ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2017. október 17.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A kör középpontja (a téglalap átlóinak felezőpontja): $K(15; 24)$.	1 pont	
A kör sugara $KA = \sqrt{15^2 + 24^2} = \sqrt{801}$ (≈ 28,3).	1 pont	
A kör egyenlete így $(x-15)^2 + (y-24)^2 = 801$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. b)		
A díszteret alkotó kör egyenletét átalakítva: $(x-18)^2 + (y-24)^2 = 81 \,(= 9^2)$.	1 pont	
A kör sugara 9 egység, területe $9^2\pi$ (≈ 254,5) területegység.	1 pont	*kb.* 25 447 m^2
A park területe $30 \cdot 48$ (= 1440) területegység.	1 pont	144 000 m^2
A dísztér területe ennek kb. $\left(\frac{9^2\pi}{30 \cdot 48} \cdot 100 \approx\right)$ 17,7 százaléka.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

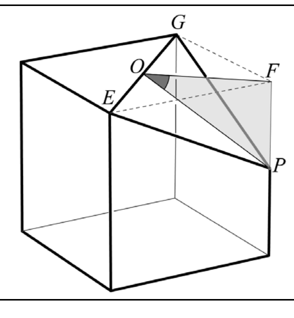
1. c)		
A sétaút egyenesének (egyik) normálvektora **n**(2; –1).	1 pont	
Az egyenes egyenlete $2x - y = 12$.	1 pont	
(Az egyenletbe $y = 0$-t helyettesítve kapjuk, hogy) a sétaút egyenese a park határának AB oldalegyenesét az $M(6; 0)$ pontban metszi.	1 pont	
A sétaút parkbeli szakaszának hossza $CM = \sqrt{24^2 + 48^2} = \sqrt{2880} \approx 53{,}7$ egység,	1 pont	
ami a valóságban 537 méter.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. a)		
A nagyobbik testet három (6 cm oldalú) négyzet, két egybevágó derékszögű trapéz és két (nem egybevágó) egyenlő szárú háromszög határolja.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A három négyzet és az EGH egyenlő szárú derékszögű háromszög területe együtt (3,5 · 36 =) 126 (cm^2).	1 pont*	
A derékszögű trapézok alapjának hossza (cm-ben mérve) 6 és 3, magassága 6, területe 27 (cm^2).	1 pont*	*A derékszögű trapéz területe a négyzetlap területének $\frac{3}{4}$ része, tehát* 27 (cm^2).

Az *EGP* egyenlő szárú háromszög *EG* alapjának hossza $6\sqrt{2}$ (≈ 8,5) (cm),	1 pont	
szárainak hossza (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ (≈ 6,7) (cm),	1 pont	*az alapjához tartozó magassága (középvonal a BFH háromszögben, így) a BH testátló fele, tehát* $\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ (cm) *hosszú.*
az alapjához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel) $\sqrt{(3\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ (≈ 5,2) (cm).	1 pont	
Az *EGP* háromszög területe $\frac{6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{6}$ (≈ 22,0) (cm^2).	1 pont	
A nagyobbik test felszíne kb. (126 + 2 · 27 + 22,0 =) 202,0 cm^2.	1 pont*	
Összesen:	**8 pont**	

*A *-gal megjelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A nagyobbik test felszínét megkapjuk, ha a kocka felszínéből elvesszük három derékszögű háromszög területét, és hozzáadjuk a síkmetszetháromszög (az *EGP* háromszög) területét.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az *EFG* derékszögű háromszög (a kocka egy lapjának a fele) területe 18 (cm^2).	1 pont	
A másik két derékszögű háromszög (az *EFP* és a *FGP* háromszög) egybevágó, egy ilyen háromszög területe $\left(\frac{6\cdot 3}{2}=\right)$ 9 (cm^2).	1 pont	
A megmaradt test felszíne kb. (6 · 36 – 18 – 2 · 9 + 22,0 =) 202,0 cm^2.	1 pont	

2. b)		
Ha az *EG* lapátló felezőpontját *O*-val jelöljük, akkor a keresett szög az *FOP*∠ (mert *FO* és *PO* is merőleges a két sík *EG* metszésvonalára).	1 pont	
Az *FOP* háromszög (*F*-nél) derékszögű, *FP* = 3 (cm) és *FO* = $3\sqrt{2}$ (cm).	1 pont	*PO* = $3\sqrt{3}$ (cm)
$\mathrm{tg}\, FOP\angle=\frac{3}{3\sqrt{2}}$ (≈ 0,7071)	1 pont	$\sin FOP\angle=\frac{3}{3\sqrt{3}}\left(=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (≈ 0,5774)
FOP∠ ≈ 35,3°	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. a)		
$0+1+2+3+4+5+6=21$, így a kimaradó három számjegy összege 6.	1 pont	$15=6+5+4+0=$ $=6+5+3+1=$ $=6+4+3+2$
Kimaradhat a 0, 1, 5, vagy a 0, 2, 4, vagy az 1, 2, 3.	1 pont	
A 2, 3, 4, 6 és az 1, 3, 5, 6 számnégyesből is 4! = 24 darab megfelelő szám képezhető.	1 pont	
A 0, 4, 5, 6 számnégyesből $3\cdot 3!=18$ szám képezhető.	1 pont	
Összesen $(24+24+18=)$ 66 megfelelő négyjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. b)		
Az n elemű halmaz 4 elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{4}$, a 2 eleműeké pedig $\binom{n}{2}$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
tehát megoldandó az $\binom{n}{4}=11\cdot\binom{n}{2}$ egyenlet.	1 pont	
$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=11\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$	2 pont	
$(n(n-1)\neq 0$, tehát) egyszerűsítések után: $\frac{(n-2)(n-3)}{4\cdot 3}=11$.	1 pont	
$n^2-5n-126=0$	1 pont	
Ennek pozitív gyöke a 14 (másik gyöke a −9), tehát a halmaznak 14 eleme van.	1 pont	
Ellenőrzés: a 14 elemű halmaz 2 elemű részhalmazainak száma 91, a 4 elemű részhalmazainak száma pedig 1001, és $1001 = 11\cdot 91$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó igazolja, hogy az $n=14$ *megoldása a feladatnak, akkor ezért 4 pontot kapjon. Ha azt is bizonyítja, hogy a feladatnak más megoldása nincs, akkor maximális pontszámot kapjon.*

4. a)		
$g(x)=\frac{1}{6}x^2(3-2x)$	1 pont	$\frac{x^2}{2}<\frac{x^3}{3}$
A szorzatban csak a 3 – 2x tényező lehet negatív (ha x > 1,5).	1 pont	*(x = 0 nem megoldás)* $x^2>0$, *ezért* $\frac{1}{2}<\frac{x}{3}$.
Egy megfelelő intervallum (az]1,5; ∞[valamely részhalmazának) megadása.	1 pont	*Bármely helyes megadási mód elfogadható.*
Összesen:	**3 pont**	

4. b)		
$\int_0^c g(x)\,dx=\left[-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}\right]_0^c=$	1 pont	
$=-\frac{c^4}{12}+\frac{c^3}{6}$	1 pont	
$-\frac{c^4}{12}+\frac{c^3}{6}=0$ -ból c = 0,	1 pont	
vagy c = 2.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. c)		
(Csak ott lehet szélsőértékhelye f-nek, ahol f' -nek zérushelye van:) $f'(x)=-x^2+x+12$ (–4 < x < –1)	1 pont	
$-x^2+x+12=0$	1 pont	
Az egyenlet valós gyökei –3 és 4,	1 pont	
de a 4 az értelmezési tartományon kívül esik.	1 pont	
Az f' x < –3 esetén negatív, x > –3 esetén pedig pozitív,	1 pont	$f''(x)=-2x+1$, *tehát* f'' *a teljes értelmezési tartományán (és így x = –3-ban is) pozitív.*
tehát x = –3 (abszolút) minimumhely.	1 pont	
A minimum értéke f(–3) = –2,5.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó nem veszi figyelembe az f függvény megadott értelmezési tartományát, de helyes eredményre jut a vizsgált függvény –3 helyen felvett (helyi) minimumáról, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.

II.

5. a)		
Minden töltési ciklus után az akkumulátor töltéskapacitása a megelőző értékének kb. 0,9994-szeresére (99,94%-ára) változik.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
350 teljes töltés után kapacitásának $0{,}9994^{350} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}8105$ része marad meg,	1 pont	
a csökkenés tehát körülbelül 19%-os.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. b) első megoldás		
Az akkumulátor kapacitása n töltési ciklus után a $0{,}9994^n$-szeresére változik.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megoldandó tehát a $0{,}9994^n = 0{,}5$ egyenlet.	1 pont	
$n = \log_{0{,}9994} 0{,}5 \approx$	1 pont	$n \cdot \lg 0{,}9994 = \lg 0{,}5$
≈ 1155	1 pont	$n = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}9994} \approx 1155$
Az 1155 töltési ciklushoz $\frac{1155}{200} = 5{,}775$ év kell,	1 pont	
a felezési idő tehát körülbelül 5,8 év.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. b) második megoldás		
Az akkumulátor kapacitása minden évben a megelőző évi értékének $0{,}9994^{200} \approx$	1 pont	
$\approx 0{,}8869$ részére csökken.	1 pont	
A csökkenés mértéke n év után $0{,}8869^n$,	1 pont	
innen $0{,}8869^n = 0{,}5$ a megoldandó egyenlet.	1 pont	
$n = \log_{0{,}8869} 0{,}5 \left(= \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}8869} \right) \approx 5{,}775$,	1 pont	
a felezési idő tehát körülbelül 5,8 év.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Más, észszerűen és helyesen kerekített érték (pl. 6 év) is elfogadható.

5. c)		
Annak a valószínűségét keressük, hogy a vevő 0 vagy 1 darab 70%-nál kisebb töltéskapacitású akkumulátort vásárol.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
3 akkumulátort összesen $\binom{25}{3}$ (= 2300)-féleképpen vásárolhat (összes eset száma).	1 pont	
70%-nál kisebb töltéskapacitású akkumulátorból 0 darabot $\binom{15}{3}$ (= 455)-féleképpen,	1 pont	
1 darabot $\binom{10}{1}\cdot\binom{15}{2}$ (= 1050)-féleképpen vásárolhat.	1 pont	
A kérdezett valószínűség (a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa): $\frac{455+1050}{2300}=$	1 pont	
$\left(=\frac{301}{460}\right)\approx 0{,}654.$	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó visszatevéses modellel dolgozik, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

6. a)		
Az állítás megfordítása: Ha $a\|b^2$ igaz, akkor $a\|b$ is teljesül (a és b pozitív egész számok).	1 pont	*Ha egy (pozitív egész) szám osztója egy másik (pozitív egész) szám négyzetének, akkor a másik számnak is osztója.*
Az állítás hamis.	1 pont	
Megfelelő ellenpélda (például $a = 4$ és $b = 2$).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. b) első megoldás		
$n^2-pn=n(n-p)$	1 pont	
Ez a szorzat csak akkor lehet prím, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prím.	1 pont	
($n-p<n$, ezért) $n-p=1$, és n prím.	1 pont	
Mivel $n=p+1$, így két szomszédos prímszámot (p és $p+1$) keresünk.	2 pont	
(Mivel ekkor az egyik közülük páros, ezért) csak egy ilyen számpár van: a 2 és a 3 (tehát $p = 2$).	1 pont	
Tehát egyetlen olyan pozitív egész n szám van ($n = 3$), amely eleget tesz a követelményeknek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. b) második megoldás		
$n^2 - pn = n(n-p)$	1 pont	
Ha $p = 2$, akkor $n(n-2)$ csak úgy lehet prím, ha (a kisebbik tényező) $n - 2 = 1$ (és a nagyobbik tényező, n prím).	1 pont	
Innen $n = 3$ megoldást ad (hiszen ekkor $n^2 - pn = 3$, ami valóban prím).	1 pont	
Ha $p > 2$, akkor p páratlan. Ekkor n és $n - p$ különböző paritású, szorzatuk tehát páros.	1 pont	
Ha a szorzat páros prímszám, akkor csak 2 lehet, ekkor $n = 2$ és $p = 1$, ami viszont nem prím, tehát innen nem kapunk megoldást.	2 pont	
Tehát egyetlen olyan pozitív egész n szám van ($n = 3$), amely eleget tesz a követelményeknek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. c)		
Mivel mindegyik szám önmagának is osztója, ezért a gráf mindegyik csúcsát önmagával is „összekötöttük”.	1 pont	*Ez a pont jár egy megfelelő ábráért vagy ábrarészletért is.*
A gráfban van hurokél, tehát a gráf nem egyszerű.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6. d)		
Minden négyzetszámnak páratlan sok osztója van,	1 pont*	
és minden nem négyzetszámnak páros sok osztója van.	1 pont*	
1-től 10-ig három darab négyzetszám van (1, 4, 9).	1 pont*	
(Egy adott szám osztói legfeljebb akkorák, mint maga a szám, emiatt a lapon megadott tíz szám mindegyik osztója szerepel a lapon. Ezért) három páratlan számot és hét páros számot kell összeadni, tehát az összekötő vonalak (élek) száma valóban páratlan.	1 pont	*A gráf éleinek száma (1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + + 2 + 4 + 3 + 4 =) 27, ami valóban páratlan.*
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzések:
*1. A *-gal jelölt 3 pont akkor is jár, ha a vizsgázó helyesen felrajzolja a gráfot, vagy felsorolja a 10 pozitív egész számot, majd mindegyik esetben helyesen adja meg az osztók számát.*
Ha ebben a részben egy hibát vét, akkor 1 pontot veszítsen, ha 2 hibát vét, akkor 2 pontot veszítsen. Három vagy több hiba esetén erre a részre 0 pontot kapjon.
2. Ha a vizsgázó a 10 hurokél nélkül határozza meg a gráf éleinek számát, akkor legfeljebb 3 pontot kapjon.

7. a) **első megoldás**		
P(nem nyerő csoki) = 0,8	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
P(legalább egy nyerő) = 1 – P(egyik sem nyerő) = $= 1-0{,}8^5$ (= 1 – 0,32768) ≈	2 pont	
≈ 0,672	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. a) **második megoldás**		
P(nem nyerő csoki) = 0,8	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
P(legalább egy nyerő) = P(1 nyerő) + P(2 nyerő) + + P(3 nyerő) + P(4 nyerő) + P(5 nyerő) = $=\binom{5}{1}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^4+\binom{5}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3+\binom{5}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2+$ $+\binom{5}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8+\binom{5}{5}\cdot 0{,}2^5$ (= 0,4096 + 0,2048 + + 0,0512 + 0,0064 + 0,00032) ≈	2 pont	
≈ 0,672	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b)		
P(2 nyerő csoki) = $\binom{5}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3=0{,}2048$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a két megnyert csoki egyike sem nyer: $0{,}8^2=0{,}64$.	1 pont	
(A két esemény független, így) az I. esemény valószínűsége $p_1=0{,}2048\cdot 0{,}64\approx 0{,}131$.	1 pont	
P(1 nyerő csoki) = $\binom{5}{1}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^4=0{,}4096$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a megnyert csokival nyer egy hetedik csokit, amelyik viszont már nem nyer többet: $0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}16$.	1 pont	
(A két esemény független, így) a II. esemény valószínűsége $p_2=0{,}4096\cdot 0{,}16\approx 0{,}066$.	1 pont	
Az I. esemény valószínűsége a nagyobb.	1 pont	$p_1 = 2p_2$
Összesen:	**7 pont**	

7. c)		
A csokiszelet térfogatának 20%-os növekedése azt jelenti, hogy a térfogata 1,2-szeresére változott.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe, így) a hasonlóság aránya $\sqrt[3]{1,2} \approx 1,063$.	1 pont	
(Az eredeti szelet hosszúságát x-szel jelölve) $1,063x \approx x + 1$,	1 pont	$\sqrt[3]{1,2}\, x = x + 1$
ahonnan $x \approx 15,9$.	1 pont	$x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1,2} - 1} \approx 15,96$
Az eredeti szelet hossza (a kért kerekítéssel) 16 cm.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

8. a) első megoldás		
(A társaság eredetileg x fős volt, a 9 fő csatlakozása után $x + 9$ fős lett. A feladat szövege szerint:) $0,25x + 5 = 0,36(x + 9)$.	2 pont	
$0,11x = 1,76$ $x = 16$	1 pont	
Ellenőrzés: A 16 fős társaságban 4 nő volt, a 25 fős társaságban pedig 9 nő, és a 9 valóban 36%-a a 25-nek.	1 pont	
Tehát a társaság eredetileg 16 fős volt.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. a) második megoldás		
(A nők száma a társaságban eredetileg n fő volt, a 9 fő csatlakozása után $n + 5$ fő lett. A feladat szövege szerint:) $0,36(4n + 9) = n + 5$	2 pont	$\dfrac{n}{0,25} + 9 = \dfrac{n+5}{0,36}$
$0,44n = 1,76$ $n = 4$.	1 pont	
Ha a társaságban eredetileg 4 nő volt, akkor a társaság $(4 \cdot 4 =)$ 16 fős volt.	1 pont	
Ellenőrzés: A 9 fő csatlakozása után 9 nő lett a 25 fős társaságban. A 9 valóban 36%-a a 25-nek.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. b)		
Vegyünk fel egy alkalmas derékszögű koordináta-rendszert, amelyben legyen $A(0; 0)$ és $F(4; 0)$. Ekkor $C(4; 6)$, $D(2; 0)$ és $E(2; 2{,}5)$ (a tengelyeken az egységeket méterben mérjük). Az A, E, C pontokon átmenő, az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenletét keressük $y = ax^2 + bx + c$ alakban.	1 pont	*Ha a koordináta-rendszer origója az F pontban van:* $F(0; 0)$, $A(–4; 0)$, $C(0; 6)$, $D(–2; 0)$, $E(–2; 2{,}5)$
A parabolán rajta van az A pont, tehát $c = 0$,	1 pont	*A parabolán rajta van a C pont, tehát* $c = 6$,
rajta van a C pont, ezért $6 = 16a + 4b$,	1 pont	*rajta van az A pont, ezért* $0 = 16a – 4b + 6$,
és rajta van az E pont is, ezért $2{,}5 = 4a + 2b$.	1 pont	*és rajta van az E pont is, ezért* $2{,}5 = 4a – 2b + 6$.
A $\left.\begin{matrix}16a+4b=6\\4a+2b=2{,}5\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $a = 0{,}125$, $b = 1$.	2 pont	*A* $\left.\begin{matrix}16a-4b=-6\\4a-2b=-3{,}5\end{matrix}\right\}$ *egyenletrendszer megoldása*: $a = 0{,}125$, $b = 2$.
A parabola egyenlete: $y = 0{,}125x^2 + x$ ($y = \frac{1}{8}(x+4)^2 - 2$).	1 pont	$y = 0{,}125x^2 + 2x + 6$ ($y = \frac{1}{8}(x+8)^2 - 2$)
Az AFC parabolikus háromszög területe: $\int_0^4 (0{,}125x^2 + x)\,dx =$	1 pont	$\int_{-4}^0 (0{,}125x^2 + 2x + 6)\,dx =$
$= \left[\frac{0{,}125x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^4 =$	1 pont	$= \left[\frac{0{,}125x^3}{3} + x^2 + 6x\right]_{-4}^0 =$
$= \frac{32}{3}$.	1 pont	$= \frac{32}{3}$
A homlokzat területe (ennek a kétszerese, azaz) $\frac{64}{3}$ m² (≈ 21,3 m²).	1 pont	
Összesen:	**11 pont**	

9. a)		
A 99 az 50. páratlan szám.	1 pont	
Az első 9 oszlopban összesen (1 + 2 + ... + 9 =) 45 szám van,	1 pont	
ezért a 99 a 10. oszlop 5. helyén áll.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felírja az első 10 oszlopban álló számokat, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.

9. b)		
Az első 2016 oszlopban 1 + 2 + 3 + … + 2016 =	1 pont	
$= \frac{2017 \cdot 2016}{2}$ = 2 033 136 darab szám van.	1 pont	
(A *k*-adik páratlan szám értéke $2k - 1$ ($k \in \mathbf{Z}^+$), ezért) a 2017. oszlop első száma a 2 033 137. páratlan szám,	1 pont	
ami a $2 \cdot 2\,033\,137 - 1 = 4\,066\,273$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c) első megoldás		
Az első $(n - 1)$ oszlopban $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) =$	1 pont	
$= \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ darab szám van.	1 pont	
Az *n*-edik oszlop első száma az $\frac{n \cdot (n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$-edik páratlan szám,	1 pont	
ennek értéke $2 \cdot \frac{n^2 - n + 2}{2} - 1 = n^2 - n + 1$.	1 pont	
Az *n*-edik oszlop utolsó száma ennél $(n - 1) \cdot 2$-vel több,	1 pont	
azaz $n^2 + n - 1$.	1 pont	
(A számtani sorozat összegképletét alkalmazva) az *n*-edik oszlopban álló számok összege: $\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} \cdot n =$	2 pont	
$= n^3$. Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

9. c) második megoldás		
Az első n oszlopban $1 + 2 + 3 + \ldots + n =$	1 pont	
$= \dfrac{n(n+1)}{2}$ darab szám van.	1 pont	
Az n-edik oszlop utolsó száma az $\dfrac{n(n+1)}{2}$-edik páratlan szám,	1 pont	
ennek értéke $2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$.	1 pont	
(A számtani sorozat összegképletét alkalmazva) az első n oszlopban álló számok összege: $\dfrac{1+(n^2+n-1)}{2} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n^2+n)\,n\,(n+1)}{4} =$	1 pont	
$= \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.	1 pont	
Ehhez hasonlóan az első $(n - 1)$ oszlopban álló számok összege: $\dfrac{(n-1)^2 n^2}{4}$.	1 pont*	
Az n-edik oszlopban álló számok összege tehát $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{n^2(n-1)^2}{4} = \dfrac{n^2 \cdot 2n \cdot 2}{4} =$	1 pont*	
$= n^3$. Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont*	
Összesen:	**9 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 3 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Ismert tétel, hogy az első n pozitív egész szám köbének összege $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, tehát az első n oszlopban álló számok összege az első n pozitív egész szám köbének összegével egyenlő.	1 pont	
Az n tetszőleges, ezért az első $n - 1$ oszlopban álló számok összege az első $n - 1$ pozitív egész szám köbének összegével egyenlő.	1 pont	
Az n-edik oszlopban álló számok összege az előbbi két szám különbsége, tehát valóban n^3.	1 pont	

9. c) harmadik megoldás		
Az első n oszlopban $1 + 2 + 3 + \ldots + n =$	1 pont	
$= \frac{n(n+1)}{2}$ darab szám van.	1 pont	
Az n-edik oszlopban álló utolsó szám az $\frac{n(n+1)}{2}$-edik páratlan szám,	1 pont	
ennek értéke $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$.	1 pont	
(Teljes indukciót alkalmazunk.) Ha $n = 1$, akkor a feladat állítása igaz, mert az első oszlopban a számok „összege” $S_1 = 1 = 1^3$. Tegyük fel, hogy valamely $k \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz az állítás, tehát $S_k = k^3$. Ekkor elég igazolnunk, hogy $S_{k+1} = (k+1)^3$.	1 pont	
A (k + 1)-edik oszlop első k darab elemének mindegyike a k-adik oszlop azonos sorszámú eleménél 2k-val több (mert a k-adik oszlopban k darab egymást követő páratlan szám van),	1 pont	
a (k + 1)-edik oszlopban álló utolsó szám pedig: $(k+1)^2 + (k+1) - 1 = k^2 + 3k + 1$.	1 pont	
Ezért (az $S_k = k^3$ indukciós feltevés felhasználásával) $S_{k+1} = S_k + 2k \cdot k + (k^2 + 3k + 1) =$ $= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 =$	1 pont	
$= (k+1)^3$. Ezzel az állítást igazoltuk.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	