ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. október 16.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a) első megoldás		
Ha a sorozat első tagja a, akkor (a mértani sorozat összegképlete szerint) $a\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^5-1}{\frac{1}{4}-1}=852,5$.	1 pont	
$a\cdot\dfrac{-\frac{1023}{1024}}{-\frac{3}{4}}=a\cdot\dfrac{341}{256}=852,5$	2 pont	
$a=\left(\dfrac{852,5\cdot256}{341}=\right)640$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. a) második megoldás		
Ha a sorozat első tagja a, akkor az első öt tag összege $a+\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{16}a+\dfrac{1}{64}a+\dfrac{1}{256}a=852,5$.	1 pont	
$a\cdot\dfrac{256+64+16+4+1}{256}=a\cdot\dfrac{341}{256}=852,5$	2 pont	
$a=\left(\dfrac{852,5\cdot256}{341}=\right)640$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a megoldásában közelítő értéket is használ, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

1. b) **első megoldás**		
Jelölje a sorozat első tagját a, a differenciáját d. Ekkor az első öt tag összege $\frac{a+a+4d}{2}\cdot 5$, az első tíz tag összege $\frac{a+a+9d}{2}\cdot 10$.	1 pont	
Megoldandó tehát az alábbi egyenletrendszer: $\begin{cases} 5a+10d=852{,}5 \\ 10a+45d=2330. \end{cases}$	1 pont	
Az első egyenletből $a=\frac{852{,}5-10d}{5}=170{,}5-2d$. Ezt beírjuk a második egyenletbe: $10\cdot(170{,}5-2d)+45d=2330$, azaz $1705+25d=2330$.	2 pont	*A második egyenletből kivonva az első egyenlet kétszeresét:* $25d=625$.
Innen $d=25$ a differencia.	1 pont	
$a=(170{,}5-2\cdot 25=)\ 120{,}5$ a sorozat első tagja.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: A sorozat ötödik tagja 220,5, tizedik tagja 345,5. Az első öt tag összege $\left(\frac{120{,}5+220{,}5}{2}\cdot 5=\right)852{,}5$, az első tíz tag összege $\left(\frac{120{,}5+345{,}5}{2}\cdot 10=\right)2330$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

1. b) **második megoldás**		
Jelölje a sorozat első tagját a, a differenciáját d, az első öt tag összegét S. A második öt tag összege $S+5\cdot 5d=S+25d$, mert minden tag $5d$-vel nagyobb a nála 5-tel korábbi tagnál; az első tíz tag összege: $S+S+25d=2S+25d$.	2 pont	
$2\cdot 852{,}5+25d=2330$,	1 pont	
innen $d=25$.	1 pont	
Az első öt tag összege $\frac{a+a+4d}{2}\cdot 5=852{,}5$,	1 pont	
azaz $5a+10\cdot 25=852{,}5$, innen $a=120{,}5$.	1 pont	
Ellenőrzés a szöveg alapján: A sorozat ötödik tagja 220,5, tizedik tagja 345,5. Az első öt tag összege $\left(\frac{120{,}5+220{,}5}{2}\cdot 5=\right)852{,}5$, az első tíz tag összege $\left(\frac{120{,}5+345{,}5}{2}\cdot 10=\right)2330$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. a)		
(Az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság miatt:) $25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x=81$.	2 pont	
$\frac{81}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x=81$	1 pont	
$\left(\frac{1}{5}\right)^x=5$	1 pont	
$\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$	1 pont	
(Az $\frac{1}{5}$ alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért) $x=-1$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozva.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. b)		
($5^x>0$ és $5^{-x}>0$, ezért) $\frac{\lg(5^x\cdot5^{-x})}{2}\le\lg\frac{5^x+5^{-x}}{2}$.	1 pont	$\frac{x\lg5-x\lg5}{2}\le\lg\frac{5^x+5^{-x}}{2}$
$0\le\lg\frac{5^x+5^{-x}}{2}$	1 pont	
A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért	1 pont	
$1\le\frac{5^x+5^{-x}}{2}$, vagyis $2\le5^x+5^{-x}$.	1 pont	
Az 5^x és az 5^{-x} pozitív számok egymás reciprokai, ezért az összegük legalább 2.	2 pont*	$0\le(5^x-1)^2$, *ami minden* $x\in\mathbf{R}$ *esetén teljesül.*
Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ebből következik, hogy az eredeti állítás is igaz.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:

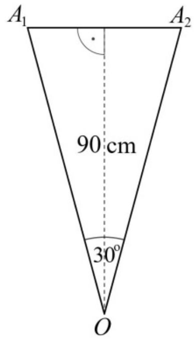
*1. A *-gal jelölt pontokat akkor is megkaphatja a vizsgázó, ha az* 5^x *és az* 5^{-x} *pozitív számok számtani és mértani közepe közötti összefüggésre hivatkozik:* $5^x+5^{-x}\ge2\sqrt{5^x\cdot5^{-x}}=2$.

2. Az alábbi gondolatmenet is teljes pontszámot ér.

(Szemlélet alapján elfogadjuk, hogy) a tízes alapú logaritmusfüggvény konkáv. (1 pont)

Ezért ha a és b két tetszőleges pozitív szám (1 pont), akkor $\frac{\lg a+\lg b}{2}\le\lg\frac{a+b}{2}$. *(2 pont)*

Mivel most $5^x>0$ *és* $5^{-x}>0$ *(1 pont), így* $\frac{\lg5^x+\lg5^{-x}}{2}\le\lg\frac{5^x+5^{-x}}{2}$ *igaz. Ez volt a bizonyítandó állítás. (2 pont)*

3. a)		
A szabályos 12-szög felbontható 12 darab egybevágó, 30°-os szárszögű egyenlő szárú háromszögre.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A 12-szög középpontja O, az A_1OA_2 egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magassága $m = 90$ (cm), 	1 pont	
alapja $a = A_1A_2 = 2 \cdot 90 \cdot \text{tg } 15° \approx 48{,}2$ (cm).	1 pont	$\approx 48{,}23$ (cm)
A 12-szög területe $12 \cdot \frac{am}{2} \approx 26\,000$ (cm^2).	1 pont	$\approx 26\,045$ (cm^2)
Az óralap térfogata $26000 \cdot 0{,}2 = 5200$ cm^3 $\approx$	1 pont	≈ 5209 cm^3
$\approx 0{,}0052$ m^3,	1 pont	
tömege $0{,}0052 \cdot 2700 \approx 14$ kg.	1 pont	*A pontos értékkel számolva* $\approx 14{,}1$ kg.
Összesen:	**7 pont**	

3. b)		
A Thalész-tétel (megfordítása) miatt derékszögű háromszöget akkor kapunk, ha a háromszög leghosszabb oldala a 12-szög köré írt körének átmérője, tehát ennek az oldalnak a két végpontja a 12-szög két átellenes csúcsa.	1 pont	
Ha A_1 az átfogó egyik végpontja, akkor a másik végpont A_7.	1 pont	
A háromszög harmadik (derékszögű) csúcsa ekkor a maradék 10 csúcs közül bármelyik lehet. Ez 10 lehetőség.	1 pont	
Ha A_1 a derékszögű csúcs, akkor a háromszög átfogója 5-féle lehet: A_2A_8, A_3A_9, A_4A_{10}, A_5A_{11} vagy A_6A_{12}. Ez 5 lehetőség.	1 pont	
Összesen (10 + 5 =) 15 különböző, a feltételeknek megfelelő derékszögű háromszög van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a)		
(Mivel $400 = \frac{500+300}{2}$, azért) 400 Ft/kg-os egységáron a baracknak $\left(\frac{50+70}{2} =\right)$ 60%-a,	1 pont	
azaz $(200 \cdot 0{,}6 =)$ 120 kg fogyna el.	1 pont	
Az ebből származó bevétel $(120 \cdot 400 =)$ 48 000 Ft lenne.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha a b) feladat állítását felhasználva ad helyes választ.

4. b) első megoldás		
Ha lineáris kapcsolat van az egységár (x) és az eladott barack mennyisége (y) között, akkor $y = mx + b$.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A feladat szövege alapján (mivel a 200-nak a fele 100, a 70%-a pedig 140): $100 = 500m + b$ és $140 = 300m + b$.	1 pont	*A lineáris függvény grafikonja egy olyan egyenesre illeszkedik, amelynek meredeksége:* $\frac{200 \cdot 0{,}5 - 200 \cdot 0{,}7}{500-300} = -\frac{1}{5}$.
A két egyenletet kivonva egymásból: $-40 = 200m$, tehát $m = -\frac{1}{5}$,	1 pont	
majd visszahelyettesítve $b = 200$. (Tehát valóban $y = -\frac{1}{5}x + 200$.)	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. b) második megoldás		
A lineáris kapcsolatot két értékpár meghatározza.	1 pont	
(A 200-nak a fele 100, a 70%-a pedig 140.) Mivel $100 = -\frac{1}{5} \cdot 500 + 200$ és $140 = -\frac{1}{5} \cdot 300 + 200$ is teljesül,	2 pont	
ezért valóban $y = -\frac{1}{5}x + 200$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. c)		
Ha x (Ft/kg) az eladási ár, akkor a napközben eladott barackmennyiség $-\frac{1}{5}x+200$ (kg), az ebből származó bevétel $\left(-\frac{1}{5}x+200\right)\cdot x=-\frac{1}{5}x^2+200x$ (Ft),	1 pont	
a nap végén megmaradt barackmennyiség $200-\left(-\frac{1}{5}x+200\right)=\frac{1}{5}x$ (kg), az ebből származó bevétel pedig $\frac{1}{5}x\cdot 80=16x$ (Ft).	1 pont	
Az összes bevétel tehát x (Ft/kg) eladási ár esetén $-\frac{1}{5}x^2+216x$ (Ft). Keressük ezért a $B(x)=-\frac{1}{5}x^2+216x$ $(0\le x\le 1000)$ függvény maximumát.	1 pont	
$B(x)=-\frac{1}{5}(x-540)^2+58\,320$	1 pont*	$B(x)=x\cdot\left(-\frac{1}{5}x+216\right)$
Mivel az első tag nem pozitív, ezért $B(x)\le 58\,320$.	1 pont*	*$B(x)$ grafikonja egy olyan „lefelé nyíló” parabolának egy íve, mely a* 0 *és* az 1080 *helyen metszi az x tengelyt,*
A legnagyobb értékét $B(x)$ akkor veszi fel, ha $(x-540)^2=0$, vagyis $x=540$ (ami eleme az értelmezési tartománynak).	1 pont*	*tengelypontjának első koordinátája pedig* 540 *(ami eleme a B értelmezési tartományának).*
A napi bevétel tehát 540 Ft/kg egységár esetén maximális. (A maximális bevétel $B(540)=58\,320$ Ft.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:

*1. A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

(Keressük a $0 < x < 1000$ intervallumon a B függvény maximumát.) $B(x)$ deriváltfüggvénye: $B'(x) = -\frac{2}{5}x + 216$ $(0 < x < 1000)$.	1 pont	
(A B függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltfüggvényének zérushelye van.) $-\frac{2}{5}x + 216 = 0$, $x = 540$ (és ez eleme az értelmezési tartományának).	1 pont	
$B'(x)$ az $x < 540$ esetben pozitív, az $x > 540$ esetben pedig negatív, ezért a B-nek az 540 (lokális és egyben abszolút) maximumhelye.	1 pont	$B''(x) = –0{,}4 < 0$ *a teljes értelmezési tartományon, tehát a B-nek az* 540 *(abszolút) maximumhelye.*

*2. A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a < 0, x \in \mathbf{R})$ másodfokú függvény maximumhelye $-\frac{b}{2a}$,	1 pont	
ezért az $x \mapsto -\frac{1}{5}x^2 + 216x$ $(x \in \mathbf{R})$ másodfokú függvény maximumhelye: $-\frac{216}{-\frac{2}{5}} = 540$ (és ez eleme a B függvény értelmezési tartományának is, tehát B-nek is maximumhelye).	2 pont	

II.

5. a)		
Ha Kinga egyet sem old meg a szorgalmi feladatok közül, akkor 3! = 6-féle, ha pedig mind a hármat megoldja, akkor 6! = 720-féle különböző sorrendben oldhatja meg a házi feladatait.	1 pont	
Ha egyet old meg a szorgalmi feladatok közül, akkor a négy feladatot 4! = 24-féle különböző sorrendben oldhatja meg,	1 pont	
viszont a szorgalmi feladat kiválasztására is 3 lehetősége van, így ez összesen $24 \cdot 3 = 72$ különböző sorrendet jelent.	1 pont	
Ha kettőt old meg a szorgalmi feladatok közül, akkor az öt feladatot 5! = 120-féle különböző sorrendben oldhatja meg,	1 pont	
viszont a két szorgalmi feladat kiválasztására is 3 lehetősége van, így ez összesen $120 \cdot 3 = 360$ különböző sorrendet jelent.	1 pont	
Ez összesen 6 + 72 + 360 + 720 = 1158 különböző lehetséges sorrendet jelent.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. b)		
A számok összege $1000 \cdot 500 = 500\,000$.	1 pont	
A lehetséges legnagyobb számot akkor kaphatjuk meg, ha a többi 499 szám a lehető legkisebb.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A legkisebb 499 különböző pozitív egész szám összege $1 + 2 + 3 + \ldots + 499 = \frac{500 \cdot 499}{2} = 124\,750$.	2 pont	
A számok közül a legnagyobb tehát legfeljebb (500 000 – 124 750 =) 375 250 lehet.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) első megoldás		
Ha mindannyian legalább egy tanulót vállalnak, akkor (valamilyen sorrendben) 4, 1, 1, 1 vagy 3, 2, 1, 1 vagy 2, 2, 2, 1 tanulót fognak korrepetálni.	1 pont	

Az első esetben 4-féleképpen választható ki közülük a négy tanulót korrepetáló személy. Ez 4 lehetőség.	1 pont	
A második esetben 4-féleképpen választható ki a három tanulót korrepetáló személy, ezután pedig 3-féleképpen a 2 tanulót korrepetáló. Ez tehát $4 \cdot 3 = 12$ lehetőség.	1 pont	
A harmadik esetben 4-féleképpen választható ki az egy tanulót korrepetáló személy. Ez is 4 lehetőség.	1 pont	
Összesen tehát (4 + 12 + 4 =) 20-féleképpen állapodhatnak meg.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) második megoldás		
Egy korrepetálást mindenki vállal, ezért elegendő azt meghatározni, hogy a további három korrepetálásból melyikük hányat vállal.	1 pont	
A három korrepetálást jelentse három kör: o o o, és három függőleges vonalat tegyünk a körök elé, közé, illetve mögé úgy, hogy rendre ezek határozzák meg a Kinga, Linda, Misi, illetve Nándi által vállalt korrepetáltak számát. (Például o||o o| jelentése: Kinga 1, Linda 0, Misi 2, Nándi 0 korrepetálást kap a további háromból.)	2 pont	
A 3 függőleges vonalból és 3 körből álló (6 hosszúságú) jelsorozatok száma $\frac{6!}{3!\cdot 3!}$ (= 20). Összesen tehát 20-féleképpen állapodhatnak meg.	2 pont	$\binom{6}{3}$
Összesen:	**5 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
Egy korrepetálást mindenki vállal, ezért elegendő azt meghatározni, hogy a további három korrepetálásból melyikük hányat vállal.	1 pont	
Kinga, Linda, Misi és Nándi közül kell kiválasztanunk három személyt, aki ezt a három korrepetálást vállalja. A kiválasztás sorrendje nem számít, és egy személyt többször is kiválaszthatunk. Ez megfelel 4 elem harmadosztályú ismétléses kombinációi számának.	2 pont	
Összesen tehát $C_4^{3,i} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} =$ 20-féleképpen állapodhatnak meg.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az összes lehetséges esetet rendezetten felsorolva válaszol, akkor teljes pontszámot kapjon.

6. a)		
I. Az állítás hamis.	1 pont	
Ellenpélda az olyan trapéz, amelynek 2-2 szemközti szöge egyenlő, míg a szomszédos szögei különbözők (ezek a nem téglalap paralelogrammák).	2 pont*	
II. Az állítás igaz.	1 pont	
Ha $a = b$, akkor $\alpha = \beta$, így $3\alpha = 3\beta$, tehát valóban $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklásként paralelogrammára hivatkozik, de nem zárja ki a téglalapot (nem mellékel egy megfelelő ábrát), akkor a *-gal jelölt 2 pontból 1 pontot kapjon.*

6. b)		
A II. állítás megfordítása: Ha egy háromszögben $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$, akkor $a = b$.	1 pont*	
A II. állítás megfordítása hamis.	1 pont	
Ha $3\alpha = 180° - 3\beta$ (azaz $\alpha + \beta = 60°$), akkor $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$, de ($\alpha \neq 30°$ esetén) $a \neq b$.	2 pont	*Egy ellenpélda:* $\alpha = 20°$ *és* $\beta = 40°$ *esetén* $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$ ($\sin 60° = = \sin 120°$), *de* $a \neq b$.
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a vizsgázó az állítás megfordításával ekvivalens kijelentést fogalmaz meg (például: Ha egy háromszögben $a \neq b$, akkor* $\sin 3\alpha \neq \sin 3\beta$.).

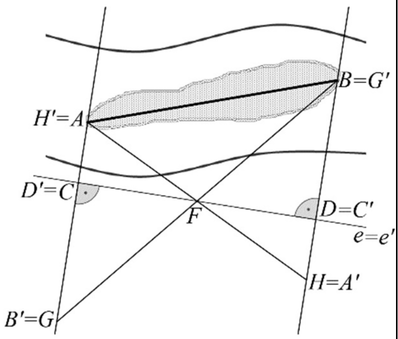
6. c)		
(0,4 annak a valószínűsége, hogy egy adott kérdésre hibásan válaszol Béla.) A nulla helyes tipp valószínűsége $p_0 = 0,4^3 = 0,064$.	1 pont	
Az egy helyes tipp valószínűsége $p_1 = \binom{3}{1} \cdot 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,288$.	1 pont	
A két helyes tipp valószínűsége $p_2 = \binom{3}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4 = 0,432$.	1 pont	
A három helyes tipp valószínűsége $p_3 = 0,6^3 = 0,216$.	1 pont	$p_3 = 1 - (0,064 + 0,288 +$ $+ 0,432) = 0,216$
Béla pontszámának várható értéke $p_3 \cdot 2 + p_2 \cdot 1 \, (+ p_1 \cdot 0 + p_0 \cdot 0) =$	1 pont	
= 0,864.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

7. a) **első megoldás**		
A négy csontocska összesen 4! (= 24) különböző módon érkezhet le úgy, hogy az eredmény Venus-dobás legyen (és ezen leérkezések egyformán valószínűek).	2 pont	
Mindegyik leérkezés valószínűsége ugyanannyi: $\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$ (= 0,0016).	2 pont	
A kérdezett valószínűség tehát $4!\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\left(=\frac{24}{625}\right)=0{,}0384.$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. a) **második megoldás**		
Modellezzük a dobásokat a következő módon: Legyen egy dobozban 4 darab *A*, 4 darab *B*, 1 darab *C*, illetve 1 darab *D* jelű (összesen tehát 10 darab) korong. A dobozból négyszer húzunk visszatevéssel egy-egy korongot. (Mindegyik húzásnál 0,4 az *A*, illetve a *B* jelű korong, és 0,1 a *C*, illetve a *D* korong húzásának valószínűsége.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy négy különböző betűjelű korongot húzunk (Venus-dobás)?	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az összes (egyenlően valószínű) eset száma 10^4.	1 pont	
Az *A*, *B*, *C*, *D* jelű korongokat ebben a sorrendben $4\cdot4\cdot1\cdot1$ (= 16)-féleképpen húzhatjuk ki.	1 pont	
Mivel négy különböző jelű korong bármely sorrendben való kihúzása Venus-dobást jelent, ezért a kedvező esetek száma $4!\cdot4\cdot4\cdot1\cdot1$ (= 384).	1 pont	
A kérdezett valószínűség $\frac{384}{10^4}=0{,}0384$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

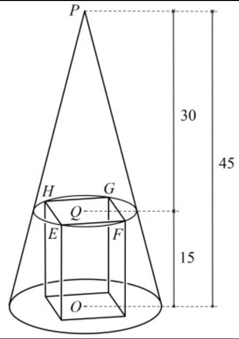
7. b)		
Annak a valószínűsége, hogy egyik taxillus sem a *C* helyzetben érkezik le: $0{,}9^4$ (= 0,6561),	1 pont	*Az I. esemény valószínűsége:* $\binom{4}{1}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3 + \binom{4}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^2 + \binom{4}{3}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9 + 0{,}1^4 =$
tehát az I. esemény valószínűsége (1 – 0,6561 =) 0,3439.	1 pont	$=(0{,}2916 + 0{,}0486 + 0{,}0036 + 0{,}0001) = 0{,}3439$.
Annak a valószínűsége, hogy egy előre megjelölt taxillus az *A* helyzetben érkezik le, a többi pedig nem: $0{,}4\cdot 0{,}6^3$ (= 0,0864).	1 pont	*A II. esemény valószínűsége az $n = 4$ és $p = 0{,}4$ paraméterű binomiális eloszlás segítségével:* $\binom{4}{1}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$.
A négy taxillus bármelyike lehet az előre megjelölt, ezért a II. esemény valószínűsége ($4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^3$ =) 0,3456.	1 pont	
Fentiek alapján a II. esemény valószínűbb, mint az I.	1 pont	*Indoklás nélküli válaszért ez a pont nem jár.*
Összesen:	**5 pont**	

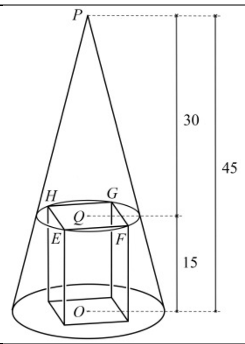
7. c) első megoldás		
$GCF\Delta \cong BDF\Delta$, mert $CF = FD$, és egyenlők a CF, illetve FD oldalukon fekvő szögeik is.	1 pont	
Hasonlóan $ACF\Delta \cong HDF\Delta$ (mert $CF = FD$, és egyenlők a CF, illetve FD oldalukon fekvő szögeik is).	1 pont	
Fentiek miatt $AF = FH$ és $BF = FG$, vagyis az $ABHG$ négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást.	1 pont	*$AF = FH$ és $BF = FG$ és $AFB\angle = HFG\angle$*
Az $ABHG$ négyszög tehát paralelogramma,	1 pont	*$ABF\Delta \cong HGF\Delta$*
ezért $AB = HG$, Thalész állítása tehát valóban igaz.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

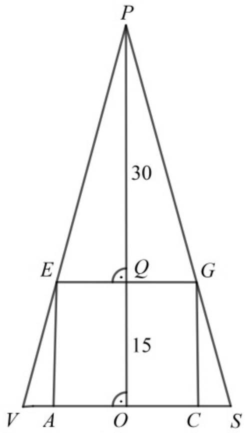
7. c) második megoldás		
Tükrözzük az ábrát az F pontra.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Ekkor az AG és a BH egyenes egymás tükörképei lesznek (hiszen C és D egymás tükörképei, és mindkét egyenes merőleges a CD szakaszra).	1 pont	
Ebből következik, hogy A és H, illetve B és G egymás tükörképei, 	1 pont	
vagyis az $AGHB$ négyszög középpontosan szimmetrikus (paralelogramma).	1 pont	
Az AB szakasz tükörképe a HG szakasz (ezért egyenlő hosszúak), Thalész állítása tehát valóban igaz.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. a) első megoldás		
Az EF egyenes merőleges az $AEHD$ síkra (mert merőleges két metsző egyenesére, ezért merőleges a sík minden egyenesére),	1 pont	
ezért az EF és AH egyenesek, így az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok is merőlegesek.	1 pont	
Tehát $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AH}=0$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. a) második megoldás		
Vegyünk fel egy koordináta-rendszert, melynek origója az A csúcs, x, y, z tengelye pedig rendre illeszkedik a B, D, E csúcsokra.	1 pont	
Ebben a koordináta-rendszerben $\overrightarrow{EF}=(8; 0; 0)$, $\overrightarrow{AH}=(0; 8; 15)$.	1 pont	
$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AH}=8\cdot 0+0\cdot 8+0\cdot 15=0$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

8. b) **első megoldás**		
Jelölje O az $ABCD$ négyzetnek (és a kúp alaplapjának) a középpontját, Q az $EFGH$ négyzet középpontját. A kúpból az $EFGH$ sík egy kisebb kúpot metsz ki, amely az eredetihez (középpontosan) hasonló (a hasonlóság középpontja a P pont). $PQ = PO - OQ = 45 - 15 = 30$, így a hasonlóság aránya $\frac{PQ}{PO} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.	2 pont	
A kisebb kúp alapkörének sugara (az $EFGH$ négyzet köré írt kör sugara) $QE = \frac{\sqrt{2}\cdot 8}{2} = 4\sqrt{2}$ ($\approx 5{,}66$). A hasonlóság miatt a körülírt kúp alapkörének a sugara ennek az 1,5-szerese: $R = 6\sqrt{2}$ ($\approx 8{,}49$).	2 pont	
A körülírt kúp alkotója (az alapkör sugarából és a kúp magasságából Pitagorasz-tétellel) $a = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 45^2} = \sqrt{2097}$ ($\approx 45{,}79$).	2 pont	
A körülírt kúp felszíne $R^2\pi + R\pi a \approx 1446{,}9$ (területegység).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. b) **második megoldás**		
Jelölje O az $ABCD$ négyzetnek (és a kúp alaplapjának) a középpontját, Q az $EFGH$ négyzet középpontját. A kúpból az $EFGH$ sík egy kisebb kúpot metsz ki, amely az eredetihez (középpontosan) hasonló (a hasonlóság középpontja a P pont). $PQ = PO - OQ = 45 - 15 = 30$, így a hasonlóság aránya $\frac{PO}{PQ} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$.	2 pont	
A kisebb kúp alapkörének sugara (az $EFGH$ négyzet köré írt kör sugara) $r = QE = \frac{\sqrt{2}\cdot 8}{2} = 4\sqrt{2}$ ($\approx 5{,}66$).	1 pont	
A kisebb kúp alkotója (Pitagorasz-tétellel az EQP háromszögben) $l = \sqrt{QE^2 + PQ^2} = \sqrt{932}$ ($\approx 30{,}53$).	1 pont	
A kisebb kúp felszíne $r^2\pi + r\pi l \approx 643{,}07$ (területegység).	1 pont	
Hasonló testek felszíne a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő,	1 pont	
így a körülírt kúp felszíne kb. $1{,}5^2 \cdot 643{,}07 \approx 1446{,}9$ (területegység).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

8. b) **harmadik megoldás**		
 Tekintsük a kúpnak azt a síkmetszetét, amely a tengelyére és a hasáb E csúcsára illeszkedik. A síkmetszet a VPS egyenlő szárú háromszög, O a kúp alapkörének középpontja.	1 pont	
A kúpot az $EFGH$ négyzet síkja egy, az alapkörrel párhuzamos síkú körben metszi, ennek egyik átmérője az EG szakasz (a kör középpontja a Q pont).	1 pont	
EG a 8 cm oldalú $EFGH$ négyzet átlója, tehát $EG = 8\sqrt{2}$ ($\approx 11{,}31$), vagyis a metszetkör sugara $QE = 4\sqrt{2}$ ($\approx 5{,}66$).	1 pont	
A VOP derékszögű háromszög hasonló az EQP derékszögű háromszöghöz (a P-nél fekvő hegyesszögük közös), hasonlóságuk aránya $PO : PQ = 45 : 30 = 3 : 2$.	1 pont	
Az alapkör sugara tehát $OV = 1{,}5 \cdot QE = 6\sqrt{2}$ ($\approx 8{,}49$).	1 pont	
A kúp alkotója Pitagorasz-tétellel: $PV = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 45^2} = \sqrt{2097}$ ($\approx 45{,}79$).	1 pont	
A körülírt kúp felszíne: $(6\sqrt{2})^2\pi + 6\sqrt{2}\sqrt{2097}\pi \approx 1446{,}9$ (területegység).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">8. c)</td></tr>
<tr><td>Az ismeretlen befogó hossza legyen b, az átfogó hossza pedig c (és mindkettő pozitív egész szám).
A Pitagorasz-tétel miatt $15^2 + b^2 = c^2$,
innen $225 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$.</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$225 = 3^2 \cdot 5^2$.
Mivel $0 < c - b < c + b$,
ezért a tényezőkre bontás lehetőségei:
<table><tr><td>$c - b$</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>9</td></tr><tr><td>$c + b$</td><td>225</td><td>75</td><td>45</td><td>25</td></tr></table></td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>c lehetséges értékei rendre 113, 39, 25, 17,
a hozzájuk tartozó b értékek rendre 112, 36, 20, 8.
Tehát 4 megfelelő derékszögű háromszög van.</td><td>2 pont</td><td>Mivel $c - b + c + b = 2c$, ezért $c + b$ és $c - b$ azonos paritása miatt mind a négy esethez tartozik egy-egy megfelelő derékszögű háromszög.
Tehát 4 megfelelő derékszögű háromszög van.</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>6 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzés: Ha a vizsgázó (indoklás nélkül) felsorolja a 4 megfelelő derékszögű háromszöget, de nem bizonyítja, hogy több megoldás nincs, akkor 3 pontot kapjon. Indoklás nélkül felsorolt 3 megfelelő háromszögért 2 pont, 2 megfelelő háromszögért 1 pont, 2-nél kevesebb megfelelő háromszögért 0 pont jár.

<table>
<tr><td colspan="3">9. a)</td></tr>
<tr><td>$\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)dx = [x^3 - 12x^2 + 20x]_0^p$</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Megoldandó a $p^3 - 12p^2 + 20p = 0$ egyenlet.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Mivel $p > 0$, ezért ez ekvivalens a $p^2 - 12p + 20 = 0$ másodfokú egyenlettel.</td><td>1 pont</td><td>$p(p^2 - 12p + 20) = 0$</td></tr>
<tr><td>Ennek (pozitív) gyökei a 2 és a 10,
ezek tehát a p lehetséges értékei.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>5 pont</td><td></td></tr>
</table>

9. b)		
A zérushelyre vonatkozó előírás miatt $8a + 4b + 2c + 28 = 0$.	1 pont	
(A lokális maximumhelyre vonatkozó előírás teljesülésének szükséges feltétele, hogy a függvény deriváltja a -4 helyen 0 legyen.) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	1 pont	
$f'(-4) = 48a - 8b + c = 0$	1 pont	
(Az inflexiós pontra vonatkozó előírás teljesülésének szükséges feltétele, hogy a függvény második deriváltja a -1 helyen 0 legyen.) $f''(x) = 6ax + 2b$	1 pont	
$f''(-1) = -6a + 2b = 0$	1 pont	
Megoldandó a $\begin{cases} 8a + 4b + 2c + 28 = 0 \\ 48a - 8b + c = 0 \\ -6a + 2b = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer.	1 pont	
Az egyenletrendszer harmadik egyenletéből $b = 3a$. Ezt az első két egyenletbe helyettesítve (és egyszerűsítve) a $\begin{cases} 10a + c = -14 \\ 24a + c = 0 \end{cases}$ kétismeretlenes egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldása $a = 1$ és $c = -24$, tehát $b = 3$.	3 pont	
(A lokális maximumhely és az inflexiós pont elégséges feltételének vizsgálata:) Ha $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$ ($x \in \mathbf{R}$), akkor f'-nek a -4 zérushelye, és itt f' pozitívból negatívba megy át, ezért az f-nek valóban lokális maximumhelye van -4-nél;	1 pont	$f''(-4) = -18 < 0$
f''-nek zérushelye a -1, és itt f'' előjelet vált, ezért az f-nek valóban inflexiós pontja van itt.	1 pont	$f'''(-1) = 6 \neq 0$
Összesen:	**11 pont**	