (= 14\,190)$ különböző módon lehetséges (ezek mindegyike azonos valószínűségű).	1 pont	
Háromélű kört akkor kapunk, ha a kiválasztott élek végpontjai a gráfnak összesen 3 csúcsát jelentik, ezért a gráf bármely 3 csúcsának kiválasztása pontosan egy háromélű kör kiválasztásának felel meg.	1 pont	
A kedvező esetek száma $\binom{10}{3} (= 120)$.	1 pont	
A kért valószínűség: $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{45}{3}} \approx$	1 pont	
$\approx 0,0085$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

6. d) második megoldás		
A 10 pontú teljes gráfnak $\left(\frac{10 \cdot 9}{2} = \right)$ 45 éle van.	1 pont	
Az első kiválasztott él legyen ezek közül bármelyik. Kell, hogy a második kiválasztott élnek legyen az elsővel közös végpontja.	1 pont	
Az első kiválasztott él mindkét végpontjából még 8-8 él indul, a maradék 44 él közül ezek valamelyikét kell kiválasztanunk, tehát a jó választás valószínűsége ebben a lépésben $\frac{16}{44}$.	1 pont	
Harmadik lépésben a maradék 43 él közül mindenképpen a már kiválasztott két él nem közös végpontjait összekötő élt kell kiválasztanunk, tehát a jó választás valószínűsége ebben a lépésben $\frac{1}{43}$.	1 pont	
(Mivel a három választás egymástól független,) a kért valószínűség $\frac{16}{44} \cdot \frac{1}{43} =$	1 pont	
$\left(= \frac{4}{473}\right) \approx 0,0085$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

6. d) harmadik megoldás		
A 10 pontú teljes gráfnak $\left(\frac{10 \cdot 9}{2} = \right)$ 45 éle van.	1 pont	
A három él kiválasztása $\binom{45}{3} (= 14\,190)$ különböző módon lehetséges (ezek mindegyike azonos valószínűségű).	1 pont	
Rajzoljunk meg egy élt! Ezt 45-féleképpen tehetjük meg. A kiválasztott él végpontjaiból a maradék 8 csúcs közül bármelyikhez húzott két él a kiválasztott éllel együtt a gráfnak egy körét határozza meg. A gráfban összesen $45 \cdot 8 (= 360)$ darab három élű kört rajzolhatunk meg ilyen módon,	1 pont	
de ekkor minden kört pontosan háromszor rajoltunk meg. Tehát a különböző háromélű körök száma 120.	1 pont	
A kért valószínűség: $\frac{120}{\binom{45}{3}} \approx$	1 pont	
$\approx 0,0085$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	