ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. október 17.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2017. október 17. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzoló-program segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0;\ 0)$, $B(30;\ 0)$, $C(30;\ 48)$, $D(0;\ 48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.

a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét!

A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $x^2 + y^2 - 36x - 48y + 819 = 0$ alakban adta meg.

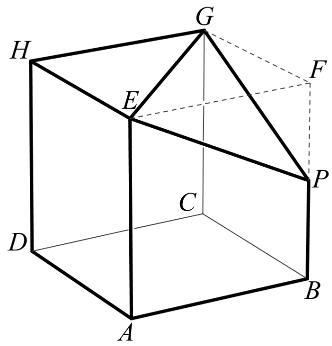
b) Számítsa ki, hány százaléka a dísztér területe a park területének!

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18;\ 24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.

c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát!

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

2. A 6 cm oldalélű tömör *ABCDEFGH* kocka *BF* élén megjelöltük az él *P* felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az *E*, *G*, *P* pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint).



a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne?

b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka *EFGH* lapjának síkja?

a)	8 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

3. **a)** A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával leírtuk az összes, különböző számjegyekből álló négyjegyű számot. Hány olyan van ezek között, amelyben a számjegyek összege 15?

b) Egy n elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ($n \geq 4$). Határozza meg a halmaz elemszámát!

a)	5 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $(x \in \mathbf{R})$.

a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú) intervallumot, amelyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív!

b) Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)\,dx = 0$ teljesüljön!

c) Határozza meg az $f:]-4;-1[\to \mathbf{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. A laptopokban is használt B típusú lítiumion-akkumulátorok töltéskapacitása minden teljes töltési ciklusnál az előző értékének körülbelül 0,06%-ával csökken.

a) Hány százalékkal csökkent az új akkumulátor töltéskapacitása, ha 350 teljes töltési ciklust végeztek vele?

Egy B típusú akkumulátorral minden évben körülbelül 200 teljes töltési ciklust végeznek. (Tételezzük fel, hogy két töltési ciklus között mindig ugyanannyi idő telik el.)

b) Mennyi a felezési ideje a kezdetben új akkumulátor töltéskapacitásának (azaz töltési kapacitása mennyi idő alatt csökken a felére)?

Egy használt laptop-akkumulátorokat árusító üzletben a 25 azonos típusú akkumulátor töltéskapacitása 60% és 80% között van, de közülük csak 10-nek kisebb a töltéskapacitása 70%-nál. Egy vevő a 25 akkumulátor közül hármat vásárol meg.

c) Ha a három akkumulátort véletlenszerűen választja ki, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb az egyiknek lesz 70%-nál kisebb a töltéskapacitása?

a)	4 pont	
b)	6 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. **a)** *Ha $a|b$ igaz, akkor $a|b^2$ is teljesül* (a és b pozitív egész számok).
Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!
($a|b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.)

b) Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?

Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk" a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!

d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!

a)	3 pont	
b)	7 pont	
c)	2 pont	
d)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

7. A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indít: ha a szerencsés vásárló a csokiszelet csomagolásának belső oldalán a „Nyert” feliratot találja, akkor ezzel egy újabb szelet csokit nyert. A gyártó úgy reklámozza a termékét, hogy „minden ötödik csoki nyer”. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csoki 0,2 valószínűséggel nyer.)

a) Juli öt szelet csokoládét vásárol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt szelet csoki között legalább egy nyerő csoki lesz?

Pali is öt szelet csokoládét vásárolt, és végül hét szelet csokival tért haza a boltból, mert nyert még kettőt.

b) Vizsgálja meg, hogy az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!
I. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között két nyerő csoki lesz, de a két nyereménycsoki egyike sem nyer.
II. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között egy nyerő csoki lesz, a nyereménycsoki nyer egy hetedik szelet csokit, de az már nem nyer.

Egy másik akcióban a csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél.

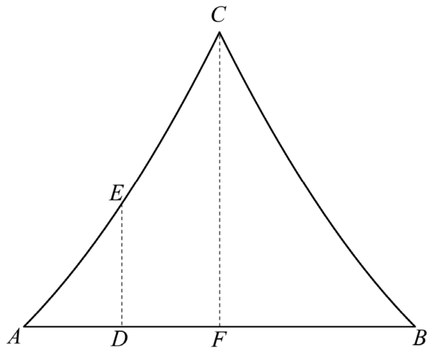
c) Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg!

a)	4 pont	
b)	7 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

8. Egy egyesületi összejövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt.

a) Hány főből állt az eredeti társaság?



Az ábrán az egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el.
A homlokzat szélessége $AB = 8$ méter, magassága $FC = 6$ méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig $DE = 2{,}5$ méter.

b) Hány négyzetméter a homlokzat területe?

a)	5 pont	
b)	11 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99?

b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot!

c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege n^3 ($n \in \mathbf{Z}^+$).

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	12		**51**	
	2.	12			
	3.	13			
	4.	14			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum dátum

javító tanár jegyző