ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A lg függvény szigorúan monoton növekedő, ezért $x < 100$.	1 pont	*Ezek a pontok járnak egy megfelelő ábráért is.*
(A lg függvény értelmezési tartománya miatt) $x > 0$.	1 pont	
Tehát $0 < x < 100$.	1 pont	*A megoldáshalmaz:*]0; 100[
Összesen:	**3 pont**	

1. b)		
Nullára rendezve: $x^2 + 4x - 5 < 0$.	1 pont	
Az $x^2 + 4x - 5 = 0$ egyenlet gyökei 1 és –5.	1 pont	
Mivel a négyzetes tag együtthatója pozitív,	1 pont	*Ez a pont jár egy megfelelő ábráért vagy az* $(x + 5)(x - 1) < 0$ *alakért.*
ezért $-5 < x < 1$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. c)		
$0{,}5^{\lvert x-3\rvert} < 0{,}5^2$	1 pont	
A 0,5 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökken, így	1 pont	
$\lvert x - 3\rvert > 2$.	1 pont	
Ez akkor teljesül, ha $x - 3 > 2$ vagy $x - 3 < -2$,	1 pont	
azaz $x > 5$ vagy $x < 1$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az $\lvert x - 3\rvert < 2$ *egyenlőtlenséget oldja meg, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.*

2. a)		
(Ha Noémi szóbeli vizsgájának eredménye x százalékos, akkor) a vizsga végeredménye $\dfrac{2\cdot 73 + 5\cdot 64 + 3x}{2+5+3}$ százalékos.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege szerint: $\dfrac{2\cdot 73 + 5\cdot 64 + 3x}{2+5+3} \geq 70$.	1 pont	
$x \geq 78$	1 pont	
Noéminek legalább 78%-os szóbeli eredményre van szüksége.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, és helyesen válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

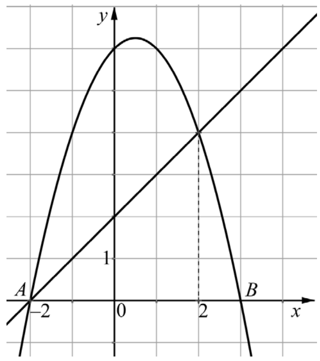
2. b) **első megoldás**		
(Ha az első évfolyamon összesen n vizsgázó volt, akkor) a fiúk száma n – 75, a nem kollégista hallgatók száma n – 40.	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Az átlag egyrészt $\frac{75\cdot 70+(n-75)\cdot 62}{n}$, másrészt $\frac{40\cdot 71+(n-40)\cdot 65}{n}$.	1 pont	
Megoldandó tehát a $\frac{75\cdot 70+(n-75)\cdot 62}{n}=\frac{40\cdot 71+(n-40)\cdot 65}{n}$ egyenlet.	1 pont	
n = 120	2 pont	*Ez a 2 pont az egyenlet megoldásáért jár.*
Tehát 120 hallgató vizsgázott az évfolyamon.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján (a 120 vizsgázó átlagára mindkét csoportosítás esetében 67% adódik).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. b) **második megoldás**		
Ha a fiúk száma f, a nem kollégisták száma k, akkor a vizsgaeredmények átlaga egyrészt $\frac{75\cdot 70+f\cdot 62}{f+75}$, másrészt $\frac{40\cdot 71+k\cdot 65}{k+40}$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege szerint f + 75 = k + 40,	1 pont	
továbbá $\frac{75\cdot 70+f\cdot 62}{f+75}=\frac{40\cdot 71+k\cdot 65}{k+40}$.	1 pont	
f = 45 (és k = 80).	2 pont	*Ez a 2 pont az egyenletrendszer megoldásáért jár.*
Összesen (75 + 45 =) 120 hallgató vizsgázott az első évfolyamról.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján (a 120 vizsgázó átlagára mindkét csoportosítás esetében 67% adódik).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a)		
A medián: 83,5 (kg),	1 pont	
az átlag: 79,75 (kg),	1 pont	
a szórás: $\sqrt{\frac{2{,}25^2+5{,}75^2+10{,}25^2+8{,}25^2+2\cdot 5{,}25^2+16{,}75^2+8{,}75^2}{8}}=$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel számolva, indoklás nélkül helyesen válaszol.*
$(=\sqrt{77{,}9375}\,)\approx 8{,}83$ (kg).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b)		
Mivel 90 + 88 = 178,	1 pont	
85 + 82 + 63 = 230 és 85 + 71 + 74 = 230,	1 pont	
ezért a három forduló valóban elegendő.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. c)		
(Bármelyik 3 személy együttes tömege kisebb 300 kg-nál.) Vagy mindegyik fordulóban 2 személy megy fel (négy forduló), vagy egy fordulóban 2, és további két fordulóban még 3-3 személy (három forduló).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha mindegyik fordulóban két ember megy fel, akkor a különböző lehetőségek száma: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$ (= 2520).	1 pont	*Sorba állítjuk a 8 embert, a négy darab 2-es csoporton belül a sorrend nem számít. A lehetőségek száma:* $\frac{8!}{(2!)^4}$ (= 2520).
Ha három fordulóban mennek fel, akkor a liftben utazó személyek száma 2 + 3 + 3, vagy 3 + 2 + 3, vagy 3 + 3 + 2 lehet.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Mindegyik eset $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}$ (= 560) különböző módon valósulhat meg,	1 pont	$\frac{8!}{2!\cdot(3!)^2}$
vagyis $3\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}$ (= 1680) ilyen eset lehetséges.	1 pont	
A lehetőségek száma összesen: $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+3\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}=$	1 pont	
= 4200.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a)		
A parabola és az egyenes metszéspontjait az $\left.\begin{array}{l} y=-x^2+x+6 \\ 0=x-y+2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldásaiként kapjuk.	1 pont	
A második egyenletből y kifejezésével: $-x^2+x+6=x+2$	1 pont	
(Rendezve: $x^2=4$, ahonnan) $x_1=-2$ és $x_2=2$.	1 pont	
(Mivel a parabolaív a [–2; 2] intervallumon az egyenes felett helyezkedik el, ezért) $T=\int_{-2}^{2}\left((-x^2+x+6)-(x+2)\right)dx=$	1 pont*	
$=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx=$	1 pont*	
$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=$	1 pont*	
$=\left(-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+4\cdot(-2)\right)=\frac{16}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=$	1 pont*	
$=\frac{32}{3}$	1 pont*	
Összesen:	**8 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

$\int_{-2}^{2}(-x^2+x+6)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{2}=$	1 pont	
$=\frac{34}{3}-\left(-\frac{22}{3}\right)=\frac{56}{3}$	1 pont	
$\int_{-2}^{2}(x+2)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{2}=$	1 pont	
= 6 – (–2) = 8	1 pont	
(Mivel a parabolaív a [–2; 2] intervallumon az egyenes felett helyezkedik el, ezért) $T=\frac{56}{3}-8=\frac{32}{3}$.	1 pont	

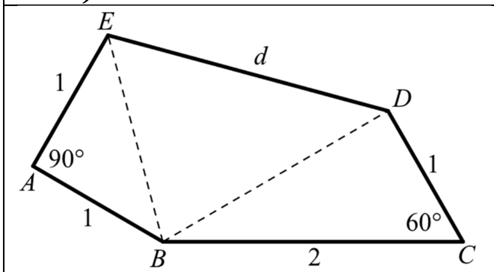
4. b)		
Az x tengellyel való metszéspontban $y = 0$, így $-x^2 + x + 6 = 0$.	1 pont	
Innen $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.	1 pont	
Mivel a B pont első koordinátája pozitív, $B(3; 0)$.	1 pont	
Az $f(x) = -x^2 + x + 6$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény deriváltfüggvénye $f'(x) = -2x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$).	1 pont*	
A B pontban húzott érintő meredeksége $f'(3) =$	1 pont*	
$(= -2 \cdot 3 + 1) = -5$.	1 pont*	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A B ponton átmenő, a parabola tengelyével nem párhuzamos, m meredekségű egyenes egyenlete felírható $y = mx - 3m$ alakban is.	1 pont	
Ennek az egyenesnek pontosan akkor van egy közös pontja a parabolával, ha az $x^2 + (m-1)x - 3(m+2) = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0-val egyenlő.	1 pont	
A diszkrimináns $(m-1)^2 + 12(m+2) = (m+5)^2$, tehát az érintő meredeksége –5.	1 pont	

II.

5. a)



Az ABE háromszög derékszögű és egyenlő szárú,	1 pont	
ezért $ABE\angle = 45°$.	1 pont	
Ha egy 2 egység oldalú szabályos háromszöget az egyik szimmetriatengelyével kettévágunk, akkor az így kapott háromszögek egybevágók a BCD háromszöggel (két oldalukban és az ezek által közbezárt szögükben megegyeznek),	1 pont	*A BC oldal felezőpontját kössük össze a D csúccsal! Ez a szakasz a BCD háromszöget egy egységnyi oldalú szabályos háromszögre és egy egyenlő szárú háromszögre bontja.*
ezért $DBC\angle = 30°$.	1 pont	
A két átló által bezárt szög tehát: $EBD\angle = ABC\angle - ABE\angle - DBC\angle = 75°$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b) első megoldás		
$\cos 75° = \cos(30° + 45°) =$ $= \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45° =$	1 pont	
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$	1 pont	
$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (tehát az állítás igaz).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Közelítő értékekkel való számolás nem fogadható el.

5. b) második megoldás		
$\cos^2 75° = \frac{1 + \cos 150°}{2} =$	1 pont	
$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.	1 pont	
Mivel $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, ezért az állítás igaz (hiszen cos 75º > 0).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Közelítő értékekkel való számolás nem fogadható el.

5. c)		
$BE = \sqrt{2}$	1 pont	
$BD = \sqrt{3}$	1 pont	
Az EBD háromszögben a koszinusztétel szerint: $DE^2 = 2 + 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$	1 pont	
$= 2 + \sqrt{3}$.	1 pont	
Tehát valóban $DE = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. d)		
$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{4} =$	1 pont	$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} =$
$= 2 + \sqrt{3} \left(= \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2\right)$	1 pont	$\sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} =$
Mindkét megadott szám pozitív, és a négyzetük egyenlő, tehát az állítás igaz.	1 pont	$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklásához közelítő értéket is használ, akkor 0 pontot kapjon.

6. a)		
(1) igaz (2) hamis (3) igaz (4) igaz (5) hamis	3 pont	*4 jó válaszért 2 pont, 3 jó válaszért 1 pont jár. 3-nál kevesebb jó válasz esetén nem jár pont.*
Összesen:	**3 pont**	

6. b)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen megfelelő ellenpélda (kört tartalmazó tízpontú egyszerű gráf legfeljebb 8 éllel).	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. c)		
A megfordítás: *Ha egy (tízpontú egyszerű) gráf nem tartalmaz kört, akkor a gráfnak legfeljebb 8 éle van.*	1 pont	
A megfordított állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen megfelelő ellenpélda (tízpontú fa).	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. d) első megoldás		
A 10 pontú teljes gráfnak $\left(\frac{10\cdot 9}{2}=\right)$ 45 éle van.	1 pont	
A három él kiválasztása $\binom{45}{3}$ (= 14 190) különböző módon lehetséges (ezek mindegyike azonos valószínűségű).	1 pont	
Háromélű kört akkor kapunk, ha a kiválasztott élek végpontjai a gráfnak összesen 3 csúcsát jelentik, ezért a gráf bármely 3 csúcsának kiválasztása pontosan egy háromélű kör kiválasztásának felel meg.	1 pont	
A kedvező esetek száma $\binom{10}{3}$ (= 120).	1 pont	
A kérdezett valószínűség: $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{45}{3}} \approx$	1 pont	
≈ 0,0085.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. d) **második megoldás**		
A 10 pontú teljes gráfnak $\left(\frac{10\cdot 9}{2}=\right)$ 45 éle van.	1 pont	
Az első kiválasztott él legyen ezek közül bármelyik. Kell, hogy a második kiválasztott élnek legyen az elsővel közös végpontja.	1 pont	
Az első kiválasztott él mindkét végpontjából még 8-8 él indul, a maradék 44 él közül ezek valamelyikét kell kiválasztanunk, tehát a jó választás valószínűsége ebben a lépésben $\frac{16}{44}$.	1 pont	
Harmadik lépésben a maradék 43 él közül mindenképpen a már kiválasztott két él nem közös végpontjait összekötő élt kell kiválasztanunk, tehát a jó választás valószínűsége ebben a lépésben $\frac{1}{43}$.	1 pont	
(Mivel a három választás egymástól független,) a kérdezett valószínűség $\frac{16}{44}\cdot\frac{1}{43}=$	1 pont	
$\left(=\frac{4}{473}\right)\approx 0{,}0085$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

6. d) **harmadik megoldás**		
A 10 pontú teljes gráfnak $\left(\frac{10\cdot 9}{2}=\right)$ 45 éle van.	1 pont	
A három él kiválasztása $\binom{45}{3}$ (= 14 190) különböző módon lehetséges (ezek mindegyike azonos valószínűségű).	1 pont	
Rajzoljunk meg egy élt! Ezt 45-féleképpen tehetjük meg. A kiválasztott él végpontjaiból a maradék 8 csúcs közül bármelyikhez húzott két él a kiválasztott éllel együtt a gráfnak egy körét határozza meg. A gráfban összesen $45\cdot 8$ (= 360) darab három élű kört rajzolhatunk meg ilyen módon,	1 pont	
de ekkor minden kört pontosan háromszor rajzoltunk meg. Tehát a különböző háromélű körök száma 120.	1 pont	
A kérdezett valószínűség: $\frac{120}{\binom{45}{3}}\approx$	1 pont	
$\approx 0{,}0085$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a)		
A feltételek miatt elegendő a háromszög szögeit vizsgálni. A háromszög középső szögét a-val, a sorozat differenciáját d-vel ($d > 0$) jelölve, a három szög $a - d$, a és $a + d$ fokos (a és d egészek).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$(a - d) + a + (a + d) = 180$, ahonnan $a = 60$ (a háromszög középső szöge).	1 pont	
Ha a háromszög hegyesszögű (és d pozitív egész), akkor a legnagyobb szöge legalább 61, legfeljebb 89 fokos.	1 pont	
Tehát 29 különböző, a feltételeknek megfelelő háromszög van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b) első megoldás		
Egy ilyen n szög belső szögeinek összege fokban mérve n^2, így $n^2 = (n-2) \cdot 180$.	1 pont	
$n^2 - 180n + 360 = 0$ ($n \in \mathbf{N}$ és $n \geq 3$).	1 pont	
A másodfokú egyenlet megoldásai nem egészek ($\approx 177{,}98$, illetve $\approx 2{,}02$).	1 pont	
Tehát valóban nincs a feltételnek megfelelő n-szög.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b) második megoldás		
Ha egy szabályos sokszög egy belső szöge 179º, akkor 360 oldala van (és nem 179), tehát $n \neq 179$.	1 pont	
Ha egy szabályos sokszög egy belső szöge 178º, akkor 180 oldala van (és nem 178), tehát $n \neq 178$, hasonlóképpen, ha egy szabályos sokszög egy belső szöge 177º, akkor 120 oldala van (és nem 177), tehát $n \neq 177$.	1 pont	
Az n oldalú szabályos sokszög külső szöge $\left(\frac{360°}{n}\right)$ fordítottan arányos az n-nel. Ha tehát a belső szög csökken, akkor (mivel a külső szög növekszik) az oldalszám is csökken, ha pedig az oldalszám növekszik, akkor a belső szög is növekszik.	1 pont	
Ezért $n < 120$ lehetne csak, de 120º-nál kisebb belső szögei csak a szabályos három-, négy- és ötszögnek vannak. Ezek sem felelnek meg, tehát a feladat állítása igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó (megfelelő indoklással) az összes olyan szabályos sokszög oldalszámát felsorolja, melynek szögei fokban mérve egészek, és ez alapján helyesen megállapítja, hogy nincs a feltételnek megfelelő sokszög, akkor teljes pontszámot kapjon. (A 7.c feladat megoldásához fűzve megtalálható az a táblázat, amely tartalmazza a lehetséges eseteket.)

7. c)		
Az n oldalú ($n \geq 3$) szabályos sokszög egy belső szögének nagysága fokban mérve: $\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$, és ez egy k pozitív egész számmal egyenlő.	1 pont*	*Ha az n oldalú szabályos sokszög egy belső szöge fokban mérve k ($k \in \mathbf{N}^+$), akkor egy külső szöge $180 - k$.*
Tehát $nk = n \cdot 180 - 360$,	1 pont*	*A külső szögek összege 360°, így* $\frac{360}{n} = 180 - k$.
amiből $k = 180 - \frac{360}{n}$.	1 pont*	
Mivel $n \geq 3$, ezért a 360 pozitív osztói közül a 2-nél nagyobbak mind megfelelnek (mert ezekben az esetekben k-ra 180-nál kisebb pozitív egész szám adódik).	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 360 osztópárjai: (1; 360), (2; 180), (3; 120), (4; 90), (5; 72), (6; 60), (8; 45), (9; 40), (10; 36), (12; 30), (15; 24), (18; 20).	2 pont**	*Mivel* $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, *ezért a 360 pozitív osztóinak száma* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
A 360-nak 24 pozitív osztója van.	1 pont	
(Az osztók közül az 1 és a 2 nem felel meg, ezért) 22-féleképpen választható meg az n értéke.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:

1. Az alábbi táblázat tartalmazza az n lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó k értékeket.

n	k (fok)	n	k (fok)	n	k (fok)	n	k (fok)	n	k (fok)
3	60	9	140	20	162	40	171	90	176
4	90	10	144	24	165	45	172	120	177
5	108	12	150	30	168	60	174	180	178
6	120	15	156	36	170	72	175	360	179
8	135	18	160						

*2. Ha a vizsgázó legfeljebb 9 osztópárt talál meg, akkor a **-gal jelölt 2 pontból 0 pontot, ha 10 vagy 11 osztópárt talál meg, akkor 1 pontot kapjon.*

*3. A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Egy szabályos sokszög egy belső szöge fokban mérve pontosan akkor egész szám, amikor ez egy külső szögére is igaz. Vizsgáljuk ezért a sokszög egy külső szögét.	1 pont	
Az n oldalú ($n \geq 3$) szabályos sokszög egy külső szöge $\frac{360}{n}$ fokos,	1 pont	
egy belső szöge tehát fokban mérve akkor lesz egész, amikor $\frac{360}{n}$ értéke (180-nál kisebb) egész szám.	1 pont	
Mivel $n \geq 3$, ezért a 360 pozitív osztói közül a 2-nél nagyobbak mind megfelelnek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*

8. a) **első megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lakos nem fertőzött: 0,998.	1 pont	
P(80 ember közt van legalább 1 fertőzött) = = 1 – P(senki nem fertőzött) =	1 pont	
$= 1 - 0{,}998^{80} \approx$	1 pont	
≈ 0,15.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

8. a) **második megoldás**		
Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lakos nem fertőzött: 0,998.	1 pont	
P(1 fertőzött) = $\binom{80}{1} \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998^{79} \approx 0{,}1366$. Hasonlóan P(2 fertőzött) ≈ 0,0108, P(3 fertőzött) ≈ 0,0006.	1 pont	
Mivel P(4 fertőzött) ≈ 0,00002 (és a további valószínűségek értékei gyorsan csökkennek), ezért az összeg további tagjai (a kért pontosság esetén) elhanyagolhatók.	1 pont	
Így P(80 ember közt van legalább 1 fertőzött) ≈ ≈ 0,1366 + 0,0108 + 0,0006 ≈ 0,15.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**4 pont**	

8. b)		
A fertőzöttek aránya a teljes lakosságon belül minden nap az előző napi arány 1,05-szorosára nő.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A keresett napok számát jelölje x, ekkor $0{,}2 \cdot 1{,}05^x = 1$.	1 pont	
$1{,}05^x = 5$	1 pont	
$x = \frac{\lg 5}{\lg 1{,}05} \approx 32{,}99$	1 pont	$x = \log_{1{,}05} 5$
(Mivel a fertőzöttek száma növekszik, ezért) körülbelül 33 nap alatt érné el a fertőzöttek száma az összlakosság 1%-át.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: A vizsgázó teljes pontszámot kaphat, ha egyenlet helyett egyenlőtlenséggel jól dolgozik.

8. c) **első megoldás**		
Ha a város lakóinak száma n,	1 pont	*A kiindulásul választott lélekszámtól nem függ a feladat kérdésére adott válasz. Legyen például* n = 1 000 000.
akkor a fertőzöttek száma 0,002n, a nem fertőzöttek száma 0,998n.	1 pont	*Ekkor a lakosok közül* 2000 *fertőzött,* 998 000 *nem fertőzött.*
Ha minden lakost tesztelnének, akkor a 0,002n fertőzött között $0{,}002n \cdot 0{,}99 = 0{,}00198n$ pozitív, 0,00002n negatív,	1 pont	*A* 2000 *fertőzött esetében* $(2000 \cdot 0{,}99 =)$ 1980 *pozitív,* 20 *negatív eredményt adna a teszt,*
a 0,998n nem fertőzött között pedig $0{,}998n \cdot 0{,}04 = 0{,}03992n$ pozitív, 0,95808n negatív teszteredmény lenne.	1 pont	*míg a* 998 000 *nem fertőzött ember közül* $(998\,000 \cdot 0{,}04 =)$ 39 920 *pozitív,* 958 080 *negatív eredményt kapna.*
A pozitív teszteredmények száma 0,00198n + 0,03992n = 0,0419n, közülük 0,00198n fertőzött.	1 pont	*A pozitív teszteredmények száma* 39 920 + 1980 = = 41 900, *közülük* 1980 *fertőzött.*
$\frac{0{,}00198n}{0{,}0419n} \approx 0{,}0473$,	1 pont	$\frac{1980}{41\,900} \approx 0{,}0473$
azaz valóban 0,05-nál kisebb a fertőzöttség valószínűsége pozitív teszteredmény esetén.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. c) második megoldás		
Jelölje A azt az eseményt, hogy a teszt pozitív, B pedig azt az eseményt, hogy a vizsgált személy fertőzött. Meghatározandó a $P(B\,\vert\,A)$ valószínűség.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Annak a valószínűsége, hogy egy fertőzött emberen végezték el a tesztet, és az pozitív lett: $P(AB) = 0{,}002\cdot 0{,}99$ (= 0,00198).	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy egy nem fertőzött emberen végezték el a tesztet, és az pozitív lett: $P(A\overline{B}) = 0{,}998\cdot 0{,}04$ (= 0,03992).	1 pont	
(Az AB és az $A\overline{B}$ egymást kizáró események, ezért annak a valószínűsége, hogy egy – a városban lakó, véletlenszerűen kiválasztott – ember pozitív teszteredményt kap, a két esemény valószínűségének összege:) $P(A) = 0{,}998\cdot 0{,}04 + 0{,}002\cdot 0{,}99$ (= 0,0419).	1 pont	
$P(B\,\vert\,A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} =$	1 pont	
$= \dfrac{0{,}002\cdot 0{,}99}{0{,}002\cdot 0{,}99 + 0{,}998\cdot 0{,}04} \approx 0{,}0473$,	1 pont	$\dfrac{0{,}00198}{0{,}0419} \approx 0{,}0473$
azaz valóban 0,05-nál kisebb a fertőzöttség valószínűsége pozitív teszteredmény esetén.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9. a) első megoldás		
Ha az egyik rész tömege x tonna ($0 < x < 350$), akkor a másik részé $350 - x$, és ekkor a szállítási költség $k(x) = \dfrac{x^2}{10} + 205 + \dfrac{(350-x)^2}{10} + 205$ (euró).	1 pont	
A zárójel felbontása és rendezés után: $k(x) = \dfrac{1}{5}(x^2 - 350x + 63\,300)$.	1 pont	$k'(x) = \dfrac{1}{5}(2x - 350)$
$k(x) = \dfrac{1}{5}(x-175)^2 + 6535$ (vagy $k'(175) = 0$) miatt a k függvény értéke pontosan akkor minimális, ha $x = 175$, tehát az állítás igaz.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. a) **második megoldás**		
Ha az egyik rész tömege $175 - x$ tonna ($0 \le x < 175$), akkor a másik részé $175 + x$, és ekkor a szállítási költség $k(x) = \frac{(175-x)^2}{10} + 205 + \frac{(175+x)^2}{10} + 205$ (euró).	1 pont	
A zárójelek felbontása és rendezés után: $k(x) = \frac{1}{5}x^2 + 6535$.	1 pont	
Ez pontosan akkor minimális, ha $x = 0$, tehát az állítás igaz.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. a) **harmadik megoldás**		
Ha az egyik rész tömege x tonna ($0 < x < 350$), akkor a szállítási költség $k(x) = \frac{x^2}{10} + 205 + \frac{(350-x)^2}{10} + 205$ (euró).	1 pont	
Ez pontosan akkor minimális, ha az $x^2 + (350-x)^2$ összeg minimális.	1 pont	
A négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség miatt: $x^2 + (350-x)^2 \ge 2 \cdot \frac{(x+350-x)^2}{4} = \frac{350^2}{2}$.	1 pont	
Egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha $x = 350 - x$, tehát az állítás igaz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b)		
A vasúti szállításért fizetendő összeg: $n \cdot \frac{350^2}{10n^2} + 205n$.	2 pont	*Az összeg mindkét tagjáért 1-1 pont jár.*
A négyzetre emelést és az osztást elvégezve kapjuk, hogy ez valóban $\frac{12\,250}{n} + 205n$ -nel egyenlő.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. c) első megoldás		
A szállítás és a szétosztás tervezett együttes költsége: $\frac{12\,250}{n}+205n+400(n-1)$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.	1 pont	
(Vizsgáljuk a pozitív valós számok halmazán értelmezett *f* függvényt, ha) $f(x)=\frac{12\,250}{x}+605x-400$.	1 pont	
Az *f* deriválható, és $f'(x)=-\frac{12\,250}{x^2}+605$.	1 pont	
(Ott lehet szélsőértéke *f*-nek, ahol f'-nek zérushelye van:) $-\frac{12\,250}{x^2}+605=0$.	1 pont	
(Mivel $x>0$, ezért) $x=\sqrt{\frac{12\,250}{605}}$ $(\approx 4{,}4998)$.	1 pont	
Mivel $f''(x)=\frac{24\,500}{x^3}$ $(x\in\mathbf{R}^+)$ mindenütt pozitív, ezért a $\sqrt{\frac{12\,250}{605}}$ az *f*-nek abszolút minimumhelye.	1 pont	*Egyéb helyes indoklások is elfogadhatók, például az első derivált előjelváltására való hivatkozás.*
A kapott minimumhely azonban nem egész szám, ezért (az *f* függvény monotonitási tulajdonságai miatt) két lehetőség van: 4 vagy 5 részre kell osztani az elszállítandó árut.	1 pont	*A*]0; 4,4997[*-on szigorúan monoton csökken, a*]4,4998; +∞[*-on szigorúan monoton nő az f.*
Ha $n=4$, akkor a költség 5082,5 euró, ha $n=5$, akkor pedig 5075 euró.	1 pont	
Tehát 5 egyenlő részre osztva legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

9. c) második megoldás		
$f(1)=12\,455$, $f(2)=6935$, $f(3)\approx 5498$, $f(4)=5082{,}5$, $f(5)=5075$, $f(6)\approx 5272$.	2 pont	
Azt sejtjük, hogy az 5 egyenlő részre bontáshoz tartozik a legkisebb költség.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Vizsgáljuk ezért (a valós számok halmazán) a $\frac{12\,250}{n}+605n-400<5075$ egyenlőtlenséget,	2 pont	
amely ($n>0$ miatt) ekvivalens a $121n^2-1095n+2450<0$ egyenlőtlenséggel.	1 pont	
Ennek a megoldáshalmaza $\left]\frac{490}{121};5\right[$,	1 pont	
de ebben a halmazban nincs egész szám.	1 pont	
Tehát 5 egyenlő részre osztva legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	