

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. május 8.

MATEMATIKA

**EMELT SZINTŰ
ÍRÁSBELI VIZSGA**

**JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ**

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám** a mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket**.
 - helyes lépés: *kipipálás*
 - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
 - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
 - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
 - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
 - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésze előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszerkesztésekért, részleépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el**: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytablázatban fellelhető táblázatok helyettesítése ($\sin$, $\cos$, $\lg$, $\log$ és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százlékben megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető**. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
Az osztályközépek (kilogrammban) rendre: 54,5; 58,5; 62,5; 66,5; 70,5; 74,5; 78,5.	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha ez a gondolat kiderül a megoldás menetéből.</i>
Ezekkel számolva az átlag: $\frac{2 \cdot 54,5 + 3 \cdot 58,5 + 4 \cdot 62,5 + 11 \cdot 66,5 + 9 \cdot 70,5 + 6 \cdot 74,5 + 5 \cdot 78,5}{40} =$	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem részletezi a számolás menetét, de zsebszámológéppel számolva jó eredményt kap.</i>
= 68,5 (kg).	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{2 \cdot 14^2 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 6^2 + 11 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^2 + 6 \cdot 6^2 + 5 \cdot 10^2}{40}} \approx$	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem részletezi a számolás menetét, de zsebszámológéppel számolva jó eredményt kap.</i>
$\approx 6,39$ (kg).	1 pont	
Összesen:	5 pont	

1. b)		
A 40 hallgató között a „pehelysúlyúak” száma 9, a „nehézsúlyúaké” 5.	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki</i>
A három pehelysúlyút $\binom{9}{3}$, a két nehézsúlyút $\binom{5}{2}$ különböző módon választhatják.	1 pont	
Az összes különböző választási lehetőség $\binom{9}{3} \cdot \binom{5}{2} =$ = 840.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

9. c)		
$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$,	1 pont	
így az 5 és a 7 biztosan be van jelölve.	1 pont	
A 9 is biztosan be van jelölve, mert ha nem lenne, akkor a 3 legfeljebb a második kitevőn szerepelhetne (a 3 és a 6 szorzatában).	1 pont	
Így a maradék két szám szorzata a $2^2 \cdot 3 (= 12)$ többszöröse.	1 pont	
Ha a negyedik bejelölt szám a 3, akkor az ötödik szám a 4 vagy a 8 lehet.	1 pont	<i>Az 1, 2, 3, 4, 6, 8 számok közül kettőt kell kiválasztani úgy, hogy a szorzatuk a 12 többszöröse legyen: 2-6, 3-4, 3-8, 4-6, 6-8.</i>
Ha a negyedik bejelölt szám a 6, akkor az ötödik szám a 2, a 4 vagy a 8 lehet.	1 pont	
Összesen tehát öt ilyen szelvény van.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja a lehetséges kitöltéseket, és megindokolja azok helyességét (de nem indokolja, hogy más kitöltés nem lehetséges), akkor minden jó kitöltési lehetőségért 1 pontot kapjon. Ha a vizsgázó rossz kitöltéseket is megad, akkor azokért darabonként 1-1 pont levonás jár (úgy, hogy a feladatra kapott összpontszám nem lehet negatív).

9. a)		
Egy szelvény nem elég (mert például ha a be nem jelölt négy számot kihúzzák, akkor Andrásnak csak egy találatja lesz).	1 pont	
Ha két szelvényt tölt ki, és az egyiken például az (1; 2; 3; 4; 5), a másikon pedig az (5; 6; 7; 8; 9) számötöst jelöli be, akkor (legalább) az egyik szelvényen legalább három találatja lesz.	2 pont	
Tehát két szelvény már elegendő.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

9. b) első megoldás		
Tekintsük úgy, hogy Zoli már bejelölte az öt számát.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Dóra összesen $\binom{9}{5}$ (= 126)-féleképpen töltheti ki a saját szelvényét.	1 pont	
Akkor lesz pontosan négy közös számuk, ha Dóra öt száma közül négy a Zoli által választott öt szám között, egy pedig a Zoli által nem választott négy szám között van.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A kedvező esetek száma így $\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1}$ (= 20).	1 pont	
A keresett valószínűség így $p = \frac{20}{126} = \frac{10}{63}$ ($\approx 0,159$).	1 pont	
Összesen:	5 pont	

9. b) második megoldás		
A két szelvény kitöltésére $\binom{9}{5} \cdot \binom{9}{5}$ (= 15 876) lehetőség van.	1 pont	
A négy közös szám kiválasztására $\binom{9}{4}$ (= 126) lehetőség van.	1 pont	
A nem közös számot a maradék számok közül Dóra 5-féleképpen, Zoli pedig (mivel ezek egymástól is különböznek) 4-féleképpen választhatta ki.	1 pont	
A kedvező esetek száma így $\binom{9}{4} \cdot 5 \cdot 4$ (= 2520).	1 pont	
A keresett valószínűség $p = \frac{2520}{15\,876} = \frac{10}{63}$ ($\approx 0,159$).	1 pont	
Összesen:	5 pont	

1. c)		
Az öt jegy összege ($3,2 \cdot 5 =$) 16.	1 pont	
(Mivel a mediánál legfeljebb két kisebb jegy lehet, így) két darab 2-es van, ezért az öt jegy 2, 2, 3, 4, 5 (lehetett csak).	1 pont	
Az átlagos abszolút eltérés: $\frac{ 2-3,2 + 2-3,2 + 3-3,2 + 4-3,2 + 5-3,2 }{5} =$	1 pont	
$= 1,04.$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

2. a)		
A négyszög legkisebb szögét α -val jelölve a szögek (fokban mérve) α , 3α , 9α és 27α .	1 pont	
$40\alpha = 360$	1 pont	
$\alpha = 9$	1 pont	
A négyszög szögei 9° , 27° , 81° és 243° (ilyen négyszög valóban létezik).	1 pont	
Összesen:	4 pont	

2. b)		
(Legyen a sokszög n oldalú.) A belső szögek összege egyrészt $(n-2) \cdot 180^\circ$,	1 pont	<i>Ezek a pontok járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
másrészt $\frac{[2 \cdot 143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ] \cdot n}{2}$.	1 pont	
Azaz $\frac{[2 \cdot 143 + (n-1) \cdot 2] \cdot n}{2} = (n-2) \cdot 180$.	1 pont	
$143n + n^2 - n = 180n - 360$	1 pont	
$n^2 - 38n + 360 = 0$	1 pont	
Az egyenlet két megoldása a 18 és a 20.	1 pont	
Ellenőrzés: A 20-szög nem megoldása a feladatnak, mert nem konvex, hiszen a legnagyobb szöge 181° -os.	1 pont	
A 18-szög megoldás, mert konvex, hiszen a legnagyobb szöge 177° -os (és van ilyen sokszög, hiszen $143 + 145 + 147 + \dots + 177 = 2880 = 16 \cdot 180$).	1 pont	
Összesen:	8 pont	

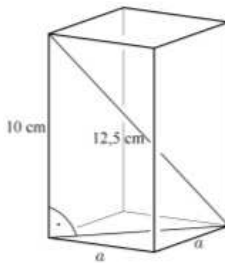
3. a)		
Nullára rendezve $x^2 - 5x - 50 < 0$.	1 pont	
Az $x^2 - 5x - 50 = 0$ egyenlet gyökei: 10 és -5.	1 pont	
Mivel a másodfokú tag együtthatója pozitív,	1 pont	<i>Ez a pont jár egy helyes ábráért is.</i>
ezért az egyenlőtlenség megoldása $-5 < x < 10$.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

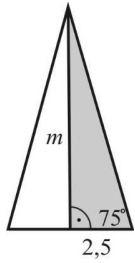
3. b)		
Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > 0$.	1 pont	
(A logaritmus azonosságainak felhasználásával:) $2\log_3 x - \log_3 81x \leq 1$	1 pont	
$2\log_3 x - (\log_3 81 + \log_3 x) \leq 1$	1 pont	
$2\log_3 x - \log_3 x \leq 3$	1 pont	
$2\log_3 x - \frac{\log_3 x}{\log_3 9} \leq 3$	1 pont	
$4\log_3 x - \log_3 x \leq 6$	1 pont	
$\log_3 x \leq 2$ ($= \log_3 9$)	1 pont	
A 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $x \leq 9$.	1 pont	
Az értelmezési tartománnyal összevetve: $0 < x \leq 9$.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

8. b)		
(Az akvárium négyzet alakú lapjainak belső élhossza x dm, a hasáb többi élének hossza pedig y dm.) $x^2 y = 288$ (dm ³),	1 pont	
az akvárium belső felületének területe pedig $2x^2 + 3xy$ (dm ²).	2 pont	<i>A négyzetlapok terület-összege 1 pont, a másik három lap területösszege 1 pont.</i>
Az első egyenletből y -t kifejezve és a második egyenletbe írva, a belső felület területe $2x^2 + \frac{864}{x}$ (dm ²).	1 pont*	
Keressük az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x^2 + \frac{864}{x}$ függvény minimumát.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
f (az értelmezési tartományán deriválható,) derivált-függvénye $f'(x) = 4x - \frac{864}{x^2}$.	1 pont*	
f -nek minimuma ott lehet, ahol a deriváltja 0, azaz $4x - \frac{864}{x^2} = 0$.	1 pont*	
Innen $x = 6$.	1 pont	
A második derivált értéke az $x = 6$ helyen pozitív, ezért f -nek itt (lokális és egyben abszolút) minimuma van.	1 pont	<i>Ez a pont jár akkor is, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltására hivatkozik.</i>
Az akvárium négyzet alakú lapjainak (belső) élhossza 6 dm, a többi él hossza pedig $\left(\frac{288}{6^2}\right) 8$ dm.	1 pont	
Összesen:	10 pont	

A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$2x^2 + \frac{864}{x} = 2x^2 + \frac{432}{x} + \frac{432}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{432}{x} \cdot \frac{432}{x}} = 72$.	2 pont	
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2x^2 = \frac{432}{x}$.	1 pont	

8. a)		
Jó ábra, adatokkal: 	1 pont	<i>Ez a pont jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.</i>
A Pitagorasz-tétel alapján az alaplap átlójának hossza $\sqrt{12,5^2 - 10^2} = 7,5$ (cm).	1 pont	
Az alapél hossza $a = \frac{7,5}{\sqrt{2}} (\approx 5,3)$ (cm).	1 pont	
A két négyzetlap területének összege ($2a^2 =$) $56,25 \text{ cm}^2$.	1 pont	
A palást területe ($4 \cdot a \cdot 10 = 4 \cdot \frac{7,5}{\sqrt{2}} \cdot 10 (= 150\sqrt{2}) \text{ cm}^2$) $(\approx 212,13 \text{ cm}^2)$.	1 pont	
A hasáb felszíne ($56,25 + 212,13 \approx$) 268 cm^2 .	1 pont	
Összesen:	6 pont	

4. a)		
(A szabályos tizenkétszög területét kiszámíthatjuk úgy is, hogy 12 darab egybevágó, egyenlő szárú háromszögre bontjuk.) Egy ilyen háromszög alapja 5 m, az alapon fekvő szögei 75° -osak,		1 pont
az alapjához tartozó magassága pedig $2,5 \cdot \text{tg } 75^\circ (\approx 9,33)$ (m).		1 pont
Egy háromszög területe: $\frac{5 \cdot 2,5 \cdot \text{tg } 75^\circ}{2} (\approx 23,3)$ (m^2), a tizenkétszög területe: $(12 \cdot 2,5^2 \cdot \text{tg } 75^\circ \approx)$ 280 m^2 .		1 pont
Az egyenes hasáb alakú alsó rész térfogata $8 \cdot 12 \cdot 2,5^2 \cdot \text{tg } 75^\circ (\approx 2240)$ (m^3).		1 pont
A gúla alakú felső rész térfogata $\frac{3 \cdot 12 \cdot 2,5^2 \cdot \text{tg } 75^\circ}{3} (\approx 280)$ (m^3).		1 pont
A sátor térfogata körülbelül $(2240 + 280 =)$ 2520 m^3 .		1 pont
Mivel $\frac{2520}{200} = 12,6$,		1 pont
így a téli időszakban 13 fűtőtestre van szükség.		1 pont
Összesen:	8 pont	

4. b)		
Ha legfeljebb 1-szer hibáznak, akkor vagy nem hibáznak, vagy pontosan egyszer hibáznak.	1 pont	<i>Ez a 2 pont jár akkor is, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
Annak a valószínűsége, hogy egy buzogány elkapásakor nem hibáznak, 0,997.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egyszer hibáznak: $0,997^{72} + \binom{72}{1} \cdot 0,997^{71} \cdot 0,003 \approx$	2 pont	
$(\approx 0,805 + 0,175) \approx 0,98$.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
Összesen:	5 pont	

II.

5. a)		
Az egyenlőtlenség megoldása a $[0; 2\pi]$ intervallumon: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.	2 pont	<i>Ha a vizsgázó a $[0; 2\pi]$ intervallumban található hét egész szám behelyettesítésével helyesen oldja meg a feladatot, akkor teljes pontszámot kap.</i>
(Mivel $\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ és $\frac{5\pi}{3} \approx 5,24$, ezért) az egyenlőtlenség egész megoldásai a vizsgált intervallumban a 2, a 3, a 4 és az 5.	1 pont	
Összesen:	3 pont	
5. b) első megoldás		
Az abszolútérték-jeleken belüli kifejezések a 10-nél, illetve a 15-nél váltanak előjelet, így három esetet fogunk vizsgálni.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ha $x < 10$, akkor az egyenlőtlenség: $20 - 2x + 15 - x < 2015$, azaz $-660 < x$.	1 pont	
Ezt összevetve az $x < 10$ feltétellel, 669 darab megfelelő egész számot kapunk (659 darab negatív egész, a 0, és 9 darab pozitív egész).	1 pont	<i>Ezt összevetve az $x < 10$ feltétellel, a valós számok halmazán a $] -660; 10[$ minden eleme megoldás.</i>
Ha $10 \leq x < 15$, akkor $2x - 20 + 15 - x < 2015$, azaz $x < 2020$.	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy a kiinduló feltételt kielégítő mind az 5 darab egész szám (10, 11, 12, 13, 14) megfelel.	1 pont	<i>Ezt összevetve a $10 \leq x < 15$ feltétellel, a valós számok halmazán a $[10; 15[$ minden eleme megoldás.</i>
Ha $15 \leq x$, akkor $2x - 20 + x - 15 < 2015$, azaz $x < \frac{2050}{3} = 683\frac{1}{3}$.	1 pont	
Ebben az esetben 669 darab egész szám elégíti ki a kiinduló feltételt ($683 - 15 + 1 = 669$).	1 pont	<i>Ezt összevetve a $15 \leq x$ feltétellel, a valós számok halmazán a $\left[15; 683\frac{1}{3}\right[$ minden eleme megoldás.</i>
Az egyenlőtlenséget kielégítő egészek száma (a kapott értékek összege, azaz) $2 \cdot 669 + 5 = 1343$.	1 pont	<i>A valós számok halmazán az egyenlőtlenség megoldása a $] -660; 683\frac{1}{3}[$ intervallum. Ennek 1343 egész szám eleme van, tehát az eredeti egyenlőtlenségnek ennyi egész megoldása van.</i>
Összesen:	8 pont	

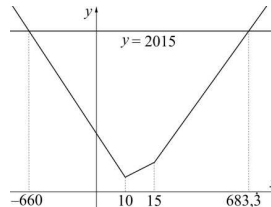
A $P(0; 35)$ ponton átmenő és a parabolát a $Q(q; -0,5q^2 + 8q + 3)$ pontjában érintő egyenes meredeksége $\frac{\left(-\frac{1}{2}q^2 + 8q + 3\right) - 35}{q}$ (ahol $q \neq 0$).	1 pont	
A parabola Q pontjában húzható érintőjének meredeksége az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény deriváltja a q helyen.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Megoldandó tehát a $\frac{\left(-\frac{1}{2}q^2 + 8q + 3\right) - 35}{q} = -q + 8$ egyenlet.	1 pont	
Az egyenletet rendezve: $q^2 = 64$.	2 pont	
$q = 8$ vagy $q = -8$ (így $-q + 8 = 0$ vagy $-q + 8 = 16$).	1 pont	
Két érintő van, ezek egyenlete $y = 35$, illetve $y = 16x + 35$.	2 pont	
Összesen:	9 pont	

7. b) harmadik megoldás		
A $P(0; 35)$ ponton átmenő, $(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete: $Ax + By = 35B$.	1 pont	
Az egyenes és a parabola közös pontjait a $\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3 \\ Ax + By &= 35B \end{aligned} \right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják meg.	1 pont	
Az első egyenletben kifejezett y -t a második egyenletbe helyettesítve és rendezve: $\frac{1}{2}Bx^2 - (A + 8B)x + 32B = 0$.	1 pont	
Ha $B = 0$, akkor (az egyenlet elsőfokú és) a P ponton átmenő egyenes a parabola tengelyével párhuzamos, ez pedig nem érintője a parabolának.	1 pont	
Ha $B \neq 0$, akkor az egyenlet másodfokú. A P ponton átmenő egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, amikor ennek a másodfokú egyenletnek egy valós megoldása van, azaz a diszkriminánsa nulla:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki</i>
$(A + 8B)^2 - 64B^2 = 0$.	1 pont	
Ebből $A = 0$, illetve $A = -16B$ adódik.	1 pont	
Két érintő van, ezek egyenlete ($B = 1$ választással) $y = 35$, illetve $-16x + y = 35$.	2 pont	
Összesen:	9 pont	

7. a)		
$f'(x) = 2ax + b$, így	1 pont	
$\begin{cases} 4a + b = 6 \\ 12a + b = 2 \end{cases}$	2 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $a = -0,5$ és $b = 8$.	1 pont	
$\int_0^2 (-0,5x^2 + 8x + c)dx = \left[-\frac{0,5}{3}x^3 + 4x^2 + cx \right]_0^2 =$	1 pont	
$= \frac{44}{3} + 2c$.	1 pont	
A $\frac{44}{3} + 2c = \frac{50}{3}$ egyenletből: $c = 1$.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

7. b) első megoldás		
A $P(0; 35)$ ponton átmenő egyenesek közül az $x = 0$ egyenletű egyenes nem érinti a parabolát (mert párhuzamos a parabola tengelyével),	1 pont	
ezért az érintőt kereshetjük az $y = mx + 35$ alakban is (m az egyenes meredeksége).	1 pont	
Az egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, amikor $\begin{cases} y = mx + 35 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3 \end{cases}$ egyenletrendszernek egyetlen rendezett valós számpár megoldása van.	1 pont	
Az első egyenletben kifejezett y -t a második egyenletbe helyettesítve és rendezve: $\frac{1}{2}x^2 + (m-8)x + 32 = 0$.	1 pont	
Egy megoldása van az egyenletrendszernek, ha ennek a másodfokú egyenletnek egy valós megoldása van, azaz a diszkriminánsa nulla:	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$(m-8)^2 - 64 = 0$.	1 pont	
Ebből $m = 0$, illetve $m = 16$ adódik.	1 pont	
Két érintő van, ezek egyenlete $y = 35$, illetve $y = 16x + 35$.	2 pont	
Összesen:	9 pont	

7. b) második megoldás		
A $P(0; 35)$ ponton átmenő egyenesek közül az $x = 0$ egyenletű egyenes párhuzamos a parabola tengelyével, tehát nem lehet a parabola érintője.	1 pont	

5. b) második megoldás		
Vizsgáljuk az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 20 + x - 15 $ függvényt!	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$f(x) = \begin{cases} -3x + 35, & \text{ha } x < 10 \\ x - 5, & \text{ha } 10 \leq x < 15 \\ 3x - 35, & \text{ha } x \geq 15 \end{cases}$	3 pont	
Az f grafikonját az $y = 2015$ egyenletű egyenes két pontban metszi: a $(-660; 2015)$, illetve a $(683\frac{1}{3}; 2015)$ pontban.	1 pont	
	1 pont	
(A két metszéspont között az f grafikonjának pontjai az $y = 2015$ egyenletű egyenes alatt helyezkednek el, az összes többi – nem közös – pont pedig az egyenes felett, ezért) a feladatban megadott egyenletnek annyi egész gyöke van, ahány egész szám van a $]-660; 683\frac{1}{3}[$ intervallumban.	1 pont	
Az egész gyökök száma tehát 1343.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

5. c)		
Az $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} - 1$ függvény grafikonja:		
	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen oldja meg a feladatot.</i>
(Kiszámítjuk az értelmezési tartomány nemnegatív egész értékeihez tartozó függvényértékeket a szigorúan monoton csökkenő függvény zérushelyéig:) $f(0) = 15, f(1) = 7, f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 0$.	2 pont	<i>Egy hiba esetén 1 pont, egynél több hiba esetén 0 pont jár.</i>
Az $x = 0$ egyenesről 16 rácspontot tartalmaz a síkidom, az $x = 1$ egyenesről 8 rácspontot, és így tovább.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Összesen $(16 + 8 + 4 + 2 + 1 =)$ 31 rácspont van a kérdéses tartományban.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

6. a)		
(1) igaz (2) hamis (3) hamis (4) hamis (5) igaz	3 pont	<i>4 jó válasz 2 pont, 3 jó válasz 1 pont, 3-nál kevesebb jó válasz 0 pont.</i>
Összesen:	3 pont	
6. b)		
(Mind az öt kérdésre egymástól függetlenül két lehetőség van a válaszra, így) a tesztet $2^5 = 32$ különböző módon lehet kitölteni.	2 pont	
Mivel a teljes osztálylétszám 34 fő, ezért (a skatulyaelv alapján) biztosan lesz két olyan tanuló, akik ugyanúgy töltötték ki a tesztlapot.	2 pont	
Összesen:	4 pont	
6. c)		
Ha egy tanuló minden kérdésre jól válaszol, akkor $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ pontot kap.	1 pont	
Ha az n -edik feladatra helyes válasz helyett hibás választ ad, akkor az összpontszáma $2n$ -nel, azaz páros számmal csökken.	2 pont	
Így a lehetséges pontszámok páratlan számok.	1 pont	
Összesen:	4 pont	
<i>Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges esetet megvizsgálva helyes választ ad, akkor maximális pontszámot kap.</i>		
6. d)		
A 39 háromféleképpen állhat elő megfelelő páratlan számok összegeként, ha ezek sorrendjét nem vesszük figyelembe.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$13 + 13 + 13$, ez egyféle sorrendben valósulhat meg.	1 pont	
$15 + 13 + 11$, ez hatféle sorrendben valósulhat meg.	1 pont	
$15 + 15 + 9$, ez háromféle sorrendben valósulhat meg.	1 pont	
A megadott feltételek mellett összesen 10-féleképpen jöhetett létre a 39-es pontösszeg.	1 pont	
Összesen:	5 pont	