ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. május 8.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott vagy áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az *e* szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **ésszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
Az osztályközepek (kilogrammban) rendre: 54,5; 58,5; 62,5; 66,5; 70,5; 74,5; 78,5.	1 pont	*Ez a pont jár, ha ez a gondolat kiderül a megoldás menetéből.*
Ezekkel számolva az átlag: $\frac{2\cdot 54{,}5+3\cdot 58{,}5+4\cdot 62{,}5+11\cdot 66{,}5+9\cdot 70{,}5+6\cdot 74{,}5+5\cdot 78{,}5}{40}=$	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem részletezi a számolás menetét, de zsebszámológéppel számolva jó eredményt kap.*
$= 68{,}5$ (kg).	1 pont	
A szórás: $\sqrt{\frac{2\cdot 14^2+3\cdot 10^2+4\cdot 6^2+11\cdot 2^2+9\cdot 2^2+6\cdot 6^2+5\cdot 10^2}{40}}\approx$	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem részletezi a számolás menetét, de zsebszámológéppel számolva jó eredményt kap.*
$\approx 6{,}39$ (kg).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

1. b)		
A 40 hallgató között a „pehelysúlyúak” száma 9, a „nehézsúlyúaké” 5.	1 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki*
A három pehelysúlyút $\binom{9}{3}$, a két nehézsúlyút $\binom{5}{2}$ különböző módon választhatják.	1 pont	
Az összes különböző választási lehetőség $\binom{9}{3}\cdot\binom{5}{2}=$ $= 840$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

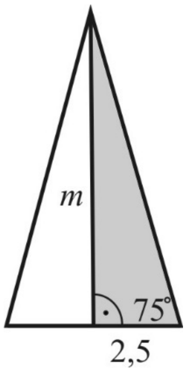
1. c)		
Az öt jegy összege $(3{,}2\cdot 5 =)$ 16.	1 pont	
(Mivel a mediánnál legfeljebb két kisebb jegy lehet, így) két darab 2-es van, ezért	1 pont	
az öt jegy 2, 2, 3, 4, 5 (lehetett csak).	1 pont	
Az átlagos abszolút eltérés: $\frac{\lvert 2-3{,}2\rvert+\lvert 2-3{,}2\rvert+\lvert 3-3{,}2\rvert+\lvert 4-3{,}2\rvert+\lvert 5-3{,}2\rvert}{5}=$	1 pont	
$= 1{,}04$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

2. a)		
A négyszög legkisebb szögét α-val jelölve a szögek (fokban mérve) α, 3α, 9α és 27α.	1 pont	
$40\alpha = 360$	1 pont	
$\alpha = 9$	1 pont	
A négyszög szögei 9°, 27°, 81° és 243° (ilyen négyszög valóban létezik).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b)		
(Legyen a sokszög n oldalú.) A belső szögek összege egyrészt $(n-2)\cdot 180°$,	1 pont	*Ezek a pontok járnak, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
másrészt $\frac{[2\cdot 143° + (n-1)\cdot 2°]\cdot n}{2}$.	1 pont	
Azaz $\frac{[2\cdot 143+(n-1)\cdot 2]\cdot n}{2}=(n-2)\cdot 180$.	1 pont	
$143n+n^2-n=180n-360$	1 pont	
$n^2-38n+360=0$	1 pont	
Az egyenlet két megoldása a 18 és a 20.	1 pont	
Ellenőrzés: A 20-szög nem megoldása a feladatnak, mert nem konvex, hiszen a legnagyobb szöge 181°-os.	1 pont	
A 18-szög megoldás, mert konvex, hiszen a legnagyobb szöge 177°-os (és van ilyen sokszög, hiszen $143 + 145 + 147 + \ldots + 177 = 2880 = 16\cdot 180$).	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

3. a)		
Nullára rendezve $x^2-5x-50<0$.	1 pont	
Az $x^2-5x-50=0$ egyenlet gyökei: 10 és −5.	1 pont	
Mivel a másodfokú tag együtthatója pozitív,	1 pont	*Ez a pont jár egy helyes ábráért is.*
ezért az egyenlőtlenség megoldása $-5<x<10$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. b)		
Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x>0$.	1 pont	
(A logaritmus azonosságainak felhasználásával:) $2\log_3 x-\log_9 81x\le 1$	1 pont	
$2\log_3 x-(\log_9 81+\log_9 x)\le 1$	1 pont	
$2\log_3 x-\log_9 x\le 3$	1 pont	
$2\log_3 x-\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}\le 3$	1 pont	
$4\log_3 x-\log_3 x\le 6$	1 pont	
$\log_3 x\le 2\ (=\log_3 9)$	1 pont	
A 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $x\le 9$.	1 pont	
Az értelmezési tartománnyal összevetve: $0<x\le 9$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

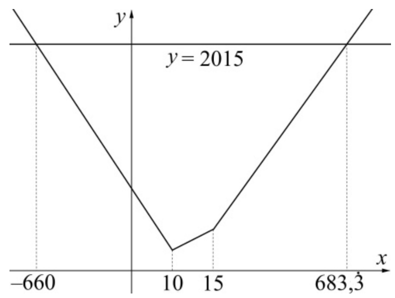
4. a)		
(A szabályos tizenkétszög területét kiszámíthatjuk úgy is, hogy 12 darab egybevágó, egyenlő szárú háromszögre bontjuk.) Egy ilyen háromszög alapja 5 m, az alapon fekvő szögei 75°-osak, 	1 pont	*Ez a 3 pont jár, ha a vizsgázó a tizenkétszög területét a függvénytáblázatban megtalálható képlet alapján helyesen számítja ki.*
az alapjához tartozó magassága pedig $2{,}5\cdot \mathrm{tg}75°$ (≈ 9,33) (m).	1 pont	
Egy háromszög területe: $\frac{5\cdot 2{,}5\cdot \mathrm{tg}75°}{2}$ (≈ 23,3) (m^2), a tizenkétszög területe: $(12\cdot 2{,}5^2\cdot \mathrm{tg}75° \approx)$ 280 m^2.	1 pont	
Az egyenes hasáb alakú alsó rész térfogata $8\cdot 12\cdot 2{,}5^2\cdot \mathrm{tg}75°$ (≈ 2240) (m^3).	1 pont	
A gúla alakú felső rész térfogata $\frac{3\cdot 12\cdot 2{,}5^2\cdot \mathrm{tg}75°}{3}$ (≈ 280) (m^3).	1 pont	
A sátor térfogata körülbelül (2240 + 280 =) 2520 m^3.	1 pont	*Más, ésszerűen és helyesen kerekített érték is elfogadható.*
Mivel $\frac{2520}{200}=12{,}6$,	1 pont	
így a téli időszakban 13 fűtőtestre van szükség.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

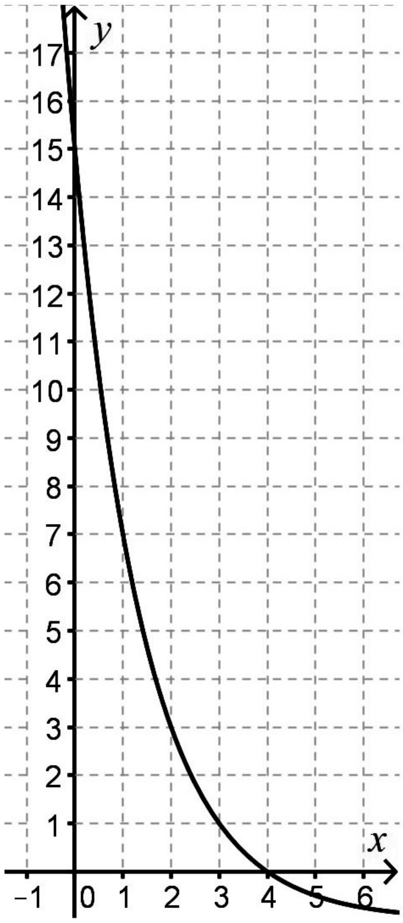
4. b)		
Ha legfeljebb 1-szer hibáznak, akkor vagy nem hibáznak, vagy pontosan egyszer hibáznak.	1 pont	*Ez a 2 pont jár akkor is, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.*
Annak a valószínűsége, hogy egy buzogány elkapásakor nem hibáznak, 0,997.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egyszer hibáznak: $0{,}997^{72}+\binom{72}{1}\cdot 0{,}997^{71}\cdot 0{,}003\approx$	2 pont	
(≈ 0,805 + 0,175) ≈ 0,98.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**5 pont**	

II.

5. a)		
Az egyenlőtlenség megoldása a [0; 2π] intervallumon: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.	2 pont	*Ha a vizsgázó a* [0; 2π] *intervallumban található hét egész szám behelyettesítésével helyesen oldja meg a feladatot, akkor teljes pontszámot kap.*
(Mivel $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ és $\frac{5\pi}{3} \approx 5{,}24$, ezért) az egyenlőtlenség egész megoldásai a vizsgált intervallumban a 2, a 3, a 4 és az 5.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

5. b) első megoldás		
Az abszolútérték-jeleken belüli kifejezések a 10-nél, illetve a 15-nél váltanak előjelet, így három esetet fogunk vizsgálni.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ha $x < 10$, akkor az egyenlőtlenség: $20 - 2x + 15 - x < 2015$, azaz $-660 < x$.	1 pont	
Ezt összevetve az $x < 10$ feltétellel, 669 darab megfelelő egész számot kapunk (659 darab negatív egész, a 0, és 9 darab pozitív egész).	1 pont	*Ezt összevetve az* $x < 10$ *feltétellel, a valós számok halmazán a*]−660; 10[*minden eleme megoldás.*
Ha $10 \le x < 15$, akkor $2x - 20 + 15 - x < 2015$, azaz $x < 2020$.	1 pont	
Ez azt jelenti, hogy a kiinduló feltételt kielégítő mind az 5 darab egész szám (10, 11, 12, 13, 14) megfelel.	1 pont	*Ezt összevetve a* $10 \le x < 15$ *feltétellel, a valós számok halmazán a* [10; 15[*minden eleme megoldás.*
Ha $15 \le x$, akkor $2x - 20 + x - 15 < 2015$, azaz $x < \frac{2050}{3} = 683\frac{1}{3}$.	1 pont	
Ebben az esetben 669 darab egész szám elégíti ki a kiinduló feltételt (683 – 15 + 1 = 669).	1 pont	*Ezt összevetve a* $15 \le x$ *feltétellel, a valós számok halmazán a* $\left[15;\ 683\frac{1}{3}\right[$ *minden eleme megoldás.*
Az egyenlőtlenséget kielégítő egészek száma (a kapott értékek összege, azaz) $2 \cdot 669 + 5 = 1343$.	1 pont	*A valós számok halmazán az egyenlőtlenség megoldása a* $\left]-660;\ 683\frac{1}{3}\right[$ *intervallum. Ennek 1343 egész szám eleme van, tehát az eredeti egyenlőtlenségnek ennyi egész megoldása van.*
Összesen:	**8 pont**	

5. b) második megoldás		
Vizsgáljuk az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\lvert 2x-20\rvert+\lvert x-15\rvert$ függvényt!	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f(x)=\begin{cases}-3x+35, \text{ ha } x<10\\ x-5, \text{ ha } 10\le x<15\\ 3x-35, \text{ ha } x\ge 15\end{cases}$	3 pont	
Az *f* grafikonját az $y=2015$ egyenletű egyenes két pontban metszi: a (−660; 2015), illetve a $\left(683\frac{1}{3};\ 2015\right)$ pontban.	1 pont	
	1 pont	
(A két metszéspont között az *f* grafikonjának pontjai az $y=2015$ egyenletű egyenes alatt helyezkednek el, az összes többi – nem közös – pont pedig az egyenes felett, ezért) a feladatban megadott egyenletnek annyi egész gyöke van, ahány egész szám van a $\left]-660;\ 683\frac{1}{3}\right[$ intervallumban.	1 pont	
Az egész gyökök száma tehát 1343.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

5. c)		
Az $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} - 1$ függvény grafikonja:  	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen oldja meg a feladatot.*
(Kiszámítjuk az értelmezési tartomány nemnegatív egész értékeihez tartozó függvényértékeket a szigorúan monoton csökkenő függvény zérushelyéig:) $f(0) = 15, f(1) = 7, f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 0.$	2 pont	*Egy hiba esetén 1 pont, egynél több hiba esetén 0 pont jár.*
Az $x = 0$ egyenesről 16 rácspontot tartalmaz a síkidom, az $x = 1$ egyenesről 8 rácspontot, és így tovább.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Összesen (16 + 8 + 4 + 2 + 1 =) 31 rácspont van a kérdéses tartományban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

6. a)		
(1) igaz (2) hamis (3) hamis (4) hamis (5) igaz	3 pont	*4 jó válasz 2 pont, 3 jó válasz 1 pont, 3-nál kevesebb jó válasz 0 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

6. b)		
(Mind az öt kérdésre egymástól függetlenül két lehetőség van a válaszra, így) a tesztet $2^5 = 32$ különböző módon lehet kitölteni.	2 pont	
Mivel a teljes osztálylétszám 34 fő, ezért (a skatulyaelv alapján) biztosan lesz két olyan tanuló, akik ugyanúgy töltötték ki a tesztlapot.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c)		
Ha egy tanuló minden kérdésre jól válaszol, akkor $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ pontot kap.	1 pont	
Ha az n-edik feladatra helyes válasz helyett hibás választ ad, akkor az összpontszáma $2n$-nel, azaz páros számmal csökken.	2 pont	
Így a lehetséges pontszámok páratlan számok.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges esetet megvizsgálva helyes választ ad, akkor maximális pontszámot kap.

6. d)		
A 39 háromféleképpen állhat elő megfelelő páratlan számok összegeként, ha ezek sorrendjét nem vesszük figyelembe.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$13 + 13 + 13$, ez egyféle sorrendben valósulhat meg.	1 pont	
$15 + 13 + 11$, ez hatféle sorrendben valósulhat meg.	1 pont	
$15 + 15 + 9$, ez háromféle sorrendben valósulhat meg.	1 pont	
A megadott feltételek mellett összesen 10-féleképpen jöhetett létre a 39-es pontösszeg.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

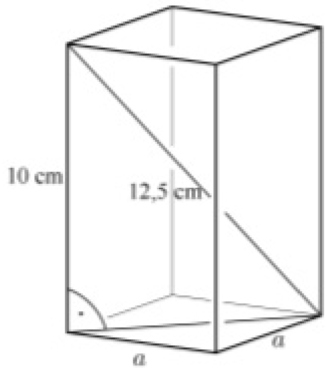
7. a)		
$f'(x) = 2ax + b$, így	1 pont	
$\left.\begin{array}{r} 4a + b = 6 \\ 12a + b = 2 \end{array}\right\}$	2 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $a = -0,5$ és $b = 8$.	1 pont	
$\int_0^2 (-0,5x^2 + 8x + c)dx = \left[-\frac{0,5}{3}x^3 + 4x^2 + cx\right]_0^2 =$	1 pont	
$= \frac{44}{3} + 2c$.	1 pont	
A $\frac{44}{3} + 2c = \frac{50}{3}$ egyenletből: $c = 1$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. b) első megoldás		
A $P(0; 35)$ ponton átmenő egyenesek közül az $x = 0$ egyenletű egyenes nem érinti a parabolát (mert párhuzamos a parabola tengelyével),	1 pont	
ezért az érintőt kereshetjük az $y = mx + 35$ alakban is (m az egyenes meredeksége).	1 pont	
Az egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, amikor az $\left.\begin{array}{l} y = mx + 35 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek egyetlen rendezett valós számpár megoldása van.	1 pont	
Az első egyenletben kifejezett y-t a második egyenletbe helyettesítve és rendezve: $\frac{1}{2}x^2 + (m-8)x + 32 = 0$.	1 pont	
Egy megoldása van az egyenletrendszernek, ha ennek a másodfokú egyenletnek egy valós megoldása van, azaz a diszkriminánsa nulla:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$(m-8)^2 - 64 = 0$.	1 pont	
Ebből $m = 0$, illetve $m = 16$ adódik.	1 pont	
Két érintő van, ezek egyenlete $y = 35$, illetve $y = 16x + 35$.	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. b) második megoldás		
A $P(0; 35)$ ponton átmenő egyenesek közül az $x = 0$ egyenletű egyenes párhuzamos a parabola tengelyével, tehát nem lehet a parabola érintője.	1 pont	

A $P(0; 35)$ ponton átmenő és a parabolát a $Q(q; -0{,}5q^2 + 8q + 3)$ pontjában érintő egyenes meredeksége $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}q^2 + 8q + 3\right) - 35}{q}$ (ahol $q \neq 0$).	1 pont	
A parabola Q pontjában húzható érintőjének meredeksége az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény deriváltja a q helyen.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Megoldandó tehát a $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}q^2 + 8q + 3\right) - 35}{q} = -q + 8$ egyenlet.	1 pont	
Az egyenletet rendezve: $q^2 = 64$.	2 pont	
$q = 8$ vagy $q = -8$ (így $-q + 8 = 0$ vagy $-q + 8 = 16$).	1 pont	
Két érintő van, ezek egyenlete $y = 35$, illetve $y = 16x + 35$.	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

7. b) harmadik megoldás		
A $P(0; 35)$ ponton átmenő, $(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete: $Ax + By = 35B$.	1 pont	
Az egyenes és a parabola közös pontjait a $\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3 \\ Ax + By = 35B \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják meg.	1 pont	
Az első egyenletben kifejezett y-t a második egyenletbe helyettesítve és rendezve: $\frac{1}{2}Bx^2 - (A + 8B)x + 32B = 0$.	1 pont	
Ha $B = 0$, akkor (az egyenlet elsőfokú és) a P ponton átmenő egyenes a parabola tengelyével párhuzamos, ez pedig nem érintője a parabolának.	1 pont	
Ha $B \neq 0$, akkor az egyenlet másodfokú. A P ponton átmenő egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, amikor ennek a másodfokú egyenletnek egy valós megoldása van, azaz a diszkriminánsa nulla:	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki*
$(A + 8B)^2 - 64B^2 = 0$.	1 pont	
Ebből $A = 0$, illetve $A = -16B$ adódik.	1 pont	
Két érintő van, ezek egyenlete ($B = 1$ választással) $y = 35$, illetve $-16x + y = 35$.	2 pont	
Összesen:	**9 pont**	

8. a)		
Jó ábra, adatokkal: 	1 pont	*Ez a pont jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.*
A Pitagorasz-tétel alapján az alaplap átlójának hossza $\sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = 7{,}5$ (cm).	1 pont	
Az alapél hossza $a = \frac{7{,}5}{\sqrt{2}}$ ($\approx 5{,}3$) (cm).	1 pont	
A két négyzetlap területének összege ($2a^2 =$) 56,25 cm^2.	1 pont	
A palást területe ($4 \cdot a \cdot 10 =$) $4 \cdot \frac{7{,}5}{\sqrt{2}} \cdot 10$ $(= 150\sqrt{2})$ cm^2 ($\approx 212{,}13$ cm^2).	1 pont	
A hasáb felszíne ($56{,}25 + 212{,}13 \approx$) 268 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. b)		
(Az akvárium négyzet alakú lapjainak belső élhossza x dm, a hasáb többi élének hossza pedig y dm.) $x^2y = 288$ (dm^3),	1 pont	
az akvárium belső felületének területe pedig $2x^2 + 3xy$ (dm^2).	2 pont	*A négyzetlapok terület-összege 1 pont, a másik három lap területösszege 1 pont.*
Az első egyenletből y-t kifejezve és a második egyenletbe írva, a belső felület területe $2x^2 + \frac{864}{x}$ (dm^2).	1 pont*	
Keressük az $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + \frac{864}{x}$ függvény minimumát.	1 pont*	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
f (az értelmezési tartományán deriválható,) derivált-függvénye $f'(x) = 4x - \frac{864}{x^2}$.	1 pont*	
f-nek minimuma ott lehet, ahol a deriváltja 0, azaz $4x - \frac{864}{x^2} = 0$.	1 pont*	
Innen $x = 6$.	1 pont	
A második derivált értéke az $x = 6$ helyen pozitív, ezért f-nek itt (lokális és egyben abszolút) minimuma van.	1 pont	*Ez a pont jár akkor is, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltására hivatkozik.*
Az akvárium négyzet alakú lapjainak (belső) élhossza 6 dm, a többi él hossza pedig $\left(\frac{288}{6^2} =\right) 8$ dm.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	

*A *-gal jelölt 4 pontot a következő gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$2x^2 + \frac{864}{x} = 2x^2 + \frac{432}{x} + \frac{432}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{432}{x} \cdot \frac{432}{x}} =$ $= 72$.	2 pont	
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2x^2 = \frac{432}{x}$.	1 pont	

9. a)		
Egy szelvény nem elég (mert például ha a be nem jelölt négy számot kihúzzák, akkor Andrásnak csak egy találata lesz).	1 pont	
Ha két szelvényt tölt ki, és az egyiken például az (1; 2; 3; 4; 5), a másikon pedig az (5; 6; 7; 8; 9) számötöst jelöli be, akkor (legalább) az egyik szelvényen legalább három találata lesz.	2 pont	
Tehát két szelvény már elegendő.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. b) első megoldás		
Tekintsük úgy, hogy Zoli már bejelölte az öt számát.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Dóra összesen $\binom{9}{5}$ (= 126)-féleképpen töltheti ki a saját szelvényét.	1 pont	
Akkor lesz pontosan négy közös számuk, ha Dóra öt száma közül négy a Zoli által választott öt szám között, egy pedig a Zoli által nem választott négy szám között van.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kedvező esetek száma így $\binom{5}{4}\cdot\binom{4}{1}$(= 20).	1 pont	
A keresett valószínűség így $p = \frac{20}{126} = \frac{10}{63}$ (≈ 0,159).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. b) második megoldás		
A két szelvény kitöltésére $\binom{9}{5}\cdot\binom{9}{5}$(= 15 876) lehetőség van.	1 pont	
A négy közös szám kiválasztására $\binom{9}{4}$(= 126) lehetőség van.	1 pont	
A nem közös számot a maradék számok közül Dóra 5-féleképpen, Zoli pedig (mivel ezek egymástól is különböznek) 4-féleképpen választhatta ki.	1 pont	
A kedvező esetek száma így $\binom{9}{4}\cdot 5\cdot 4$ (= 2520).	1 pont	
A keresett valószínűség $p = \frac{2520}{15\,876} = \frac{10}{63}$ (≈ 0,159).	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

9. c)		
$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$,	1 pont	
így az 5 és a 7 biztosan be van jelölve.	1 pont	
A 9 is biztosan be van jelölve, mert ha nem lenne, akkor a 3 legfeljebb a második kitevőn szerepelhetne (a 3 és a 6 szorzatában).	1 pont	
Így a maradék két szám szorzata a $2^2 \cdot 3$ (= 12) többszöröse.	1 pont	
Ha a negyedik bejelölt szám a 3, akkor az ötödik szám a 4 vagy a 8 lehet.	1 pont	*Az 1, 2, 3, 4, 6, 8 számok közül kettőt kell kiválasztani úgy, hogy a szorzatuk a 12 többszöröse legyen: 2-6, 3-4, 3-8, 4-6, 6-8.*
Ha a negyedik bejelölt szám a 6, akkor az ötödik szám a 2, a 4 vagy a 8 lehet.	1 pont	
Összesen tehát öt ilyen szelvény van.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó felsorolja a lehetséges kitöltéseket, és megindokolja azok helyességét (de nem indokolja, hogy más kitöltés nem lehetséges), akkor minden jó kitöltési lehetőségért 1 pontot kapjon. Ha a vizsgázó rossz kitöltéseket is megad, akkor azokért darabonként 1-1 pont levonás jár (úgy, hogy a feladatra kapott összpontszám nem lehet negatív).