ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. május 8.

# MATEMATIKA

# EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

# JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

# Fontos tudnivalók

**Formai előírások:**

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

**Tartalmi kérések:**

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a $\pi$ és az $e$ szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

# I.

| 1. a) | | |
|---|---|---|
| (Elegendő megmutatni, hogy a háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.) A legnagyobb szög a legnagyobb (11 cm hosszú) oldallal szemben van. | 2 pont | *Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a háromszög mindhárom szögét helyesen kiszámolja.* (*A két kisebb szög* 54,7°, *illetve* 39,4°.) |
| Jelölje ezt a szöget α. A koszinusztétellel: $\cos\alpha = \frac{7^2+9^2-11^2}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{1}{14}$ (≈ 0,0714). | 2 pont | |
| α ≈ 85,9°, tehát a háromszög valóban hegyesszögű. | 1 pont | *Mivel* 0 < cos α (< 1), *ezért* α *hegyesszög.* |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó tanult tételként hivatkozik arra, hogy $a \le b \le c$ esetén a háromszög pontosan akkor hegyesszögű, ha $a^2+b^2>c^2$, akkor ezért 3 pontot kapjon. További 2 pont jár azért, ha a tételt a konkrét esetre alkalmazva belátja, hogy $7^2+9^2>11^2$ igaz, tehát a háromszög valóban hegyesszögű.*

| 1. b) | | |
|---|---|---|
| Jelölje a háromszög oldalainak hosszát $a-d$, $a$ és $a+d$ ($0<d<a$). | 1 pont | $b$, $b+d$, $b+2d$ ($b, d>0$) |
| A Pitagorasz-tétel alapján $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$. | 1 pont | $b^2+(b+d)^2=(b+2d)^2$ |
| A négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $a^2=4ad$. | 1 pont | $b^2-2db-3d^2=0$ |
| ($a\ne 0$-val osztva) $a=4d$. | 1 pont | *A b-ben másodfokú egyenletet megoldva* $b=3d$ ($b=-d$ *nem megoldás*). |
| A háromszög oldalai tehát $3d$, $4d$ és $5d$, az oldalak aránya ezért valóban $3:4:5$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| 1. c) | | |
|---|---|---|
| A háromszög területe: $\frac{3d\cdot 4d}{2}=121{,}5$. | 1 pont | |
| Innen $12d^2=243$, azaz ($d>0$ miatt) $d=4{,}5$. | 1 pont | |
| A háromszög oldalainak hossza tehát 13,5 cm, 18 cm és 22,5 cm. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **2. a)** | | |
|---|---|---|
| $20x + 30y = 36x + 18y$ | 1 pont | *A bal oldalon álló tört számlálóját és nevezőjét is y-nal elosztva:* $\frac{2\cdot\frac{x}{y}+3}{4\cdot\frac{x}{y}+2}=\frac{9}{10}$. |
| $12y = 16x$ | 1 pont | $20\cdot\frac{x}{y}+30=36\cdot\frac{x}{y}+18$ |
| Ebből $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó csak a* $2x + 3y = 9$ és $4x + 2y = 10$ *esettel foglalkozik, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.*

| **2. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| $f(x+1)=(x+1)^2-11(x+1)+30=x^2-9x+20$ | 2 pont | |
| Szorzattá alakítunk: $x^2-9x+20=(x-4)(x-5)$, | 1 pont | |
| és $x^2-11x+30=(x-5)(x-6)$. | 1 pont | |
| (Ha $f(x)\neq 0$, azaz $x\notin\{5;\,6\}$, akkor) $\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x-4)(x-5)}{(x-5)(x-6)}=\frac{x-4}{x-6}$ valóban. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **2. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| $f(x+1)=(x+1)^2-11(x+1)+30=x^2-9x+20$ | 2 pont | |
| (Ha $f(x)\neq 0$, akkor $x\notin\{5;\,6\}$, tehát a bal és a jobb oldalon álló tört is értelmezve van.)<br>A nevezőkkel szorozva:<br>$(x-6)\cdot f(x+1)=(x-4)\cdot f(x)$.<br>$(x-6)(x^2-9x+20)=(x-4)(x^2-11x+30)$ | 1 pont | |
| $x^3-15x^2+74x-120=x^3-15x^2+74x-120$ | 1 pont | |
| Ekvivalens átalakításokat végeztünk (az $\mathbf{R}\setminus\{5;6\}$ halmazon), ezért az eredeti állítás igaz. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

<table>
<tr><td colspan="3">2. c) első megoldás</td></tr>
<tr><td>(Ekvivalens átalakításokkal oldjuk meg az egyenlőtlenséget.)<br>$\frac{x-4}{x-6}+1\le 0$<br>$\frac{2x-10}{x-6}\le 0$</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$x = 5$, vagy a számláló és a nevező előjele különböző.</td><td>1 pont*</td><td rowspan="3">Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó egy számegyenesen helyesen ábrázolja a számláló és a nevező előjelét, és onnan olvassa le jól a megoldást.</td></tr>
<tr><td>$2x - 10 < 0$ ($x < 5$) és $x - 6 > 0$ ($x > 6$) egyszerre nem lehetséges.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>$2x - 10 > 0$ és $x - 6 < 0$<br>egyszerre teljesül, ha $5 < x < 6$.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Tehát $5 \le x < 6$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontot akkor is megkaphatja a vizsgázó, ha (a szigorú egyenlőtlenségek helyett) a* $2x - 10 \le 0$ *és a* $2x - 10 \ge 0$ *esetek vizsgálatával oldja meg a feladatot.*

<table>
<tr><td colspan="3">2. c) második megoldás</td></tr>
<tr><td>(Ekvivalens átalakításokkal oldjuk meg az egyenlőtlenséget.)<br>Ha $x > 6$, akkor $x - 4 \le 6 - x$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Ebből $x \le 5$, tehát a $]6; +\infty[$ halmazon nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Ha $x < 6$, akkor $x - 4 \ge 6 - x$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Ebből $x \ge 5$, tehát a $]-\infty; 6[$ halmazon az $[5; 6[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek.<br>(Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát: $[5; 6[$.)</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

| **3. a)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha Ágoston mindhárom osztályzata azonos, akkor 5 megfelelő számhármas van. | 1 pont | |
| Két egyforma és egy különböző osztályzatot $5\cdot4$-féleképpen szerezhetett (a két egyforma osztályzat 5-féleképpen, a harmadik osztályzat 4-féleképpen választható). | 1 pont* | |
| Három különböző osztályzatot $\binom{5}{3}=10$-féleképpen szerezhetett. (A nem egyforma osztályzatok sorrendje mindkét esetben már egyértelmű.) | 2 pont | |
| A megfelelő esetek száma $(5+5\cdot4+10=)\,35$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont a következő gondolatért is jár.*

*A két különböző osztályzat* $\binom{5}{2}$ *-féleképpen választható, a kiválasztás után pedig kétféleképpen választható meg az, hogy melyik osztályzatból legyen két egyforma.*

*Ez* $2\cdot\binom{5}{2}=20$ *lehetőség.*

| **3. a)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha Ágoston első osztályzata 1, akkor a második osztályzat lehet 1, 2, 3, 4 vagy 5. Ekkor rendre 5, 4, 3, 2, illetve 1 lehetőség van a harmadik osztályzatára. Ez összesen (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15 lehetőség. | 1 pont | |
| Ha Ágoston első osztályzata 2, akkor a második osztályzat lehet 2, 3, 4 vagy 5. Ekkor rendre 4, 3, 2, illetve 1 lehetőség van a harmadik osztályzatára. Ez összesen (4 + 3 + 2 + 1 =) 10 lehetőség. | 1 pont | |
| Ha Ágoston első osztályzata 3, akkor a második osztályzat lehet 3, 4 vagy 5. Ekkor rendre 3, 2, illetve 1 lehetőség van a harmadik osztályzatára. Ez összesen (3 + 2 + 1 =) 6 lehetőség. | 1 pont | |
| Ha Ágoston első osztályzata 4 vagy 5, akkor osztályzatai lehetnek: 4-4-4, 4-4-5, 4-5-5 vagy 5-5-5. Ez összesen 4 lehetőség. | 1 pont | |
| A megfelelő számhármasok száma tehát (15 + 10 + 6 + 4 =) 35. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **3. a) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha Ágoston második osztályzata 1, akkor az első osztályzata 1-féle, a harmadik osztályzata 5-féle lehet, ez $1\cdot5$ lehetőség. | 1 pont | |
| Hasonlóan, ha a második osztályzata 2, 3, 4 vagy 5, akkor az első osztályzata rendre 2, 3, 4, 5-féle; a harmadik osztályzata pedig 4, 3, 2, 1-féle lehet. A lehetőségek száma így $2\cdot4$, $3\cdot3$, $4\cdot2$, illetve $5\cdot1$. | 3 pont | |
| A megfelelő számhármasok száma $(2\cdot(1\cdot5+2\cdot4)+3\cdot3=)\ 35$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

| **3. a) negyedik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha adott Ágoston három osztályzata, akkor ezek sorrendje már egyértelmű. Tehát a megfelelő számhármasok számát megkapjuk, ha az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül kiválasztunk hármat úgy, hogy a kiválasztás sorrendje közömbös, és egy-egy számot többször is választhatunk. | 3 pont | |
| A megfelelő számhármasok száma egyenlő 5 elem 3-adosztályú ismétléses kombinációinak a számával: $C_5^{3(i)}=\binom{5+3-1}{3}=35$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges számhármast rendezetten felsorolja, és ez alapján helyes választ ad, akkor teljes pontszámot kapjon.*

| **3. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha az osztálylétszám $n$ fő, az egy tanulóra jutó szállásköltség pedig ($n$ résztvevő esetén) $x$ Ft, akkor $\left.\begin{array}{l} n\cdot x=(n-1)\cdot(x+120) \\ n\cdot x=(n-2)\cdot(x+250)\end{array}\right\}$. | 2 pont | |
| Az első egyenletből $x$-et kifejezve: $x = 120n - 120$. | 1 pont | $\left.\begin{array}{l} 0=-x+120n-120 \\ 0=-2x+250n-500\end{array}\right\}$ |
| Ezt a második egyenletbe behelyettesítve és nullára rendezve: $0 = -2(120n - 120) + 250n - 500$. | 1 pont | *Az első egyenlet* (–2)*-szeresét a másodikhoz adva:* $0=10n-260$. |
| $n = 26$ (tehát az osztálylétszám 26 fő), és $x = 3000$. | 1 pont | |
| A fizetendő teljes szállásdíj: $n\cdot x=26\cdot3000=78\,000$ Ft. | 1 pont | |
| Ellenőrzés: $26\cdot3000=25\cdot3120=24\cdot3250\ (=78\,000)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **3. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha az osztálylétszám *n* fő, akkor (a szöveg szerint) az egy tanulóra jutó szállásdíj $(n-1)\cdot 120$ Ft, | 1 pont | |
| a két tanulóra jutó szállásdíj pedig $(n-2)\cdot 250$ Ft. | 1 pont | |
| Tehát $(n-2)\cdot 250 = 2\cdot(n-1)\cdot 120$, | 1 pont | |
| $n = 26$ (az osztálylétszám 26 fő). | 1 pont | |
| Az egy tanulóra jutó szállásdíj $(25\cdot 120 =)$ 3000 Ft, a teljes szállásdíj pedig $(26\cdot 3000 =)$ 78 000 Ft. | 2 pont | |
| Ellenőrzés: $26\cdot 3000 = 25\cdot 3120 = 24\cdot 3250\ (= 78\,000)$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

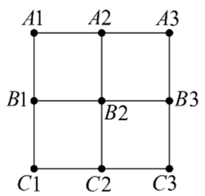
| **4. a)** | | |
|---|---|---|
| Az adatok száma páratlan, ezért a medián (a 72) szerepel az adatok között. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A hét adat között a 71 és a 75 pontosan kétszer szerepel (egynél többször kell előfordulniuk, de ha háromszor szerepelnének, akkor a terjedelem 4 lenne). Még két adatot kell tehát meghatározni. | 1 pont | |
| A hét adat összege $(7\cdot 73 =)$ 511, a hiányzó két adat összege így $(511 - 364 =)$ 147. | 1 pont | |
| A hiányzó adatok egyike sem lehet a 72, mert akkor nem teljesülne a móduszokra vonatkozó feltétel, és nem lehet mindkettő 72-nél nagyobb sem, mert akkor a 72 nem lenne medián. | 1 pont | *A már ismert öt adat és a terjedelem miatt a legkisebb adat legalább* $(75 - 7 =)$ 68, *a legnagyobb pedig legfeljebb* $(71 + 7 =)$ 78 *lehet.* |
| Tehát a hiányzó adatok közül az egyik legfeljebb 70 lehet, a másik pedig ekkor a terjedelem miatt legfeljebb 77 lehet. | 1 pont | *Ezt figyelembe véve a* 147 *lehetséges felbontásai:* $147 = 68 + 79 = 69 + 78 = 70 + 77 = 71 + 76 = 72 + 75 = 73 + 74$. |
| (Mivel $70 + 77 = 147$, ezért) csak a 70 és a 77 lehetséges. | 1 pont | *Ezek közül a terjedelem miatt csak a* $70 + 77$ *felel meg.* |
| A hét szám: 70, 71, 71, 72, 75, 75, 77. | 1 pont | *Tetszőleges sorrendben megadva is jár a pont.* |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül, nemcsökkenő (vagy nemnövekvő) sorrendben felsorolva, helyesen adja meg a hét számot, akkor 2 pontot kapjon. Ha ezen túl igazolja, hogy a megadott hét szám megfelel a feladatban megadott feltételeknek (és ezeket a megállapításokat dokumentálja), akkor további 2 pontot kapjon. A további 3 pontot akkor kaphatja meg, ha igazolja, hogy más megoldása nem lehet a feladatnak.*

| **4. b)** | | |
|---|---|---|
| $72 = 2^3 \cdot 3^2$ és $27\,720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. | 2 pont | |
| (A legkisebb közös többszörös definíciója miatt) $n = 2^k \cdot 3^m \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ alakban írható fel, | 1 pont | *(A legkisebb közös többszörös definíciója miatt) az n prímtényezői között szerepel az 5, a 7 és a 11, mindegyikük pontosan az első hatványon,* |
| ahol $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ és $m \in \{0; 1; 2\}$. | 1 pont | *a 2-es prímtényező legnagyobb kitevője 3 (4 lehetőség), a 3-as prímtényezőé pedig legfeljebb 2 lehet (3 lehetőség). (Más prímtényezője pedig nincs az n-nek.)* |
| Az $n$ lehetséges értékeinek száma tehát $4 \cdot 3 = 12$. | 1 pont | |
| Az $n$ legkisebb lehetséges értéke ($2^0 \cdot 3^0 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 =$) 385. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzések:*
*1. Az n lehetséges értékei növekvő sorrendben felsorolva:*
385, 770, 1155, 1540, 2310, 3080, 3465, 4620, 6930, 9240, 13 860, 27 720.
*2. Ha a vizsgázó a válaszát az n lehetséges értékeinek prímtényezős alakban történő felsorolására alapozva helyesen adja meg, akkor teljes pontszámot kapjon.*

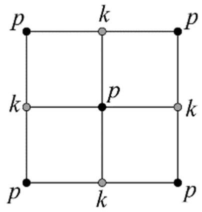
# II.

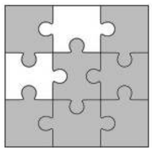
| **5. a)** | | |
|---|---|---|
|  | 2 pont | *Ha a csúcsok azonosítása hiányzik, akkor legfeljebb 1 pont jár.* |
| A fokszámok összege $4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 = 24$. | 1 pont | *A gráfnak 12 éle van, a fokszámösszeg ennek kétszerese, tehát 24.* |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

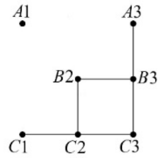
| **5. b) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A gráf egy köre – az a) rész megoldásában megadott ábra szerint – 1, 2, 3 vagy 4 „négyzetből” álló sokszöget „keríthet körül”. | 1 pont | |
| Ha a körbekerített négyzetek száma 1, 2, 3 vagy 4, akkor a kör éleinek száma rendre 4, 6, 8, 8, | 2 pont | |
| tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

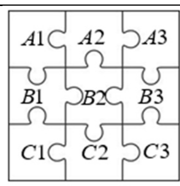
| **5. b)** **második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Ha a (fenti ábra szerint rajzolt) gráf egy körét az éleken haladva bejárjuk, és visszaérkezünk a kiindulási pontba, akkor vízszintes irányban jobbra, illetve balra ugyanannyi „lépést” kell tennünk. A vízszintes irányú lépések száma így páros, és hasonlóan páros a függőleges irányú lépések száma is. | 2 pont | |
| Ezért a teljes lépésszám – azaz a gráf körében szereplő élek száma – is páros, | 1 pont | |
| tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

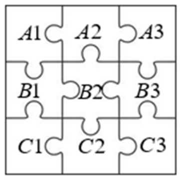
| **5. b)** **harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Helyezzük el a 3×3-as gráf csúcsait a derékszögű koordináta-rendszer rácspontjaira úgy, hogy a $C1$ jelű csúcs kerüljön az origóba (ekkor koordinátái (0; 0)), az $A3$ jelű csúcs pedig a (2; 2) pontba. Ha a gráf egy körét az éleken haladva bejárjuk, akkor minden „lépés” során megváltozik a csúcsok koordinátái összegének a paritása. (Ha pl. az (1; 1) pontból a (2; 1) pontba lépünk, a koordináták összege 2-ről 3-ra módosul, azaz párosról páratlanra változik.) | 2 pont | |
| Ha visszaérkezünk a kiindulási pontba, akkor – a paritás megmaradása miatt – a lépések száma, azaz a kört alkotó élek száma is páros, | 1 pont | |
| tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. b)** **negyedik megoldás** | | |
|---|---|---|
|  Színezzük a gráf csúcsait pirosra és kékre az ábra szerint. Piros csúcsból csak kékbe, kék csúcsból csak pirosba tudunk lépni. | 2 pont | |
| Ezért ha a gráf egy körét az éleken bejárva visszaérkezünk a kiindulási pontba, akkor a lépések száma, azaz a gráf körét alkotó élek száma páros, | 1 pont | |
| tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **4 pont** | |

| **5. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Például a puzzle $A2$ és $B1$ jelű darabját elhagyva a megmaradó 7 puzzle-elem által alkotott részlet nem lesz összefüggő. | 2 pont |  |
| **Összesen**: | **2 pont** | |

| **5. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Például a gráf $A2$ és $B1$ jelű csúcsát és az ezekből induló éleket elhagyva a megmaradó hétpontú gráf nem lesz összefüggő. | 2 pont |  |
| **Összesen**: | **2 pont** | |

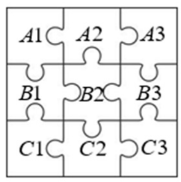
| **5. d) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A három kapcsolódó játékelem helyzete lehet vízszintes, függőleges vagy L alakú. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A vízszintes helyzetű elemhármasok száma 3, | 1 pont | |
| és ugyanennyi a függőleges elemhármasoké is. | 1 pont | |
| Négyféle L alakú, összefüggő elemhármas van: ┘ └ ┐ ┌ | 1 pont | |
| Mind a négy esetben a középső elem 4-féle lehet. (A fenti L alakoknak megfelelően rendre $B2$, $B3$, $C2$, $C3$; $A2$, $A3$, $B2$, $B3$; $B1$, $B2$, $C1$, $C2$; $A1$, $A2$, $B1$, $B2$.) | 2 pont |  |
| A megfelelő elemhármasok száma így $2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **5. d) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az $A1$, $C1$, $C3$, $A3$ puzzle-elemek mindegyike 5 megfelelő elemhármas egyik darabja: 1 vízszintes és 1 függőleges elemhármasnak, továbbá 1 darab L alaknak a közepén és 2 darab L alaknak valamelyik végén szerepelnek. | 1 pont |  |
| Az $A1$, $C1$, $C3$, $A3$ elemekhez ilyen módon összesen $4 \cdot 5$ megfelelő elemhármas tartozik. | 1 pont | |
| A $B1$, $C2$, $B3$, $A2$ elemek mindegyike 8 megfelelő elemhármas egyik darabja: 1 vízszintes és 1 függőleges elemhármasnak, továbbá 2 darab L alaknak a közepén és 4 L alaknak a végén szerepelnek. | 1 pont | |
| A $B1$, $C2$, $B3$, $A2$ elemekhez ilyen módon összesen $4 \cdot 8$ megfelelő elemhármas tartozik. | 1 pont | |

| | | |
|---|---|---|
| A középső $B2$ puzzle-elem 14 megfelelő elemhármas egyik darabja: 1 vízszintes és 1 függőleges elemhármasnak, továbbá 4 darab L alaknak a közepén és 8 darab L alaknak valamelyik végén szerepel. | 1 pont | |
| Mivel a fenti összeszámolásban minden elemhármast 3-szor számoltunk (az őket alkotó 3 puzzle-elem mindegyikénél), | 1 pont | |
| ezért a megfelelő elemhármasok száma $\frac{4\cdot 5+4\cdot 8+14}{3}=22$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **5. d) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| A három kapcsolódó játékelem helyzete lehet vízszintes, függőleges vagy L alakú. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A vízszintes helyzetű elemhármasok száma 3, | 1 pont | |
| és ugyanennyi a függőleges elemhármasoké is. | 1 pont | |
| (A továbbiakban esetszétválasztást végzünk aszerint, hogy az L alakú megfelelő elemhármasok két vízszintes darabját melyik sorból választjuk ki.) Ha az első vagy a harmadik sorból választjuk az L alak két összefüggő elemét, akkor ezekhez a harmadik elemet 2-féleképpen választhatjuk. | 1 pont | |
| Ha a második sorból választjuk ki az L alak két összefüggő elemét, akkor ezekhez a harmadik elemet 4-féleképpen választhatjuk. | 1 pont | |
| Minden sorban 2-féleképpen választhatunk ki két összefüggő elemet, | 1 pont | |
| így a megfelelő elemhármasok száma $2\cdot 3+2\cdot(2+4+2)=22$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes megfelelő elemhármast rendezetten felsorolja, és ez alapján helyes választ ad (1 pont), akkor teljes pontszámot kapjon.*




*Például:*

*vízszintes elemhármasok:* $A1$-$A2$-$A3$, $B1$-$B2$-$B3$, $C1$-$C2$-$C3$; *(1 pont)*

*függőleges elemhármasok:* $A1$-$B1$-$C1$, $A2$-$B2$-$C2$, $A3$-$B3$-$C3$; *(1 pont)*

*L alakok:* $A1$-$A2$-$B2$, $A2$-$A3$-$B3$, $B1$-$B2$-$C2$, $B2$-$B3$-$C3$;
$A1$-$B1$-$B2$, $A2$-$B2$-$B3$, $B1$-$C1$-$C2$, $B2$-$C2$-$C3$;
$B1$-$A1$-$A2$, $B2$-$A2$-$A3$, $C1$-$B1$-$B2$, $C2$-$B2$-$B3$;
$B1$-$B2$-$A2$, $B2$-$B3$-$A3$, $C1$-$C2$-$B2$, $C2$-$C3$-$B3$. *(4 pont)*

| **6. a)** | | |
|---|---|---|
| Az $E$ koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve: $(-7)^2+5^2+4\cdot(-7)-16\cdot5+34=0$ . | 1 pont | |
| A bal oldal értéke (49 + 25 – 28 – 80 + 34 =) 0, ezért $E$ valóban rajta van a $k$ körön. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **2 pont** | |

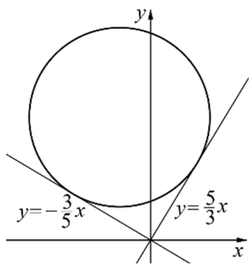
| **6. b)** | | |
|---|---|---|
| A kör egyenletét átalakítva: $(x+2)^2+(y-8)^2=34$ , | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ezt az átalakítást az a) feladat megoldásánál végzi el a vizsgázó.* |
| ahonnan a $k$ kör középpontja $C(–2; 8)$ (sugara pedig $\sqrt{34}$ egység). | 1 pont | |
| Az érintőegyenes egy normálvektora $\overrightarrow{EC}$ = (5; 3). | 1 pont | |
| Az érintőegyenes egyenlete $5x + 3y = –20$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **5 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az érintő egyenletét paraméteres alakban keresi, akkor 1 pontot kapjon annak megállapításáért, hogy a keresett érintő egyenlete felírható* $y=m(x+7)+5$ *alakban (mert az* $x=-7$ *egyenes nem érintő).*
*További 2 pontot kapjon azért, ha az egyenes és a kör egyenletéből alkotott egyenletrendszerből eljut annak megállapításáig, hogy az*
$(m^2+1)x^2+(14m^2-6m+4)x+(49m^2-42m-21)=0$
*egyenlet diszkriminánsa – a* $36m^2+120m+100$ *összeg – nullával egyenlő.*
*Ebből az* $m=-\frac{5}{3}$ *meghatározásáért 1 pontot, a keresett érintő egyenletének felírásáért pedig további 1 pontot kapjon.*

| **6. c)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az $e$ egyenesnek és a $k$ körnek nincs közös pontja, ha az $x^2+(mx)^2+4x-16\cdot mx+34=0$ egyenletnek nincs valós megoldása. | 1 pont* | |
| Rendezve: $(m^2+1)x^2+(4-16m)x+34=0$. | 1 pont* | |
| Ennek a másodfokú egyenletnek pontosan akkor nincs valós megoldása, ha a diszkriminánsa negatív. | 1 pont* | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $D=(4-16m)^2-136(m^2+1)=$ | 1 pont* | |
| $=120m^2-128m-120=8(15m^2-16m-15)$ | 1 pont* | |
| A $15m^2-16m-15=0$ egyenlet gyökei $-\frac{3}{5}$ és $\frac{5}{3}$. | 1 pont | |
| Mivel az egyenletben a másodfokú tag együtthatója pozitív, | 1 pont | *Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.* |
| ezért $15m^2-16m-15<0$ pontosan akkor teljesül, ha $-\frac{3}{5}<m<\frac{5}{3}$.<br>A $k$ körnek és az $e$ egyenesnek nincs közös pontja, ha $m\in\left]-\frac{3}{5};\frac{5}{3}\right[$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| A $k$ kör sugara $\sqrt{34}$ egység, ezért $k$-nak pontosan akkor nincs közös pontja az $e$-vel, ha az egyenes a $C(-2; 8)$ ponttól $\sqrt{34}$ egységnél távolabb van. | 2 pont | |
| Az $e$ egyenes egyenlete $mx-y=0$,<br>így (a pont és egyenes távolságának képletével) a $C$ pont és az $e$ egyenes távolsága: $\left\|\frac{-2m-8}{\sqrt{m^2+1}}\right\|$. | 1 pont | |
| $\left\|\frac{-2m-8}{\sqrt{m^2+1}}\right\|>\sqrt{34}$ | 1 pont | |
| Négyzetre emelés után $\frac{4m^2+32m+64}{m^2+1}>34$,<br>innen pedig $15m^2-16m-15<0$. | 1 pont | |

| **6. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az $y = mx$ egyenletű egyenesek átmennek az origón. Először felírjuk az origón át a körhöz húzható két érintőegyenes egyenletét. Az érintési pontokat az origó és a kör középpontja által meghatározott szakasz, mint átmérő fölé írt Thalész-kör metszi ki a $k$ körből. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A $k$ kör középpontja $C(-2; 8)$. A Thalész-kör középpontja az $OC$ szakasz felezőpontja: $K(-1; 4)$, sugara pedig az $OK$ szakasz hossza, azaz $\sqrt{17}$ egység. A Thalész-kör egyenlete így $(x+1)^2+(y-4)^2=17$. | 2 pont | |
| A két kör metszéspontjainak megállapításához megoldandó az alábbi egyenletrendszer. $\begin{cases}(x+2)^2+(y-8)^2=34\\(x+1)^2+(y-4)^2=17\end{cases}$ | 1 pont | |
| A két egyenletet kivonva egymásból: $2x + 3 - 8y + 48 = 17$, azaz $x = 4y - 17$. | 1 pont | |
| Ezt az első egyenletbe visszaírva, majd a négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $17(y^2-8y+15)=0$. | 1 pont | |
| Ennek az egyenletnek a gyökei 3 és 5, tehát a két érintési pont $(-5; 3)$ és $(3; 5)$. | 1 pont | |
| Az origón és az egyik, illetve másik érintési ponton áthaladó egyenes meredeksége $-\frac{3}{5}$ és $\frac{5}{3}$. | 1 pont | |
|   Az $y = mx$ egyenletű egyenesnek és a $k$ körnek nincs közös pontja, ha $m \in \left]-\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right[$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **9 pont** | |

| **7. a)** | | |
|---|---|---|
| Dóri 20, Blanka és Csenge 25-25 figurát készített. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ezt a számolást a b) feladat megoldásánál végzi el a vizsgázó.* |
| Két figurát $\binom{70}{2}$(= 2415)-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma). | 1 pont | *A két figura kihúzásának sorrendjét is figyelembe véve:* $70 \cdot 69$ (= 4830). |
| Dóri két figurája $\binom{20}{2}$(= 190), Blanka és Csenge két figurája rendre $\binom{25}{2}$(= 300)-féleképpen választható ki, | 1 pont | $20 \cdot 19$ (= 380), *illetve* $25 \cdot 24$ (= 600) |
| így $\binom{20}{2}+2\cdot\binom{25}{2}$(= 790)-féleképpen választható ki úgy két figura, hogy mindkettőt ugyanaz a lány készítette (kedvező esetek száma). | 1 pont | $20 \cdot 19 + 2 \cdot (25 \cdot 24)$ (= 1580) |
| Annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott figurát ugyanaz a lány készítette, $\dfrac{\binom{20}{2}+2\cdot\binom{25}{2}}{\binom{70}{2}} =$ | 1 pont | $\dfrac{20\cdot 19+2\cdot(25\cdot 24)}{70\cdot 69} \approx$ |
| $\left(=\dfrac{158}{483}\right) \approx 0{,}327$. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó visszatevéses mintavétellel dolgozik, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.*

| **7. b)** | | |
|---|---|---|
| A Blanka, Csenge és Dóri által készített karácsonyfa-figurák száma rendre 10, 15 és 6. | 1 pont | |
| Összesen 31 karácsonyfa-figurát készítettek, ezért $\dfrac{10}{31} \approx 0{,}323$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott figurát éppen Blanka készítette. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| **7. c) első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A négyszög oldalainak cm-ben mért hosszát valamely körüljárási irányban jelölje $e, f, g, h$.<br>Az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, ezért $e + g = f + h = 40$. | 1 pont | |
| Feltehetjük, hogy $e = 23$, ekkor $g = 17$; valamint hogy $f > h$ (mert a számtani sorozat különbsége $d \neq 0$). | 1 pont | |
| (Esetszétválasztást végzünk $e$ és $f$ nagyságviszonya alapján.)<br>Ha $f > e$, akkor ($h < g$, és) a sorozat különbsége $d = e - g = 6$; | 1 pont | |
| így $f$ $(= e + 6) = 29$ és $h$ $(= g - 6) = 11$. | 1 pont | |
| Ha $f < e$, akkor ($g < h < f < e$, és) a sorozat különbsé-gére $3d = e - g = 6$, innen $d = 2$. | 1 pont | |
| $h$ $(= g + 2) = 19$ és $f$ $(= h + 2) = 21$. | 1 pont | |
| A négyszög másik három oldala tehát 11, 17 és 29, illetve 17, 19 és 21 (cm) lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.) | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| **7. c) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a számtani sorozat növekvő.<br>Ebben az esetben a 23 a sorozatnak a harmadik vagy negyedik tagja lehet (mert a sorozatnak biztosan két-két 20-nál kisebb, illetve nagyobb tagja van). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó azokat az eseteket is megvizsgálja, amikor a 23 a sorozat első, illetve második tagja.* |
| Ha a 23 a sorozatnak a harmadik tagja, akkor (a sorozat differenciáját $d$-vel jelölve) $(23 - 2d) + (23 - d) + 23 + (23 + d) = 80$. | 1 pont | |
| Innen $92 - 2d = 80$, azaz $d = 6$. | 1 pont | |
| Ha a 23 a sorozatnak a negyedik tagja, akkor $(23 - 3d) + (23 - 2d) + (23 - d) + 23 = 80$. | 1 pont | |
| Innen $92 - 6d = 80$, azaz $d = 2$. | 1 pont | |
| A négyszög másik három oldala tehát 11, 17 és 29, illetve 17, 19 és 21 (cm) lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.) | 1 pont | |
| Mivel $11 + 29 = 17 + 23$, illetve $17 + 23 = 19 + 21$, mindkét kapott négyszög valóban érintőnégyszög. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

| 8. a) | | |
|---|---|---|
| Az állítás hamis. | 1 pont | |
| Ha $G_1$ csúcsainak száma $n$ ($n$ pozitív egész) és $G_2$ csúcsainak száma $2n$, akkor $G_1$ éleinek száma $n-1$, $G_2$ éleinek száma pedig $2n-1$, de $2(n-1) \neq 2n-1$. | 2 pont | |
| **Összesen:** | **3 pont** | |

| 8. b) első megoldás | | |
|---|---|---|
| Összesen $\binom{6}{2} = 15$ üzletkötés történt az előző hónapban, | 1 pont | |
| ezek közül 4-et $\binom{15}{4} = 1365$-féleképpen lehet kiválasztani ellenőrzésre (összes eset száma). | 1 pont | |
| Nem kedvezők azok az esetek, amelyekben mind a 4 ellenőrzésre kiválasztott üzletkötés a $C$, $D$, $E$ és $F$ üzletkötései közül kerül ki. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| $C$, $D$, $E$, $F$ egymás között 6 üzletet kötött, ezek közül 4-et $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen lehet kiválasztani. | 1 pont | |
| A kedvező esetek száma: $\binom{15}{4} - \binom{6}{4} = 1350$, | 1 pont | |
| így a kérdéses valószínűség $\frac{1350}{1365} = \frac{90}{91}$ ($\approx 0{,}989$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| 8. b) második megoldás | | |
|---|---|---|
| Összesen $\binom{6}{2} = 15$ üzletkötés történt az előző hónapban, | 1 pont | |
| ezek közül 4-et $\binom{15}{4} = 1365$-féleképpen lehet kiválasztani ellenőrzésre (összes eset száma). | 1 pont | |
| Az üzletkötések között $\binom{4}{2} = 6$ olyan van, amelyben sem $A$, sem $B$ nem volt érintett, és 9 olyan üzletkötés van, amelyben az $A$ vagy a $B$ érintett volt. | 1 pont | |

| | | |
|---|---|---|
| Ezért a 15 üzletkötés közül $\binom{9}{1}\binom{6}{3}+\binom{9}{2}\binom{6}{2}+\binom{9}{3}\binom{6}{1}+\binom{9}{4}\binom{6}{0}=1350$ különböző módon lehet 4-et ellenőrzésre úgy kiválasztani, hogy közöttük szerepeljen legalább egy az *A* vagy *B* üzletkötései közül (kedvező esetek száma). | 2 pont | |
| A keresett valószínűség: $\frac{1350}{1365}=\frac{90}{91}$ ($\approx 0{,}989$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **8. b) harmadik megoldás** | | |
|---|---|---|
| Tekintsük a cégeket egy hatpontú (teljes) gráf pontjainak, a köztük történt üzletkötéseket pedig a gráf éleinek. Annak a valószínűségét kell kiszámítani, hogy a gráf élei közül 4-et kiválasztva a kiválasztott élek között lesz *A*-ból vagy *B*-ből induló él. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| A hatpontú teljes gráfnak $\binom{6}{2}=15$ éle van, | 1 pont | |
| ezek között $\binom{4}{2}=6$ olyan van, amelynek sem *A*, sem *B* nem végpontja (azaz 9 olyan él van, amelynek az *A* vagy a *B* végpontja). | 1 pont | |
| Annak a valószínűsége, hogy az első, második, harmadik, majd negyedik kiválasztott él egyik végpontja sem *A* vagy *B*, rendre $\frac{6}{15}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{4}{13}$, majd $\frac{3}{12}$. | 1 pont | |
| A komplementer esemény valószínűsége ezek szorzata: $\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{91}$. | 1 pont | |
| A kérdéses valószínűség így $1-\frac{1}{91}=\frac{90}{91}$ ($\approx 0{,}989$). | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **8. c)** | | |
|---|---|---|
| Vegyünk fel egy alkalmas derékszögű koordinátarendszert, amelyben legyen *U*(0; 0) és *P*(100; 0). Ekkor *Q*(100; 16) és *S*(50; 0) (a tengelyeken az egységeket méterben mérjük). | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból vagy egy megfelelő ábrából derül ki.* |
| Az *U*, *Q* pontokon átmenő parabola egyenletét keressük, melynek a szimmetriatengelye az *y* tengely. Mivel a parabola tengelypontja az origó, azért egyenlete $y=cx^2$ alakú. | 1 pont | |

| | | |
|---|---|---|
| A parabolán rajta van a $Q$(100; 16) pont, tehát $16 = c \cdot 100^2$, | 1 pont | |
| ahonnan $c = 0,0016 = \frac{1}{625}$, ezért a parabola egyenlete $y = \frac{x^2}{625}$. | 1 pont | |
| A hirdetővászon által fedett $PQRS$ terület (ezt az $x \mapsto \frac{x^2}{625}$ másodfokú függvény [50; 100] intervallumon vett határozott integrálja adja meg): $\int_{50}^{100} \frac{x^2}{625} dx = \left[ \frac{x^3}{1875} \right]_{50}^{100} =$ | 1 pont | |
| $= \frac{100^3 - 50^3}{1875} = 466\frac{2}{3}$. | 1 pont | $\approx 467$ |
| Ha 8% veszteséggel kell számolni, akkor $466\frac{2}{3} : 0,92 \approx 507$ m$^2$ vászonra lesz szükség. | 1 pont | $467 : 0,92 \approx 508$ m$^2$ |
| **Összesen:** | **7 pont** | |

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó tanult tételként hivatkozik arra, hogy a parabolikus háromszög területe egyharmada a bennfoglaló téglalap területének, akkor ezért 3 pontot kapjon. További 3 pontot kapjon azért, ha az UPQ és az USR parabolikus háromszögek területének különbségeként határozza meg a PQRS területet.*

| **9. a)** | | |
|---|---|---|
| A tanulmány szerint 10 parkolóőr esetén a bliccelők aránya (25 – 10 · 0,5 =) 20%, | 1 pont | |
| a parkolóőrök alkalmazásának költsége pedig naponta (330 · 10 =) 3300 garas lenne. | 1 pont | |
| Mivel az autósok (100 – 20 =) 80 százaléka fizeti meg a parkolási díjat, ezért a parkolási díjakból származó napi bevétel: 15 000 · 0,8 · 10 = 120 000 garas. | 2 pont | |
| A parkolóőrök (10 · 200 =) 2000 autót ellenőriznek, ezek 20 százaléka bliccel, ezért a bliccelőktől származó napi bevétel: 2000 · 0,2 · 150 = 60 000 garas. | 1 pont | |
| A napi nettó bevétel így 120 000 + 60 000 – 3300 = 176 700 garas. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **6 pont** | |

| **9. b)** **első megoldás** | | |
|---|---|---|
| A tanulmány szerint $n$ fő parkolóőr alkalmazása esetén a bliccelők aránya $(25 - 0,5n)$ százalék $(0 \le n \le 50)$, a parkolóőrök alkalmazásának költsége pedig naponta $330n$ garas lenne ($n \in \mathbf{N}$). | 1 pont | |
| A parkolási díjat a 15 000 főnek a $(75 + 0,5n)$ százaléka fizeti meg, az ebből származó bevétel tehát $15\,000 \cdot \frac{75+0,5n}{100} \cdot 10 = 112\,500 + 750n$ garas. | 1 pont | |
| A parkolóőrök $200n$ számú ellenőrzést hajtanak végre, ennek $(25 - 0,5n)$ százalékában szabnak ki büntetést. | 1 pont | |
| A büntetésből származó napi bevétel $200n \cdot \frac{25-0,5n}{100} \cdot 150 = 7500n - 150n^2$ garas. | 1 pont | |
| A napi nettó bevétel $(112\,500 + 750n + 7500n - 150n^2 - 330n =)$ $-150n^2 + 7920n + 112\,500$ garas. | 1 pont | |
| Az $n \mapsto -150n^2 + 7920n + 112\,500$ ($n \in \mathbf{R}$) másodfokú függvény deriváltfüggvénye $n \mapsto -300n + 7920$, | 1 pont* | |
| tehát a függvény maximumhelye (a deriváltfüggvény zérushelye) a $\frac{7920}{300} = 26,4$. | 1 pont* | |
| A napi nettó bevétel tehát 26 vagy 27 parkolóőr esetén lesz maximális. | 1 pont | *Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.* |
| 26 parkolóőr esetén a bevétel 217 020 garas, 27 parkolóőr esetén pedig 216 990 garas, | 1 pont | *A parabola szimmetriatulajdonságára való hivatkozásért vagy egy megfelelő ábráért is jár a pont.* |
| így 26 parkolóőr esetében lesz a legnagyobb a napi nettó bevétel. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **10 pont** | |

*Megjegyzések:*
*1. Ha a vizsgázó a függvény maximumhelyének megállapítása után (további indoklás nélkül) annak kerekítésével válaszol, akkor legfeljebb 9 pontot kaphat.*

*2. A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| Az $n \mapsto an^2 + bn + c$ ($n \in \mathbf{R}$, $a \ne 0$) másodfokú függvény szélsőértéke $-\frac{b}{2a}$-nál van, tehát az $n \mapsto -150n^2 + 7920n + 112\,500$ ($n \in \mathbf{R}$) függvénynek maximuma van $-\frac{7920}{-2 \cdot 150} = \frac{132}{5} = 26,4$-nél. | 2 pont | |

*3. A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

| | | |
|---|---|---|
| $-150n^2+7920n+112\,500=$<br>$=-150(n^2-52,8n)+112\,500=$<br>$=-150[(n-26,4)^2-26,4^2]+112\,500=$<br>$=-150(n-26,4)^2+217\,044$, tehát a függvénynek $n = 26,4$ esetén van maximuma. | 2 pont | |

| **9. b) második megoldás** | | |
|---|---|---|
| $n$ számú parkolóőr ($n \in \mathbf{N}$) alkalmazása esetén jelölje $p_n$ a napi parkolási díjakból, $b_n$ a napi bírságokból származó bevételt, $k_n$ az őrök alkalmazásának napi költségét, $f_n$ pedig a teljes napi nettó bevételt ($f_n = p_n + b_n - k_n$).<br>Az $f_n$ sorozat növekedési viszonyait vizsgáljuk ($n \le 50$ esetén). | 1 pont | |
| $p_{n+1} - p_n = 750$, hiszen 0,5%-kal (75-tel) több lesz a díjfizető autós egy újabb parkolóőr alkalmazása esetén. | 1 pont | |
| $n$ számú parkolóőr alkalmazása esetén a megbírságolt autósok száma $200n\cdot\frac{25-0,5n}{100}=2n(25-0,5n)=$<br>$=50n-n^2$, ezért a bírságból származó bevétel $b_n=150(50n-n^2)=7500n-150n^2$. | 1 pont | |
| $b_{n+1}-b_n=7500(n+1)-150(n+1)^2-7500n+150n^2=$<br>$=7350-300n$ | 1 pont | |
| $k_{n+1} - k_n = 330$, hiszen eggyel több parkolóőr alkalmazásának költségeit kell kifizetni. | 1 pont | |
| Így $f_{n+1} - f_n = 750 + 7350 - 300n - 330 =$<br>$= 7770 - 300n$. | 1 pont | |
| $f_{n+1} - f_n = 7770 - 300n > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $n<\frac{7770}{300}=25,9$ (vagyis $n \le 25$),<br>$n > 25,9$ (vagyis $n \ge 26$) esetén pedig a különbség negatív. | 1 pont | |
| Ez azt jelenti, hogy $f_n$ sorozat először szigorúan monoton nő, aztán szigorúan monoton csökken. | 1 pont | |
| A legnagyobb tagja $f_{26}$, mert $f_{26} - f_{25} > 0$, de $f_{27} - f_{26} < 0$. | 1 pont | |
| Tehát a maximális napi bevételt 26 parkolóőr alkalmazásával érhetik el. | 1 pont | |
| **Összesen:** | **10 pont** | |