ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2017. május 9. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok!

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0{,}2 \\ \frac{\lg x+\lg y}{2}&=\lg\frac{x+y}{2} \end{aligned}\right\}$$

b) Oldja meg a $[-\pi;\ \pi]$ halmazon a $2\sin^2 x-\cos x=2$ egyenletet!

a)	6 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	12 pont	

2. Két várost egy 195 km hosszú vasútvonal köt össze. Ezen a vonalon személyvonattal is és gyorsvonattal is el lehet jutni egyik városból a másikba. A személyvonat átlagsebessége 18 km/h-val kisebb a gyorsvonaténál, menetideje így 45 perccel több.

a) Határozza meg a vonatok átlagsebességét!

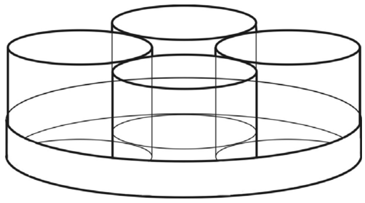
Az egyik hét munkanapjain utasszámlálást végeztek a személyvonaton. Hétfőn 200, kedden 160, szerdán 90, csütörtökön 150 utast jegyeztek fel.

b) Hány utas volt pénteken, ha tudjuk, hogy az öt adat átlaga is szerepel az adatok között, továbbá az adatok (egyetlen) módusza nem egyenlő a mediánjukkal?

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

3. **a)** Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő?

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzott érintő egyenletét!

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

5. **a)** Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{1c28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye p, további számjegyei pedig rendre q, r és s.)

b) Igazolja, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal!

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!

a)	7 pont	
b)	2 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy fémlemezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el.

a) Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, **felül nyitott** hordó elkészítéséhez, ha a gyártása során 12%-nyi hulladék keletkezik?

Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezhordókat.

b) Mekkora annak a 200 liter térfogatú, **felül nyitott** forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne?

a)	6 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé” válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $4 + 3 = 7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.)

a) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanák a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

A biológiaórán egy kezdetben tízmilliós baktériumhalmaznak a környezethez való alkalmazkodását modellezik a tanulók. Egy szabályos dobókockával dobnak, és ha a dobás eredménye 1, 2 vagy 3, akkor egymillió baktérium elpusztul. Ha a dobás eredménye 4 vagy 5, akkor nem történik semmi. Ha a dobás eredménye 6, akkor újabb egymillió baktérium keletkezik. A dobást többször egymás után megismétlik.

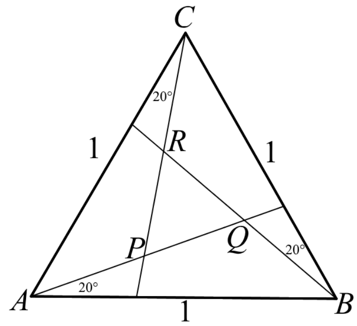
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy hét dobás után a baktériumok száma legfeljebb ötmillió lesz!

a)	8 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

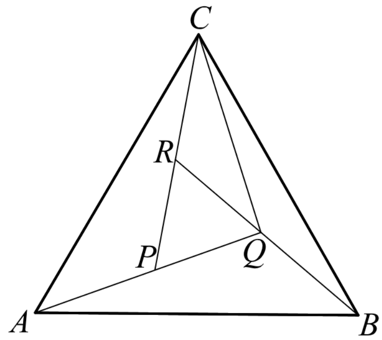
8. **a)** *Ha egy háromszög szabályos, akkor a körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával.*
Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és igazolja, hogy a megfordított állítás is igaz!

Az egységnyi oldalú *ABC* szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható *PQR* szabályos háromszöget kaptuk.



b) Számítsa ki a *PQR* háromszög oldalának hosszát!

A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható *ABQ*, *BCQ*, *CQR*, *ACP* és *PQR* háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.)



c) Összesen hány különböző színezés lehetséges?

a)	4 pont	
b)	7 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy pár kesztyű árát először p százalékkal csökkentették, majd a csökkentett ár $p + 4,5$ százalékával tovább mérsékelték. A kétszeri árcsökkentés után a kesztyű 18,6%-kal olcsóbb lett, mint az árcsökkentések előtt volt.

a) Határozza meg a két árcsökkentés százalékos értékét!

Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.)
A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk.

b) Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét!

a)	8 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td></td><td rowspan="2">a feladat sorszáma</td><td colspan="2">pontszám</td><td colspan="2">pontszám</td></tr>
<tr><td>maximális</td><td>elért</td><td>maximális</td><td>elért</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>12</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum

javító tanár

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">pontszáma egész számra kerekítve</td></tr>
<tr><td></td><td>elért</td><td>programba beírt</td></tr>
<tr><td>I. rész</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II. rész</td><td></td><td></td></tr>
</table>

dátum

dátum

javító tanár

jegyző