

9. c) harmadik megoldás		
Az első n oszlopban $1 + 2 + 3 + \dots + n =$	1 pont	
$= \frac{n(n+1)}{2}$ darab szám van.	1 pont	
Az n -edik oszlopban álló utolsó szám az $\frac{n(n+1)}{2}$ -edik páratlan szám,	1 pont	
ennek értéke $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$.	1 pont	
(Teljes indukciót alkalmazunk.) Ha $n = 1$, akkor a feladat állítása igaz, mert az első oszlopban a számok „összege” $S_1 = 1 = 1^3$. Tegyük fel, hogy valamely $k \in \mathbb{N}^+$ esetén igaz az állítás, tehát $S_k = k^3$. Ekkor elég igazolnunk, hogy $S_{k+1} = (k+1)^3$.	1 pont	
A $(k+1)$ -edik oszlop első k darab elemének mindegyike a k -adik oszlop azonos sorszámú eleménél $2k$ -val több (mert a k -adik oszlopban k darab egymást követő páratlan szám van),	1 pont	
a $(k+1)$ -edik oszlopban álló utolsó szám pedig: $(k+1)^2 + (k+1) - 1 = k^2 + 3k + 1$.	1 pont	
Ezért (az $S_k = k^3$ indukciós feltevés felhasználásával) $S_{k+1} = S_k + 2k \cdot k + (k^2 + 3k + 1) =$ $= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 =$	1 pont	
$= (k+1)^3$. Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. október 17.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

- Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
- A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
- Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
- A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggyatott* vagy *áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
- Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, ha csak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
- Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

9. c) második megoldás		
Az első n oszlopban $1 + 2 + 3 + \dots + n =$	1 pont	
$= \frac{n(n+1)}{2}$ darab szám van.	1 pont	
Az n -edik oszlop utolsó száma az $\frac{n(n+1)}{2}$ -edik páratlan szám,	1 pont	
ennek értéke $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$.	1 pont	
(A számtani sorozat összegképletét alkalmazva) az első n oszlopban álló számok összege: $\frac{1 + (n^2 + n - 1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n^2 + n)n(n+1)}{4} =$	1 pont	
$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.	1 pont	
Ehhez hasonlóan az első $(n-1)$ oszlopban álló számok összege: $\frac{(n-1)^2 n^2}{4}$.	1 pont*	
Az n -edik oszlopban álló számok összege tehát $\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2 \cdot 2n \cdot 2}{4} =$	1 pont*	
$= n^3$. Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont*	
Összesen:		9 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Ismert tétel, hogy az első n pozitív egész szám köbének összege $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, tehát az első n oszlopban álló számok összege az első n pozitív egész szám köbének összegével egyenlő.	1 pont	
Az n tetszőleges, ezért az első $n-1$ oszlopban álló számok összege az első $n-1$ pozitív egész szám köbének összegével egyenlő.	1 pont	
Az n -edik oszlopban álló számok összege az előbbi két szám különbsége, tehát valóban n^3 .	1 pont	

9. a)		
A 99 az 50. páratlan szám.	1 pont	
Az első 9 oszlopban összesen $(1 + 2 + \dots + 9 =) 45$ szám van,	1 pont	
ezért a 99 a 10. oszlop 5. helyén áll.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felírja az első 10 oszlopban álló számokat, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

9. b)		
Az első 2016 oszlopban $1 + 2 + 3 + \dots + 2016 =$	1 pont	
$= \frac{2017 \cdot 2016}{2} = 2\,033\,136$ darab szám van.	1 pont	
(A k -adik páratlan szám értéke $2k - 1$ ($k \in \mathbf{Z}^+$), ezért) a 2017. oszlop első száma a 2033 137. páratlan szám,	1 pont	
ami a $2 \cdot 2033\,137 - 1 = 4\,066\,273$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

9. c) első megoldás		
Az első $(n - 1)$ oszlopban $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) =$	1 pont	
$= \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ darab szám van.	1 pont	
Az n -edik oszlop első száma az $\frac{n \cdot (n - 1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ -edik páratlan szám,	1 pont	
ennek értéke $2 \cdot \frac{n^2 - n + 2}{2} - 1 = n^2 - n + 1$.	1 pont	
Az n -edik oszlop utolsó száma ennél $(n - 1) \cdot 2$ -vel több,	1 pont	
azaz $n^2 + n - 1$.	1 pont	
(A számtani sorozat összegképletét alkalmazva) az n -edik oszlopban álló számok összege: $\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} \cdot n =$	2 pont	
$= n^3$. Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytablázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\lg$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékbán megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kítűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kítűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A kör középpontja (a téglalap átlóinak felezőpontja): $K(15; 24)$.	1 pont	
A kör sugara $KA = \sqrt{15^2 + 24^2} = \sqrt{801} \approx 28,3$.	1 pont	
A kör egyenlete így $(x-15)^2 + (y-24)^2 = 801$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

1. b)		
A díszteret alkotó kör egyenletét átalakítva: $(x-18)^2 + (y-24)^2 = 81 (=9^2)$.	1 pont	
A kör sugara 9 egység, területe $9^2\pi \approx 254,5$ terület-egység.	1 pont	kb. 25 447 m ²
A park területe $30 \cdot 48 (=1440)$ területegység.	1 pont	144 000 m ²
A díszteret területe ennek kb. $\left(\frac{9^2\pi}{30 \cdot 48} \cdot 100 \approx\right) 17,7$ százaléka.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

1. c)		
A sétaút egyenesének (egyik) normálvektora $\mathbf{n}(2; -1)$.	1 pont	
Az egyenes egyenlete $2x - y = 12$.	1 pont	
(Az egyenletbe $y = 0$ -t helyettesítve kapjuk, hogy) a sétaút egyenese a park határának AB oldalegyenesét az $M(6; 0)$ pontban metszi.	1 pont	
A sétaút parkbeli szakaszának hossza $CM = \sqrt{24^2 + 48^2} = \sqrt{2880} \approx 53,7$ egység,	1 pont	
ami a valóságban 537 méter.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

2. a)		
A nagyobbik testet három (6 cm oldalú) négyzet, két egybevágó derékszögű trapéz és két (nem egybevágó) egyenlő szárú háromszög határolja.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A három négyzet és az EGH egyenlő szárú derékszögű háromszög területe együtt $(3,5 \cdot 36 =) 126$ (cm ²).	1 pont*	
A derékszögű trapézok alapjának hossza (cm-ben mérve) 6 és 3, magassága 6, területe 27 (cm ²).	1 pont*	<i>A derékszögű trapéz területe a négyzetlap területének $\frac{3}{4}$ része, tehát 27 (cm²).</i>

8. b)		
Vegyünk fel egy alkalmas derékszögű koordináta-rendszert, amelyben legyen $A(0; 0)$ és $F(4; 0)$. Ekkor $C(4; 6)$, $D(2; 0)$ és $E(2; 2,5)$ (a tengelyeken az egységeket méterben mérjük). Az A , E , C pontokon átmenő, az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenletét keressük $y = ax^2 + bx + c$ alakban.	1 pont	<i>Ha a koordináta-rendszer origója az F pontban van: $F(0; 0)$, $A(-4; 0)$, $C(0; 6)$, $D(-2; 0)$, $E(-2; 2,5)$</i>
A parabolán rajta van az A pont, tehát $c = 0$,	1 pont	<i>A parabolán rajta van a C pont, tehát $c = 6$,</i>
rajta van a C pont, ezért $6 = 16a + 4b$,	1 pont	<i>rajta van az A pont, ezért $0 = 16a - 4b + 6$,</i>
és rajta van az E pont is, ezért $2,5 = 4a + 2b$.	1 pont	<i>és rajta van az E pont is, ezért $2,5 = 4a - 2b + 6$.</i>
$\begin{cases} 16a + 4b = 6 \\ 4a + 2b = 2,5 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása: $a = 0,125$, $b = 1$.	2 pont	$\begin{cases} 16a - 4b = -6 \\ 4a - 2b = -3,5 \end{cases}$ <i>egyenletrendszer megoldása: $a = 0,125$, $b = 2$.</i>
A parabola egyenlete: $y = 0,125x^2 + x$ ($y = \frac{1}{8}(x+4)^2 - 2$).	1 pont	$y = 0,125x^2 + 2x + 6$ ($y = \frac{1}{8}(x+8)^2 - 2$)
Az AFC parabolikus háromszög területe: $\int_0^4 (0,125x^2 + x) dx =$	1 pont	$\int_{-4}^0 (0,125x^2 + 2x + 6) dx =$
$= \left[\frac{0,125x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 =$	1 pont	$= \left[\frac{0,125x^3}{3} + x^2 + 6x \right]_{-4}^0 =$
$= \frac{32}{3}.$	1 pont	$= \frac{32}{3}$
A homlokzat területe (ennek a kétszerese, azaz) $\frac{64}{3}$ m ² ($\approx 21,3$ m ²).	1 pont	
Összesen:	11 pont	

7. c)		
A csokiszelet térfogatának 20%-os növekedése azt jelenti, hogy a térfogata 1,2-szeresére változott.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
(Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe, így) a hasonlóság aránya $\sqrt[3]{1,2} \approx 1,063$.	1 pont	
(Az eredeti szelet hosszúságát x -szel jelölve) $1,063x \approx x + 1$,	1 pont	$\sqrt[3]{1,2} x = x + 1$
ahonnan $x \approx 15,9$.	1 pont	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{1,2} - 1} \approx 15,96$
Az eredeti szelet hossza (a kért kerekítéssel) 16 cm.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	5 pont	

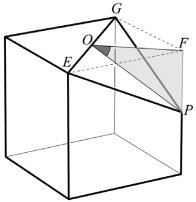
8. a) első megoldás		
(A társaság eredetileg x fős volt, a 9 fő csatlakozása után $x + 9$ fős lett. A feladat szövege szerint:) $0,25x + 5 = 0,36(x + 9)$.	2 pont	
$0,11x = 1,76$ $x = 16$	1 pont	
Ellenőrzés: A 16 fős társaságban 4 nő volt, a 25 fős társaságban pedig 9 nő, és a 9 valóban 36%-a a 25-nek.	1 pont	
Tehát a társaság eredetileg 16 fős volt.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

8. a) második megoldás		
(A nők száma a társaságban eredetileg n fő volt, a 9 fő csatlakozása után $n + 5$ fő lett. A feladat szövege szerint:) $0,36(4n + 9) = n + 5$	2 pont	$\frac{n}{0,25} + 9 = \frac{n+5}{0,36}$
$0,44n = 1,76$ $n = 4$.	1 pont	
Ha a társaságban eredetileg 4 nő volt, akkor a társaság ($4 \cdot 4 =$) 16 fős volt.	1 pont	
Ellenőrzés: A 9 fő csatlakozása után 9 nő lett a 25 fős társaságban. A 9 valóban 36%-a a 25-nek.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Az EGP egyenlő szárú háromszög EG alapjának hossza $6\sqrt{2} (\approx 8,5)$ (cm),	1 pont	
szárainak hossza (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} (\approx 6,7)$ (cm),	1 pont	<i>az alapjához tartozó magassága (középvonal a BFH háromszögben, így) a BH testátló fele, tehát $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm) hosszú.</i>
az alapjához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{(3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} (\approx 5,2)$ (cm).	1 pont	
Az EGP háromszög területe $\frac{6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6} (\approx 22,0)$ (cm ²).	1 pont	
A nagyobbik test felszíne kb. $(126 + 2 \cdot 27 + 22,0 =)$ 202,0 cm ² .	1 pont*	
Összesen:	8 pont	

A *-gal megjelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

A nagyobbik test felszínét megkapjuk, ha a kocka felszínéből elvesszük három derékszögű háromszög területét, és hozzáadjuk a síkmetszetháromszög (az EGP háromszög) területét.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Az EFG derékszögű háromszög (a kocka egy lapjának a fele) területe 18 (cm ²).	1 pont	
A másik két derékszögű háromszög (az EFP és a FGP háromszög) egybevágo, egy ilyen háromszög területe $\left(\frac{6 \cdot 3}{2} =\right) 9$ (cm ²).	1 pont	
A megmaradt test felszíne kb. $(6 \cdot 36 - 18 - 2 \cdot 9 + 22,0 =)$ 202,0 cm ² .	1 pont	

2. b)		
Ha az EG lapátló felezőpontját O -val jelöljük, akkor a keresett szög az $FOP\angle$ (mert FO és PO is merőleges a két sík EG metszéspontjára).	1 pont	
Az FOP háromszög (F -nél) derékszögű, $FP = 3$ (cm) és $FO = 3\sqrt{2}$ (cm).	1 pont	$PO = 3\sqrt{3}$ (cm)
$\operatorname{tg} FOP\angle = \frac{3}{3\sqrt{2}} (\approx 0,7071)$	1 pont	$\sin FOP\angle = \frac{3}{3\sqrt{3}} \left(= \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (\approx 0,5774)$
$FOP\angle \approx 35,3^\circ$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

3. a)		
$0+1+2+3+4+5+6=21$, így a kimaradó három számjegy összege 6.	1 pont	$15=6+5+4+0=$ $=6+5+3+1=$ $=6+4+3+2$
Kimaradhat a 0, 1, 5, vagy a 0, 2, 4, vagy az 1, 2, 3.	1 pont	
A 2, 3, 4, 6 és az 1, 3, 5, 6 számnégyesből is $4!=24$ darab megfelelő szám képezhető.	1 pont	
A 0, 4, 5, 6 számnégyesből $3\cdot 3!=18$ szám képezhető.	1 pont	
Összesen ($24+24+18=$) 66 megfelelő négyjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

3. b)		
Az n elemű halmaz 4 elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{4}$, a 2 eleműké pedig $\binom{n}{2}$,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg- oldásból derül ki.</i>
tehát megoldandó az $\binom{n}{4}=11\cdot\binom{n}{2}$ egyenlet.	1 pont	
$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=11\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$	2 pont	
$(n(n-1)\neq 0)$, tehát egyszerűsítések után: $\frac{(n-2)(n-3)}{4\cdot 3}=11$.	1 pont	
$n^2-5n-126=0$	1 pont	
Ennek pozitív gyöke a 14 (másik gyöke a -9), tehát a halmaznak 14 eleme van.	1 pont	
Ellenőrzés: a 14 elemű halmaz 2 elemű részhalmazai- nak száma 91, a 4 elemű részhalmazainak száma pe- dig 1001, és $1001=11\cdot 91$.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó igazolja, hogy az $n=14$ megoldása a feladatnak, akkor ezért 4 pont-
tot kapjon. Ha azt is bizonyítja, hogy a feladatnak más megoldása nincs, akkor maximális pont-
számot kapjon.*

7. a) első megoldás		
$P(\text{nem nyerő csoki}) = 0,8$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg- oldásból derül ki.</i>
$P(\text{legalább egy nyerő}) = 1 - P(\text{egyik sem nyerő}) =$ $= 1 - 0,8^5 (= 1 - 0,32768) \approx$ $\approx 0,672$	2 pont	
	1 pont	
Összesen:	4 pont	

7. a) második megoldás		
$P(\text{nem nyerő csoki}) = 0,8$	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg- oldásból derül ki.</i>
$P(\text{legalább egy nyerő}) = P(1 \text{ nyerő}) + P(2 \text{ nyerő}) +$ $+ P(3 \text{ nyerő}) + P(4 \text{ nyerő}) + P(5 \text{ nyerő}) =$ $= \binom{5}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 + \binom{5}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 +$ $+ \binom{5}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 + \binom{5}{5} \cdot 0,2^5 (= 0,4096 + 0,2048 +$ $+ 0,0512 + 0,0064 + 0,00032) \approx$ $\approx 0,672$	2 pont	
	1 pont	
Összesen:	4 pont	

7. b)		
$P(2 \text{ nyerő csoki}) = \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a két megnyert csoki egyike sem nyer: $0,8^2 = 0,64$.	1 pont	
(A két esemény független, így) az I. esemény való- színűsége $p_1 = 0,2048 \cdot 0,64 \approx 0,131$.	1 pont	
$P(1 \text{ nyerő csoki}) = \binom{5}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,4096$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a megnyert csokival nyer egy hetedik csokit, amelyik viszont már nem nyer többet: $0,2 \cdot 0,8 = 0,16$.	1 pont	
(A két esemény független, így) a II. esemény valószí- nősége $p_2 = 0,4096 \cdot 0,16 \approx 0,066$.	1 pont	
Az I. esemény valószínűsége a nagyobb.	1 pont	$p_1 = 2p_2$
Összesen:	7 pont	

6. b) második megoldás		
$n^2 - pn = n(n - p)$	1 pont	
Ha $p = 2$, akkor $n(n - 2)$ csak úgy lehet prím, ha (a kisebbik tényező) $n - 2 = 1$ (és a nagyobbik tényező, n prím).	1 pont	
Innen $n = 3$ megoldást ad (hiszen ekkor $n^2 - pn = 3$, ami valóban prím).	1 pont	
Ha $p > 2$, akkor p páratlan. Ekkor n és $n - p$ különböző paritású, szorzatuk tehát páros.	1 pont	
Ha a szorzat páros prímszám, akkor csak 2 lehet, ekkor $n = 2$ és $p = 1$, ami viszont nem prím, tehát innen nem kapunk megoldást.	2 pont	
Tehát egyetlen olyan pozitív egész n szám van ($n = 3$), amely eleget tesz a követelményeknek.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

6. c)		
Mivel mindegyik szám önmagának is osztója, ezért a gráf mindegyik csúcsát önmagával is „összeköttöttük”.	1 pont	<i>Ez a pont jár egy megfelelő ábráért vagy ábrarészletért is.</i>
A gráfban van hurokél, tehát a gráf nem egyszerű.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

6. d)		
Minden négyzetszámnak páratlan sok osztója van,	1 pont*	
és minden nem négyzetszámnak páros sok osztója van.	1 pont*	
1-től 10-ig három darab négyzetszám van (1, 4, 9).	1 pont*	
(Egy adott szám osztói legfeljebb akkorák, mint maga a szám, emiatt a lapon megadott tíz szám mindegyik osztója szerepel a lapon. Ezért) három páratlan számot és hét páros számot kell összeadni, tehát az összekötő vonalak (élek) száma valóban páratlan.	1 pont	<i>A gráf éleinek száma $(1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 4 + 3 + 4 =)$ 27, ami valóban páratlan.</i>
Összesen:	4 pont	

Megjegyzések:

1. A *-gal jelölt 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó helyesen felrajzolja a gráfot, vagy felsorolja a 10 pozitív egész számot, majd mindegyik esetben helyesen adja meg az osztók számát.

Ha ebben a részben egy hibát vét, akkor 1 pontot veszítsen, ha 2 hibát vét, akkor 2 pontot veszítsen. Három vagy több hiba esetén erre a részre 0 pontot kapjon.

2. Ha a vizsgázó a 10 hurokél nélkül határozza meg a gráf éleinek számát, akkor legfeljebb 3 pontot kapjon.

4. a)		
$g(x) = \frac{1}{6}x^2(3 - 2x)$	1 pont	$\frac{x^2}{2} < \frac{x^3}{3}$
A szorzatban csak a $3 - 2x$ tényező lehet negatív (ha $x > 1,5$).	1 pont	$(x = 0 \text{ nem megoldás})$ $x^2 > 0$, ezért $\frac{1}{2} < \frac{x}{3}$.
Egy megfelelő intervallum (az $]1,5; \infty[$ valamely részhalmazának) megadása.	1 pont	<i>Bármely helyes megadási mód elfogadható.</i>
Összesen:	3 pont	

4. b)		
$\int_0^c g(x) dx = \left[-\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} \right]_0^c =$	1 pont	
$= -\frac{c^4}{12} + \frac{c^3}{6}$	1 pont	
$-\frac{c^4}{12} + \frac{c^3}{6} = 0$ -ból $c = 0$,	1 pont	
vagy $c = 2$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

4. c)		
(Csak ott lehet szélsőérték helye f -nek, ahol f' -nek zérushelye van:)	1 pont	
$f'(x) = -x^2 + x + 12$ ($-4 < x < -1$)		
$-x^2 + x + 12 = 0$	1 pont	
Az egyenlet valós gyökei -3 és 4 ,	1 pont	
de a 4 az értelmezési tartományon kívül esik.	1 pont	
Az f' $x < -3$ esetén negatív, $x > -3$ esetén pedig pozitív,	1 pont	$f''(x) = -2x + 1$, tehát f'' a teljes értelmezési tartományán (és így $x = -3$ -ban is) pozitív.
tehát $x = -3$ (abszolút) minimumhely.	1 pont	
A minimum értéke $f(-3) = -2,5$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az f függvény megadott értelmezési tartományát, de helyes eredményre jut a vizsgált függvény -3 helyen felvett (helyi) minimumáról, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.

II.

5. a)		
Minden töltési ciklus után az akkumulátor töltéskapacitása a megelőző értékének kb. 0,9994-szeresére (99,94%-ára) változik.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
350 teljes töltés után kapacitásának $0,9994^{350} \approx$	1 pont	
$\approx 0,8105$ része marad meg,	1 pont	
a csökkenés tehát körülbelül 19%-os.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

5. b) első megoldás		
Az akkumulátor kapacitása n töltési ciklus után a $0,9994^n$ -szeresére változik.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Megoldandó tehát a $0,9994^n = 0,5$ egyenlet.	1 pont	
$n = \log_{0,9994} 0,5 \approx$	1 pont	$n \cdot \lg 0,9994 = \lg 0,5$
≈ 1155	1 pont	$n = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,9994} \approx 1155$
Az 1155 töltési ciklushoz $\frac{1155}{200} = 5,775$ év kell,	1 pont	
a felezési idő tehát körülbelül 5,8 év.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

5. b) második megoldás		
Az akkumulátor kapacitása minden évben a megelőző évi értékének $0,9994^{200} \approx$	1 pont	
$\approx 0,8869$ részére csökken.	1 pont	
A csökkenés mértéke n év után $0,8869^n$,	1 pont	
innen $0,8869^n = 0,5$ a megoldandó egyenlet.	1 pont	
$n = \log_{0,8869} 0,5 \left(= \frac{\lg 0,5}{\lg 0,8869} \right) \approx 5,775$,	1 pont	
a felezési idő tehát körülbelül 5,8 év.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: Más, észszerűen és helyesen kerekített érték (pl. 6 év) is elfogadható.

5. c)		
Annak a valószínűségét keressük, hogy a vevő 0 vagy 1 darab 70%-nál kisebb töltéskapacitású akkumulátort vásárol.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
3 akkumulátort összesen $\binom{25}{3} (= 2300)$ -féleképpen vásárolhat (összes eset száma).	1 pont	
70%-nál kisebb töltéskapacitású akkumulátorból 0 darabot $\binom{15}{3} (= 455)$ -féleképpen,	1 pont	
1 darabot $\binom{10}{1} \cdot \binom{15}{2} (= 1050)$ -féleképpen vásárolhat.	1 pont	
A kérdezett valószínűség (a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa): $\frac{455 + 1050}{2300} =$	1 pont	
$\left(= \frac{301}{460} \right) \approx 0,654$.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó visszatevéses modellel dolgozik, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

6. a)		
Az állítás megfordítása: Ha $a b^2$ igaz, akkor $a b$ is teljesül (a és b pozitív egész számok).	1 pont	<i>Ha egy (pozitív egész) szám osztója egy másik (pozitív egész) szám négyzetének, akkor a másik számnak is osztója.</i>
Az állítás hamis.	1 pont	
Megfelelő ellenpélda (például $a = 4$ és $b = 2$).	1 pont	
Összesen:	3 pont	

6. b) első megoldás		
$n^2 - pn = n(n - p)$	1 pont	
Ez a szorzat csak akkor lehet prím, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prím.	1 pont	
$(n - p < n$, ezért) $n - p = 1$, és n prím.	1 pont	
Mivel $n = p + 1$, így két szomszédos prímszámot (p és $p + 1$) keresünk.	2 pont	
(Mivel ekkor az egyik közülük páros, ezért) csak egy ilyen számpár van: a 2 és a 3 (tehát $p = 2$).	1 pont	
Tehát egyetlen olyan pozitív egész n szám van ($n = 3$), amely eleget tesz a követelményeknek.	1 pont	
Összesen:	7 pont	