Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2019. május 7. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$

b) $4\sin^3 x - \sin x = 0$

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

2. Több település közötti legkisebb költségű vezetékhálózat tervezésekor először egy **teljes gráfot** készítettek. Ebben a gráfban minden települést a gráf egy csúcsával, minden vezetékes kapcsolatot a gráf egy-egy élével jelöltek, majd a gráf minden élére ráírták, hogy mennyibe kerülne az adott kapcsolat kiépítése. Ezután egyesével kitörölték a „költséges éleket" úgy, hogy a törlés után megmaradó gráf összefüggő maradjon.
A teljes gráf élei kétharmadának törlése után végül egy (a legkisebb költségű hálózatot megadó) **fagráfot** kaptak.

a) Hány település szerepelt a tervben?

Az őszi kispályás labdarúgó bajnokságban 10 település egy-egy csapata vett részt. Minden csapat egy mérkőzést játszott mindegyik másik csapattal; minden mérkőzés győztese 3, vesztese 0 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét csapatnak 1-1 pont járt. A bajnokság végén a 10 csapatnak összesen 130 pontja volt.

b) Hány mérkőzés végződött döntetlenre?

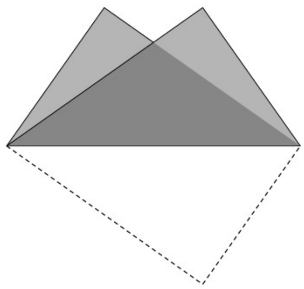
a)	6 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	11 pont	

3. Tekintsük az összes olyan hétjegyű természetes számot, amely az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek mindegyikét tartalmazza.

a) Az összes ilyen hétjegyű számot felírjuk egy-egy 0,5 cm × 2 cm-es téglalap alakú papírdarabra (minden papírdarabra egy hétjegyű számot írunk). Elegendő lesz-e a kis téglalapok elkészítéséhez 8 darab A4-es papírlap? (Az A4-es papírlap téglalap alakú, mérete 21 cm × 29,7 cm.)

b) A megadott tulajdonságú hétjegyű számokat nagyság szerint növekvő sorba rendezzük. Igazolja, hogy a 721. helyen a 2 134 567 áll!

Egy 21 cm × 29,7 cm-es téglalap alakú (A4-es) papírlapot összehajtottunk az egyik átlója mentén (az ábra szerint).



c) Számítsa ki, hogy mekkora az összehajtás után kétszeresen fedett síkrész területe!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

4. A tengerpart közelében, a vízszintes tengerfenékre négy érzékelő egységet telepítenek (A, B, C, D). A tervrajzon derékszögű koordináta-rendszerben adták meg három érzékelő helyzetét: $A(0; -12{,}5)$, $B(10; -7{,}5)$, $C(48; 14)$.

a) Igazolja, hogy az A, B, C pontok nem illeszkednek egy egyenesre!

A tervrajzon a koordinátatengelyeken megadott 1 egység távolság a valóságban 20 méternek felel meg.

b) Hány méter lehet az A és D érzékelők valódi távolsága, ha a D érzékelőt úgy telepítik, hogy az A-tól és a B-től egyenlő távolságra, C-től pedig 1000 méter távolságra legyen?

a)	4 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Az első dobás eredményét egy számtani sorozat első tagjának, a második dobás eredményét a sorozat differenciájának tekintjük.

a) Az így kapható sorozatok között hány olyan van, amelyben az első 10 tag összege kisebb 100-nál? (Két sorozatot különbözőnek tekintünk, ha az első tagjuk vagy a differenciájuk eltér egymástól.)

Tekintsük az összes olyan négyjegyű pozitív egész számot, amelynek egyik számjegye sem 0.

b) Hány olyan van ezek között, amelynek a négy számjegye (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy egymást követő tagja?

Janka egy szabályos dobókockával négyszer dobott. Észrevette, hogy ha az ötödik dobásának értéke 3 lenne, akkor az öt dobás átlaga is 3 lenne. Ha az ötödik dobásának értéke 4 lenne, akkor az öt dobás mediánja is 4 lenne. Ha az ötödik dobásának értéke 5 lenne, akkor az öt dobás (egyetlen) módusza is 5 lenne.

c) Mi lehetett Janka első négy dobása? (A dobások sorrendjétől eltekintünk.)

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy r sugarú körcikk ívhossza i, a körcikk kerülete: $2r + i = 10$ cm.

a) Legyen a körcikk sugara 2 cm! Határozza meg a körcikk α középponti szögét, T területét, továbbá azon forgáskúp alapkörének R sugarát, amelynek ez a körcikk a palástja!

b) Igazolja, hogy a 10 cm kerületű körcikkek közül annak maximális a területe, amelynek a középponti szöge 2 radián nagyságú!

c) Döntse el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
Egy 10 cm kerületű körcikk területe mindig kisebb, mint egy 20 cm kerületű körcikk területe.

a)	5 pont	
b)	8 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy dobozban 4 piros és 3 zöld golyó van. A dobozba beteszünk még s darab sárga golyót. A golyók közül **visszatevéssel** kihúzunk kettőt.

a) Határozza meg s értékét, ha 0,09 annak a valószínűsége, hogy mindkét kihúzott golyó zöld!

Egy dobozban 4 piros, 3 zöld és k darab kék golyó van ($k \geq 1$). A golyók közül **visszatevés nélkül** kihúzunk hármat.

b) Igazolja, hogy annak a valószínűsége, hogy három különböző színű golyót húzunk, $\frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$.

c) Határozza meg k értékét, ha annak a valószínűsége, hogy három különböző színű golyót húzunk, megegyezik annak a valószínűségével, hogy mindhárom kihúzott golyó kék!

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

8. A Balaton vízfelületének hossza kb. 76,5 km, átlagos szélessége kb. 7,7 km.

a) Számítsa ki a Balaton átlagos vízmélységét, ha a tóban levő vízmennyiség becsült térfogata 2 milliárd m^3! Válaszát méterben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Ádám és Misi szeretnék kerékpárral egy nap alatt megkerülni a Balatont. A tó körüli kerékpárút hossza 205 km. Reggel 7-kor indulnak. Mikor ebédszünetet tartanak, megállapítják, hogy átlagsebességük az ebédszünetig 16 km/h volt. A 60 perces ebédszünet után továbbindulnak. Hogy még sötétedés előtt célba érjenek, átlagsebességüket 20 km/h-ra növelik a hátralevő úton. Így valóban visszaérnek a kiindulási pontjukra este fél 8-ra.

b) Mikor tartottak a fiúk ebédszünetet?

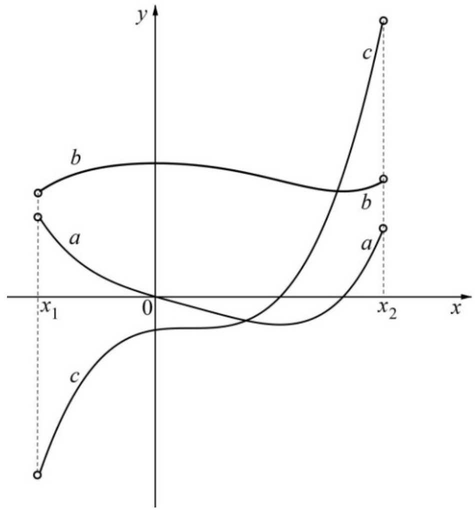
A tó szélessége Balatonvilágos és Balatonalmádi között a legnagyobb, kb. 12,7 km.

c) Legalább hány méterrel kell a vízfelszín fölé emelkednie a balatonvilágosi kikötőben elhelyezett jelzőoszlopnak ahhoz, hogy az oszlop tetején rögzített viharjelző készülék fényjelzése – a Föld görbületét is figyelembe véve – látható legyen a balatonalmádi strandon fürdőzők számára is? (A Földet tekintsük egy 6370 kilométer sugarú gömbnek.)

a)	3 pont	
b)	6 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Az ábrán az $]x_1; x_2[$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény grafikonja, valamint az f első deriváltfüggvényének és az f második deriváltfüggvényének grafikonja látható. A három függvény grafikonját valamilyen sorrendben az a, b, c betűkkel jelöltük.
Az alábbi táblázat **A** jelű állítása szerint az ábrán a jelöli az f függvényt, b jelöli az f első deriváltfüggvényét (f'), és c jelöli az f második deriváltfüggvényét (f'').
Ehhez hasonlóan felsoroltuk az összes többi lehetséges megfeleltetést is.



a) Állapítsa meg a **B**, **C**, **D**, **E**, **F** állítások logikai értékét! Válaszait **itt** nem kell indokolnia. (Az **A** állítás *hamis*, ezt már megadtuk.)

	f	f'	f''	az állítás igaz/hamis
A	a	b	c	hamis
B	a	c	b	
C	b	a	c	
D	b	c	a	
E	c	a	b	
F	c	b	a	

b) A függvény és deriváltfüggvényei közötti kapcsolatokra alapozva indokolja meg, miért hamis az **A** állítás!

Adottak a derékszögű koordináta-rendszerben az A, B, C, D pontok: $A(0; 4)$, $B(0; 1)$, $C(p; 1)$, $D(p; 4)$, ahol $p > 0$. Az $y = \frac{x^2}{4}$ egyenletű görbe felezi az $ABCD$ téglalap területét.

c) Igazolja, hogy $p > 4$, majd számítsa ki p értékét!

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">a feladat sorszáma</td><td colspan="4">pontszám</td></tr>
<tr><td>maximális</td><td>elért</td><td>maximális</td><td>elért</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I. rész</td><td>1.</td><td>13</td><td></td><td rowspan="4">51</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>13</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II. rész</td><td></td><td>16</td><td></td><td rowspan="4">64</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">← nem választott feladat</td></tr>
<tr><td colspan="4">Az írásbeli vizsgarész pontszáma</td><td>115</td><td></td></tr>
</table>

dátum

javító tanár

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">pontszáma egész számra kerekítve</td></tr>
<tr><td>elért</td><td>programba beírt</td></tr>
<tr><td>I. rész</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II. rész</td><td></td><td></td></tr>
</table>

dátum

dátum

javító tanár

jegyző