ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2019. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
$4\cdot 2^{2x}+31\cdot 2^{x}-8=0$	1 pont	
A kapott egyenlet másodfokú 2^x-ben.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$2^x=-8$ vagy $2^x=\frac{1}{4}$	1 pont	
Az első eset nem lehetséges (mert $2^x>0$ minden valós x esetén).	1 pont	
A második esetből (pl. a szigorú monotonitás miatt) $x=-2$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

1. b)		
$\sin x(4\sin^2 x-1)=0$	1 pont	
$\sin x=0$ vagy $\sin^2 x=\frac{1}{4}$	1 pont	
Ha $\sin x=0$, akkor $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.	1 pont	
Ha $\sin^2 x=\frac{1}{4}$, akkor $\sin x=\frac{1}{2}$ vagy $\sin x=-\frac{1}{2}$.	1 pont	$\lvert\sin x\rvert=\frac{1}{2}$,
Az első esetben $x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi$,	1 pont	*tehát* $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$,
a második esetben $x=\frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi$ vagy $x=\frac{11\pi}{6}+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.	1 pont	*vagy* $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó periódussal adja meg az egyenlet megoldásait, de a $k\in\mathbf{Z}$ feltételt nem említi, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

2. Ha a vizsgázó periódus nélkül adja meg az egyenlet megoldásait, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat.

3. Ha a vizsgázó fokokban adja meg az egyenlet megoldásait, akkor legfeljebb 6 pontot kaphat.

4. Ha a vizsgázó periódus nélkül, fokokban adja meg az egyenlet megoldásait, akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.

2. a)		
Jelölje n a települések számát ($n \geq 2$). Az n csúcsú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$,	1 pont	
az n csúcsú fagráf éleinek száma $n - 1$.	1 pont	
A felírható egyenlet $\frac{1}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n-1$.	1 pont	$n^2 - 7n + 6 = 0$,
A szöveg alapján $n - 1 \neq 0$, ezzel osztunk,	1 pont	*ennek gyökei a 6 és az 1, de a szöveg miatt $n \neq 1$,*
így a települések száma $n = 6$.	1 pont	
Ellenőrzés: A 6 pontú teljes gráfnak 15 éle van, a 6 pontú fagráfnak pedig 5. Tehát valóban a 15 él kétharmadát kellett törölni.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

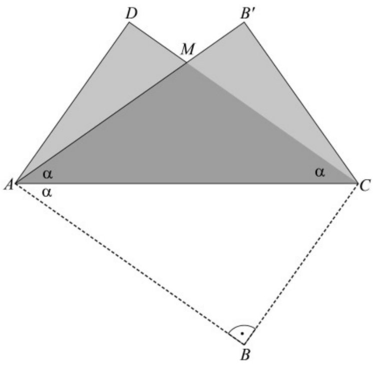
2. b) első megoldás		
Összesen $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ mérkőzést játszottak le.	1 pont	
(Minden döntetlen 2 ponttal, minden eldőlt mérkőzés 3 ponttal növeli a csapatok pontszámainak összegét.) Ha x számú mérkőzés végződött döntetlenre, akkor $45 - x$ mérkőzés ért véget valamelyik csapat győzelmével. A feladat szövege szerint: $x \cdot 2 + (45 - x) \cdot 3 = 130$.	2 pont	*döntetlenek: x db* *eldőlt mérkőzések: y db* $x + y = 45$ *és* $2x + 3y = 130$
Ebből $x = 5$ (tehát ennyi a döntetlenre végződött mérkőzések száma).	1 pont	*Az egyenletrendszer megoldása:* $(x; y) = (5; 40)$.
Ellenőrzés: Az 5 döntetlennel végződött mérkőzésen összesen $(5 \cdot 2 =)$ 10 pontot, a 40 eldőlt mérkőzésen összesen $(40 \cdot 3 =)$ 120 pontot szereztek a csapatok, ezért a pontszámaik összege valóban 130 lett.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

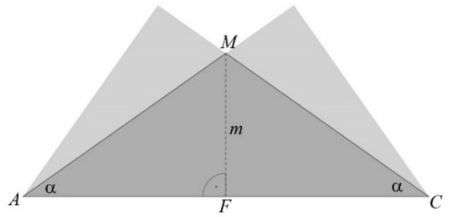
2. b) második megoldás		
Összesen $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ mérkőzést játszottak le.	1 pont	
(Minden döntetlen 2 ponttal, minden eldőlt mérkőzés 3 ponttal növeli a csapatok pontszámainak összegét.) Ha mindegyik mérkőzés valamelyik csapat győzelmével végződött volna, akkor a csapatok pontszámainak összege $45 \cdot 3 = 135$ pont lett volna.	2 pont	
Mivel döntetlen esetén mérkőzésenként 1 ponttal kevesebb a csapatok pontszámainak összege,	1 pont	
így $(135 - 130 =)$ 5 mérkőzés végződött döntetlennel.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. a)		
A megadott tulajdonságú hétjegyű számok száma $7! = 5040$.	1 pont	
Ha mindegyiket egy 0,5 cm × 2 cm-es téglalap alakú papírdarabra írjuk fel, akkor az összes felhasznált papírlap területe $5040 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 5040$ (cm^2).	1 pont	
Nyolc darab A4-es papírlap területe $8 \cdot 21 \cdot 29{,}7 = 4989{,}6$ (cm^2),	1 pont	
tehát ennyi papírlap nem lesz elegendő.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó egy A4*-es lap valamilyen konkrét* 0,5 cm × 2 cm*-es téglalapokra osztásának segítségével állítja, hogy a 8 lap nem elegendő, de azt nem igazolja, hogy ennél több kis téglalapra egy* A4*-es lap nem osztható fel, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.*

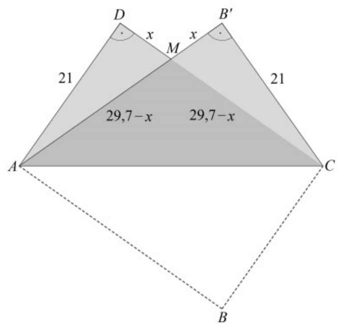
3. b)		
$6! = 720$ darab olyan szám van a megadott tulajdonságú hétjegyű számok között, amelynek első számjegye az 1.	1 pont	*Mivel hét számjegy van (és egyik sem* 0*), ezért a leírt számok hetede, azaz* $7!:7 = 720$ *kezdődik* 1*-gyel.*
$721 = 6! + 1$,	1 pont	
ezért (a nagyság szerinti rendezés miatt) a keresett szám a 2-vel kezdődő számok közül a legkisebb.	1 pont	
Tehát valóban a 2 134 567 áll a 721. helyen.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

3. c) első megoldás		
 Az ábra jelöléseit használjuk. Az α-val jelölt (*BAC*, *B'AC* és *DCA*) szögek egyenlők, ezért az *AMC* háromszög egyenlő szárú.	1 pont	
Az *ABC* derékszögű háromszögben (a Pitagorasz-tétel miatt) $AC = \sqrt{29{,}7^2 + 21^2} \approx 36{,}4$ (cm),	1 pont	
továbbá $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{21}{29{,}7}$ $(\alpha \approx 35{,}3°)$.	1 pont*	

 Az AMC háromszög AC alapjához tartozó magassága: $m = \frac{AC}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ($\approx 12{,}9$ cm),	1 pont*	
tehát a kétszeresen fedett terület: $\frac{AC \cdot m}{2} \left(= \frac{AC^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right) \approx 234\ \text{cm}^2$.	1 pont*	*Kerekített értékekkel számolva kb. 235 cm^2 adódik területként.*
Összesen:	**5 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{29{,}7}$,	1 pont	
amiből $\alpha \approx 35{,}26°$ és $180° - 2\alpha \approx 109{,}5°$,	1 pont	
tehát a kétszeresen fedett terület: $T_{AMC} = \frac{AC^2 \sin^2 \alpha}{2 \sin(180° - 2\alpha)} \approx 234\ \text{cm}^2$.	1 pont	

3. c) második megoldás		
 Az ábra jelöléseit használjuk. Legyen $DM = x$, ekkor (a tengelyes szimmetria miatt) $AM = MC = 29{,}7 - x$.	1 pont	
Az AMD derékszögű háromszögben (a Pitagorasz-tételből) $21^2 + x^2 = (29{,}7 - x)^2$.	1 pont	
$441 = 882{,}09 - 59{,}4x$ $x \approx 7{,}426$ (cm),	1 pont	
$T_{AMD} = \frac{21 \cdot 7{,}426}{2} \approx 77{,}97$ (cm^2)	1 pont	
(A kétszeresen fedett rész területét megkapjuk, ha az ACD derékszögű háromszög területéből levonjuk az AMD háromszög területét:) $T_{ACM} = \frac{29{,}7 \cdot 21}{2} - T_{AMD} \approx 234\ \text{cm}^2$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

4. a) **első megoldás**		
Az AB szakasz egyenesének egy irányvektora $\mathbf{v}(10;\ 5)$, egy normálvektora $\mathbf{n}(1;\ –2)$.	1 pont	*AC egyenesének egyenlete: $53x-96y=1200$, BC egyenesének egyenlete: $43x-76y=1000$.*
Az AB egyenesének egyenlete $x-2y=25$.	1 pont	
(A C pont koordinátáit az egyenletbe helyettesítve:) $48-2\cdot 14\neq 25$, ezért a három pont nem illeszkedik egy egyenesre.	2 pont	*AC egyenesén nincs rajta B pont, mert $1250\neq 1200$, BC egyenesén nincs rajta A pont, mert $950\neq 1000$.*
Összesen:	**4 pont**	

4. a) **második megoldás**		
$\overrightarrow{AB}=(10;\ 5)$ és $\overrightarrow{BC}=(38;\ 21{,}5)$	1 pont	$\overrightarrow{AC}=(48;\ 26{,}5)$
(Egymás után csatlakozó két vektor kezdő- és végpontjai pontosan akkor illeszkednek egy egyenesre, ha a vektorok párhuzamosak, azaz első és második koordinátáik aránya megegyezik.) Az $\overrightarrow{AB}$ koordinátáinak aránya $2:1$, a $\overrightarrow{BC}$ koordinátáinak aránya pedig nem ennyi.	2 pont*	
A két vektor nem párhuzamos, ezért a három pont nem illeszkedik egy egyenesre.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 2 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó. (Közös kezdőpontból indított két vektor esetén a kezdőpont és a két végpont pontosan akkor illeszkednek egy egyenesre, ha a két vektor párhuzamos, azaz első és második koordinátáik aránya megegyezik.) Az $\overrightarrow{AB}$ koordinátáinak aránya $2:1$, az $\overrightarrow{AC}$ koordinátáinak aránya pedig nem ennyi.*

4. a) **harmadik megoldás**		
$AB=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}$ $(\approx 11{,}180)$ $AC=\sqrt{2304+702{,}25}=\sqrt{3006{,}25}$ $(\approx 54{,}829)$ $BC=\sqrt{1444+462{,}25}=\sqrt{1906{,}25}$ $(\approx 43{,}661)$	2 pont	
Mivel $AB+BC>AC$, ezért létezik az ABC háromszög. Az A, B, C pontok tehát nincsenek egy egyenesen.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

4. a) negyedik megoldás		
$\overrightarrow{BA}=(-10;-5)$ és $\overrightarrow{BC}=(38;21{,}5)$	1 pont	
$BA=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}$ $(\approx 11{,}180)$ $BC=\sqrt{1444+462{,}25}=\sqrt{1906{,}25}$ $(\approx 43{,}661)$	1 pont	
$\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen kiszámítva: $(-10)\cdot 38+(-5)\cdot 21{,}5=\sqrt{125}\cdot\sqrt{1906{,}25}\cdot\cos(ABC\angle)$,	1 pont	
ahonnan $ABC\angle\approx 177{,}1°$. Az A, B, C pontok tehát nincsenek egy egyenesen.	1 pont	$BAC\angle\approx 2{,}3°$ $ACB\angle\approx 0{,}6°$
Összesen:	**4 pont**	

4. b)		
(Az A és B pontoktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkon az AB szakasz felezőmerőlegese.) Az AB szakasz felezőpontja $F(5;-10)$; a felezőmerőleges egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(2;1)$,	1 pont	
egyenlete $2x+y=0$.	1 pont	
(A C-től 1000 méter, tehát 50 egység távolságra levő pontok halmaza a síkon egy C középpontú, 50 egység sugarú kör.) A kör egyenlete: $(x-48)^2+(y-14)^2=50^2$.	1 pont	
(A felezőmerőleges és a kör metszéspontjai adják meg D lehetséges helyzeteit, tehát) megoldandó a $\left.\begin{array}{r}-2x=y\\(x-48)^2+(y-14)^2=50^2\end{array}\right\}$ egyenletrendszer.	1 pont	
Az első egyenletből y-t beírva a másodikba: $(x-48)^2+(-2x-14)^2=50^2$,	1 pont	$\left(-\frac{y}{2}-48\right)^2+(y-14)^2=50^2$
amiből a műveletek elvégzése után $5x^2-40x=0$ adódik.	1 pont	$\frac{5}{4}y^2+20y=0$
Innen $x_1=0$ és $x_2=8$,	1 pont	
majd $y_1=0$, illetve $y_2=-16$ adódik (a D pont lehetséges pozíciói tehát $(0;0)$ és $(8;-16)$).	1 pont	
Az AD távolság (méterben mért) lehetséges értékei $20\cdot 12{,}5=250$ vagy $20\cdot\sqrt{(0-8)^2+((-12{,}5)-(-16))^2}$ $(\approx 20\cdot 8{,}73)\approx 175$.	2 pont	*Ha a vizsgázó nem a valódi távolságokat adja meg, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.*
Összesen:	**10 pont**	

II.

5. a) első megoldás		
Az első dobás eredményét (a sorozat első tagját) a-val, a második dobás eredményét (a sorozat differenciáját) d-vel jelölve a sorozat első 10 tagjának összege $S_{10} = \frac{(2a+9d)\cdot 10}{2} = 10a + 45d$.	2 pont	
Innen $10a + 45d < 100$, azaz $2a + 9d < 20$ (ahol $a, d \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$).	1 pont	
Ha $d \geq 2$, akkor az egyenlőtlenségnek nincs gyöke.	1 pont	
Ha $d = 1$, akkor $a \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ esetén teljesül az egyenlőtlenség, tehát öt, a feltételeknek megfelelő sorozat van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. a) második megoldás		
Ha a második dobás 1, és az első dobás 1, 2, 3, 4 vagy 5, akkor a tíz tag összege rendre 55, 65, 75, 85, illetve 95. Ezek mind megfelelnek.	2 pont	
Ha a második dobás 1, és az első dobás 6, akkor a tíz tag összege 105, ez tehát nem felel meg.	1 pont	
Ha a második dobás legalább 2, akkor a tíz tag összege legalább $1 + 3 + 5 + \ldots + 19 = 100$, tehát ezek az esetek nem felelnek meg.	1 pont	
Összesen öt, a feltételeknek megfelelő sorozat van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b)		
Ha a négy számjegy egyforma, akkor számtani sorozatot kapunk. Ez 9 lehetőség.	1 pont	
Számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk, ha a négy számjegy (valamilyen sorrendben): 1, 2, 3, 4; 4, 5, 6, 7; 2, 3, 4, 5; 5, 6, 7, 8; 3, 4, 5, 6; 6, 7, 8, 9;	1 pont	
1, 3, 5, 7; 2, 4, 6, 8; 3, 5, 7, 9. (A sorozat differenciájának abszolútértéke nem lehet 2-nél nagyobb.)	1 pont	
Négy különböző számjegy $4! = 24$ négyjegyű számot határoz meg, ezért a fenti 9 esetben ez összesen $(9 \cdot 24 =)$ 216 különböző négyjegyű számot jelent.	1 pont	
Összesen $9 + 216 = 225$, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. c) első megoldás		
Ha Janka ötödik dobása 3 lenne, és ezután 3 lenne az átlag, akkor az öt dobás összege 15 lenne. Az első négy dobás összege tehát 12.	1 pont	
Ha az ötödik dobás 5 lenne, és ezután az 5 lenne az egyetlen módusz, akkor már az első négy dobás közt is volt legalább egy 5-ös.	1 pont	
Ekkor (mivel a másik három dobás összege 7) az első négy dobás valamilyen sorrendben csak 1, 1, 5, 5 vagy 1, 2, 4, 5 vagy 1, 3, 3, 5 vagy 2, 2, 3, 5 lehetett.	1 pont	
Ha az ötödik dobás 4 lenne, és ezután 4 lenne a medián, akkor az előbb felsorolt négy lehetőség közül az 1, 3, 3, 5, illetve a 2, 2, 3, 5 nem felelne meg ennek a követelménynek.	1 pont	*Az utolsó két lehetőség nem felel meg, mert akkor nem lehetne az 5 az öt dobás egyetlen módusza.*
A megmaradt két lehetőség megfelel a móduszra vonatkozó feltételnek is.	1 pont	*A megmaradt két lehetőség megfelel a mediánra vonatkozó feltételnek is.*
Tehát az első négy dobás (valamilyen sorrendben) 1, 1, 5, 5 vagy 1, 2, 4, 5 volt.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. c) második megoldás		
Ha Janka ötödik dobása 3 lenne, és ezután 3 lenne az átlag, akkor az öt dobás összege 15 lenne. Az első négy dobás összege tehát 12.	1 pont	
Legyen az első 4 dobás nem csökkenő sorrendben felsorolva a, b, c, d. A mediánra vonatkozó feltétel miatt ($c \leq 3$ nem felel meg, így) c értéke csak 4 vagy 5 lehet ($c = d = 6$ esetén $a + b = 0$ kellene, ami lehetetlen),	1 pont	
ezért a móduszra vonatkozó feltétel miatt $d = 5$ lehet csak ($d = 6$ esetén $c = 5$ és $a + b = 1$ kellene, ami lehetetlen).	1 pont	
Ha $c = 4$, akkor ($a + b + c = 7$ miatt) $a = 1$, $b = 2$, tehát az első négy dobás (valamilyen sorrendben) 1, 2, 4, 5 lehetett.	1 pont	
Ha $c = 5$, akkor ($a + b + c = 7$ miatt) $a = 1$, $b = 1$, tehát az első négy dobás (valamilyen sorrendben) 1, 1, 5, 5 lehetett.	1 pont	
Mindkét lehetőség megfelel a mediánra és a móduszra vonatkozó feltételnek is.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
Ha Janka ötödik dobása 3 lenne, és ezután 3 lenne az átlag, akkor az öt dobás összege 15 lenne. Az első négy dobás összege tehát 12.	1 pont	
Ha az első négy dobás összege 12, akkor az első négy dobás (nem csökkenő sorrendben felsorolva) a következő lehetett: 1, 1, 4, 6; 2, 2, 2, 6; 1, 1, 5, 5; 2, 2, 3, 5; 1, 2, 3, 6; 2, 2, 4, 4; 1, 2, 4, 5; 2, 3, 3, 4; 1, 3, 3, 5; 3, 3, 3, 3. 1, 3, 4, 4;	2 pont	
A mediánra vonatkozó feltétel miatt nem lehetséges az 1, 2, 3, 6, az 1, 3, 3, 5, a 2, 2, 2, 6, a 2, 2, 3, 5, a 2, 3, 3, 4, valamint a 3, 3, 3, 3 eset.	1 pont	*A móduszra vonatkozó feltétel miatt nem lehet az* 1, 1, 4, 6, *az* 1, 2, 3, 6, *az* 1, 3, 3, 5, *az* 1, 3, 4, 4, *a* 2, 2, 2, 6, *a* 2, 2, 3, 5, *a* 2, 2, 4, 4, *a* 2, 3, 3, 4, *valamint* a 3, 3, 3, 3 *eset.*
A móduszra vonatkozó feltétel miatt a (megmaradt öt eset közül) nem lehetséges az 1, 1, 4, 6, az 1, 3, 4, 4 és a 2, 2, 4, 4 eset.	1 pont	*A mediánra vonatkozó feltételnek a megmaradt két eset megfelel.*
Tehát az első négy dobás (valamilyen sorrendben) 1, 1, 5, 5 vagy 1, 2, 4, 5 volt.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó indoklás nélkül megad egy, illetve két lehetséges megoldást, akkor 1, illetve 2 pontot kapjon.

6. a)		
$i = r\alpha$, azaz $\alpha = \frac{i}{r}$ (radián).	1 pont	$i = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r\pi$, *azaz* $\alpha = \frac{180° i}{r\pi}$.
Mivel $r = 2$ cm, és így $i = (10 - 2 \cdot 2 =)$ 6 cm, ezért $\alpha = \frac{6}{2} = 3$ radián.	2 pont	$\alpha \approx 171{,}9°$
A körcikk területe: $T = \frac{ir}{2} = 6\ \text{cm}^2$.	1 pont	$T = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot \alpha \approx 6\ \text{cm}^2$
A kúp alapkörének sugara: $R = \frac{i}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \approx 0{,}95$ cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó helyesen számol, de a válaszaiban nem, vagy nem mindenhol tünteti fel a mértékegységeket, akkor ezért összesen 1 pontot veszítsen.

6. b) első megoldás		
(Jelölje T a körcikk területét.) Mivel $T = \frac{ir}{2}$ és $i = 10 - 2r$,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért $T = \frac{(10 - 2r)r}{2} = 5r - r^2$.	1 pont	
$T(r) = -(r - 2{,}5)^2 + 6{,}25\ \ (0 < r < 5)$	2 pont*	*A T grafikonja egy olyan parabolának egy íve, amely az origóban, illetve az* (5; 0) *pontban metszi az x tengelyt.*
Mivel az első tag nem pozitív, ezért $T(r) \le 6{,}25$.	1 pont*	*A parabola „lefelé nyíló” (mert a főegyüttható negatív),*
A legnagyobb értékét $T(r)$ akkor veszi fel, ha $(r - 2{,}5)^2 = 0$, vagyis $r = 2{,}5$ (ami eleme az értelmezési tartománynak).	1 pont*	*ezért T maximumhelye a két zérushely számtani közepe:* 2,5.
Ha $r = 2{,}5$ cm, akkor $i = 5$ cm, vagyis $i = 2r$,	1 pont	
ezért ekkor valóban $\alpha = 2$ radián.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzések:

1. A megoldás első két pontját az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

Ha a középponti szög α fok, akkor $i=\frac{\alpha}{180}\cdot r\pi$, így $10=\frac{\alpha}{180}\cdot r\pi+2r$, amiből $\alpha=180\cdot\frac{10-2r}{r\pi}$.	1 pont	*Ha a középponti szög* α *radián, akkor* $i=r\alpha$, *így* $10=r\alpha+2r$, *amiből* $\alpha=\frac{10-2r}{r}$.
$T=\frac{\alpha}{360}\cdot r^2\pi=\frac{10-2r}{2r\pi}\cdot r^2\pi=5r-r^2$	1 pont	$T=\frac{\alpha r^2}{2}=\frac{(10-2r)r^2}{2r}=$ $=5r-r^2$

*2. A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

A $T(r)=5r-r^2$ $(0<r<5)$ függvény deriváltfüggvénye: $T'(r)=5-2r$ $(0<r<5)$.	1 pont	
A T függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltfüggvényének zérushelye van: $5-2r=0$,	1 pont	
$r=2{,}5$ (és ez eleme az értelmezési tartományának).	1 pont	
$T'(r)$ az $r<2{,}5$ esetben pozitív, az $r>2{,}5$ esetben pedig negatív, ezért a T-nek a 2,5 (lokális és egyben abszolút) maximumhelye.	1 pont	$T''(r)=-2<0$ *a teljes értelmezési tartományon, tehát a T-nek a 2,5 (abszolút) maximumhelye.*

*3. A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

Az $x\mapsto ax^2+bx+c$ $(a<0,\ x\in\mathbf{R})$ másodfokú függvény maximumhelye $-\frac{b}{2a}$,	2 pont	
ezért az $r\mapsto 5r-r^2$ $(r\in\mathbf{R})$ másodfokú függvény maximumhelye: $-\frac{5}{-2}=2{,}5$.	1 pont	
(A 2,5 a T függvény értelmezési tartományának is eleme, ezért) az $r=2{,}5$ a T-nek is maximumhelye.	1 pont	

4. Ha a vizsgázó a válaszában („bizonyításában”) kerekítéssel kapott értékre is hivatkozik, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.

6. b) második megoldás		
(Jelölje T a körcikk területét.) Ha a körcikk középponti szöge 2 radián, akkor $i = 2r$, így ($i = 10 - 2r$ miatt) $i = 5$ cm és $r = 2,5$ cm, tehát $T = 6,25$ cm^2.	2 pont	
Megmutatjuk, hogy ha a körcikk középponti szöge nem 2 radián (tehát $r \neq 2,5$), akkor a körcikk területe kisebb, mint 6,25 cm^2.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$T = \dfrac{(10-2r)r}{2} = 5r - r^2$	1 pont	
Tekintsük az $5r - r^2 < 6,25$ $(0 < r < 5)$ egyenlőtlenséget.	1 pont	
$0 < r^2 - 5r + 6,25$ $0 < (r-2,5)^2$	1 pont	
Ha $r \neq 2,5$, akkor a jobb oldal biztosan pozitív, tehát az egyenlőtlenség teljesül.	1 pont	
Ezért valóban 2 radián nagyságú középponti szög esetén lesz a körcikk területe maximális.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. c)		
Az állítás hamis.	1 pont	
Helyes indoklás. (*Konkrét ellenpéldával:* Például ha $r_{10} = 3$ cm, $i_{10} = 4$ cm, akkor $T_{10} = 6$ cm^2. Legyen ekkor $r_{20} = 9,5$ cm, $i_{20} = 1$ cm, akkor $T_{20} = 4,75$ cm^2, tehát $T_{10} > T_{20}$. *Analitikus megközelítéssel:* Legyen adott egy tetszőleges, 10 cm kerületű körcikk. Ha ε tetszőlegesen kicsi pozitív szám, és a 20 cm kerületű körcikk sugara $r_{20} = 10 - \varepsilon$, akkor $i_{20} = 2\varepsilon$, és így a területe $T_{20} = (10 - \varepsilon)\varepsilon = 10\varepsilon - \varepsilon^2$. Ez tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet, így kisebb is lehet, mint a 10 cm kerületű körcikk területe. *Gyakorlatias szemlélettel:* Legyen adott egy tetszőleges, 10 cm kerületű körcikk. A 20 cm kerületű körcikk sugara „tetszőlegesen közel lehet” a 10 cm-hez, ezért az ívhossza, és így a körcikk területe is tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet; ez kisebb is lehet, mint a 10 cm kerületű körcikk területe.)	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7. a)		
Zöld golyó húzásának a valószínűsége: $\frac{3}{4+3+s}$ (mindkét húzás esetén).	1 pont	
$\left(\frac{3}{7+s}\right)^2 = 0,09$	1 pont	
$\frac{3}{7+s} = 0,3$ (mert $\frac{3}{7+s} > 0$),	1 pont	
innen $s = 3$ a sárga golyók száma.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7. b) első megoldás		
A $k + 7$ golyóból 3-at $\binom{k+7}{3}$-féleképpen húzhatunk ki (összes eset száma).	1 pont	
A piros golyót 4-, a zöldet 3-, a kéket k-féleképpen választhatjuk ki (egymástól függetlenül), így három különböző színű golyót $4 \cdot 3 \cdot k = 12k$-féleképpen húzhatunk (kedvező esetek száma).	2 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{12k}{\binom{k+7}{3}} =$	1 pont	
$= \frac{12k}{\frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. b) második megoldás		
Például sorban egy piros, egy zöld és egy kék golyó húzásának a valószínűsége: $\frac{4}{k+7} \cdot \frac{3}{k+6} \cdot \frac{k}{k+5}$.	1 pont	
A különböző színű golyókat más sorrendben is kihúzhatjuk. Ekkor a három tört nevezője nem változik, számlálója pedig valamilyen sorrendben 4, 3 és k lesz (a szorzatuk tehát állandó).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A három különböző színű golyónak 3!-féle húzási sorrendje lehetséges.	1 pont	
A kérdéses valószínűség: $3! \cdot \frac{4}{k+7} \cdot \frac{3}{k+6} \cdot \frac{k}{k+5} =$	1 pont	
$= \frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. b) harmadik megoldás		
(Ha a golyókat megkülönböztetjük, akkor) az összes (egyenlően valószínű) elemi esemény száma $(k+7)(k+6)(k+5)$.	1 pont	
Egy-egy piros, zöld, illetve kék golyót valamilyen sorrendben $4\cdot 3\cdot k\cdot 3!$ különböző módon húzhatunk (ez a kedvező elemi események száma).	2 pont	
A kérdéses valószínűség: $\frac{4\cdot 3\cdot k\cdot 3!}{(k+7)(k+6)(k+5)}=$	1 pont	
$=\frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$ valóban.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

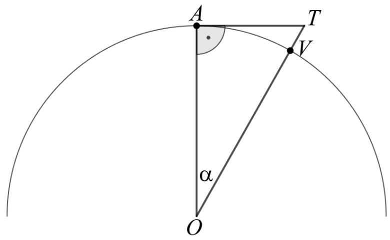
7. c)		
(A szöveg alapján $k\geq 3$. k darab kék golyó közül hármat $\binom{k}{3}$-féleképpen húzhatunk ki, és összesen $\binom{k+7}{3}$-féle húzás lehetséges.) Három kék golyó húzásának a valószínűsége tehát $\frac{\binom{k}{3}}{\binom{k+7}{3}}$.	2 pont*	
A feltétel alapján $\frac{\binom{k}{3}}{\binom{k+7}{3}}=\frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$.	1 pont*	$\frac{\binom{k}{3}}{\binom{k+7}{3}}=\frac{12k}{\binom{k+7}{3}}$
$\frac{\frac{k(k-1)(k-2)}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$	1 pont*	$\frac{k(k-1)(k-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=12k$
Egyszerűsítés után $(k-1)(k-2)=72$ (mert $k\neq 0$).	1 pont	
A $k^2-3k-70=0$ egyenlet egyik gyöke negatív (-7),	1 pont	
a másik gyöke pedig a megoldás, vagyis $k=10$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal jelölt 4 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

(A szöveg alapján $k \geq 3$. Elsőre $\frac{k}{k+7}$, másodikra $\frac{k-1}{k+6}$, harmadikra pedig $\frac{k-2}{k+5}$ a kék golyó húzásának valószínűsége.) Három kék golyó húzásának valószínűsége tehát (ezek szorzata, azaz) $\frac{k}{k+7}\cdot\frac{k-1}{k+6}\cdot\frac{k-2}{k+5}$.	2 pont	
A feltétel alapján $\frac{k}{k+7}\cdot\frac{k-1}{k+6}\cdot\frac{k-2}{k+5}=\frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}$.	1 pont	
$k(k-1)(k-2) = 72k$	1 pont	

8. a)		
Jelölje h a Balaton átlagos vízmélységét. Méterben számolva $2\cdot10^9 = 76,5\cdot10^3\cdot7,7\cdot10^3\cdot h$,	1 pont	
innen $h=\frac{2\cdot10^9}{76,5\cdot10^3\cdot7,7\cdot10^3}$.	1 pont	
A kért kerekítéssel $h \approx 3,4$ méter.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**3 pont**	

8. b)		
Az ebédszünet nélkül összesen 11,5 óráig voltak úton a kerékpárosok. Ha t jelöli (órában mérve) az ebédszünetig eltelt időt, akkor az ebédszünet után $11,5 - t$ órát kerékpároztak.	1 pont	
Ebédszünet előtt $16t$ kilométert, ebédszünet után $20(11,5 - t)$ kilométert haladtak.	1 pont	
A teljes megtett útjuk $16t + 20\cdot(11,5 - t) = 205$,	1 pont	
innen $t = 6,25$ (óra).	1 pont	
$7 + 6,25 = 13,25$; az ebédszünetet negyed 2-től negyed 3-ig tartották.	1 pont	
Ellenőrzés: 7-től negyed 2-ig $16\cdot6,25 = 100$ km-t, negyed 3-tól fél 8-ig $20\cdot5,25 = 105$ km-t, összesen $100 + 105 = 205$ km-t kerékpároztak.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8. c)		
A Föld középpontján (*O*), Balatonalmádin (*A*) és Balatonvilágoson (*V*) átmenő sík a Föld egy gömbi főkörét határozza meg.	1 pont	*Ez a pont jár egy megfelelő ábráért is.*
 Az ábrán α jelöli az *AOV* körcikk *AV* ívéhez tartozó középponti szöget, *VT* szakasz a jelzőoszlopot. A jelzőfény Balatonalmádiban éppen látható, ha *TA* egyenese a körnek egy érintője, azaz $OAT\angle = 90°$.	1 pont	
Jelöljük a rövidebb *AV* körív hosszát *i*-vel. Ha *R* a Föld sugara, akkor $\frac{i}{2R\pi} = \frac{\alpha}{360°}$,	1 pont*	
innen $\alpha \left(= \frac{180° \cdot i}{R\pi} = \frac{180° \cdot 12{,}7}{6370 \cdot \pi} \right) \approx 0{,}114°$.	1 pont*	
Az *OAT* derékszögű háromszögben $OT = \frac{OA}{\cos\alpha} \approx 6370{,}013$ (km).	1 pont*	
A jelzőoszlop (legkisebb) vízfelszín feletti magassága $VT \approx 6370{,}013 - 6370$ (km),	1 pont	
azaz kb. 13 méter.	1 pont	*kb.* 12,7 *méter*
Összesen:	**7 pont**	

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó $\alpha \approx 0{,}11°$-kal vagy $\alpha \approx 0{,}1°$-kal számol, és így a jelzőoszlop magasságára kb. 12 *métert* (11,7 *métert*)*, illetve* 10 *métert* (9,7 *métert*) *kap, akkor emiatt összesen 1 pontot veszítsen.*

*2. A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó.*

A (kisebbik) *AV* körív és az *AT* szakasz hossza jó közelítéssel megegyezik (12,7 km), mert az *AV* körív a Föld főköréhez képest „nagyon kicsi” (mert nagyon kicsi az *AOV* körcikk α középponti szöge).	2 pont	*Az AT szakasz hossza (az adatokat pontos értékekként kezelve) körülbelül* 12,70002 *km, azaz kb.* 2 *cm-rel hosszabb, mint a* 12,7 *km hosszú AT ív.*
Az *OAT* derékszögű háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt: $OT = \sqrt{6370^2 + 12{,}7^2} \approx 6370{,}013$ (km).	1 pont	

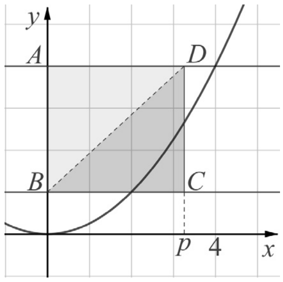
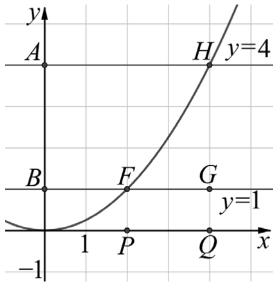
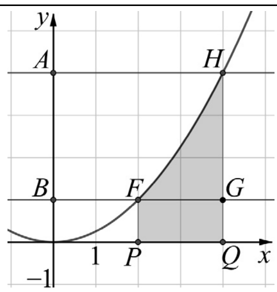
9. a)		
C igaz	1 pont	
B, **D**, **E**, **F** hamis	2 pont*	
Összesen:	**3 pont**	

*Megjegyzés: A *-gal megjelölt 2 pontból hibás válaszonként 1 pontot (de legfeljebb 2 pontot) veszítsen a vizsgázó.*

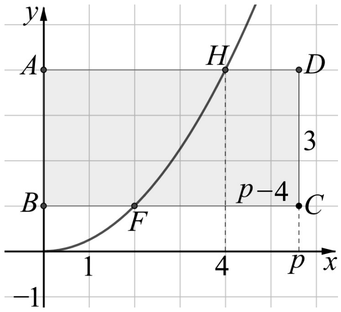
9. b) első megoldás		
Az $]x_1; 0[$ intervallumban az a függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért a deriváltfüggvényének itt negatívnak kell lennie. A b jelű függvény azonban az egész $]x_1; 0[$ intervallumon pozitív,	2 pont	
ezért nem lehet az a deriváltfüggvénye. Az **A** állítás tehát valóban hamis.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. b) második megoldás		
A $]0; x_2[$ intervallum egy pontjában a c-nek zérushelye van, és itt a c függvény előjelet vált. Az **A** állítás szerint tehát a b-nek itt lokális szélsőértéke van. Ez nem teljesül,	2 pont	
tehát a c függvény nem lehet a b deriváltfüggvénye. Ezért az **A** állítás valóban hamis.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. b) harmadik megoldás		
Az a függvény a teljes értelmezési tartományban konvex, ezért a második deriváltfüggvényének mindenütt pozitívnak kell lennie. A c függvény azonban nem ilyen,	2 pont	
ezért nem lehet az a második deriváltfüggvénye. Ezért az **A** állítás valóban hamis.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">9. c)</td></tr>
<tr><td>Az $y=\frac{x^2}{4}$ egyenletű parabola az $y = 4$ egyenletű egyenest $x = 4$-ben (és $x = –4$-ben), az $y = 1$ egyenletű egyenest $x = 2$-ben (és $x = –2$-ben) metszi.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$p \le 4$ esetén a parabola legfeljebb a BCD derékszögű háromszöget (a téglalap „felét”) vághatja ketté. Ezért csak a téglalap területének felénél kisebb részt vághat le a parabolaív a téglalapból.
Tehát $p > 4$ szükséges.

</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Legyen $F(2; 1)$, $G(4; 1)$ és $H(4; 4)$,
továbbá legyen
$P(2; 0)$ és $Q(4; 0)$.

</td><td>1 pont</td><td>Ez a pont jár a megfelelő ábráért.</td></tr>
<tr><td>A parabolaív alatti terület a [2; 4] intervallumon:
$T_p=\int_2^4 \frac{x^2}{4}\,dx=\left[\frac{x^3}{12}\right]_2^4=$

</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>$=\frac{64-8}{12}=\frac{14}{3}$,</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>a síkidomnak az $y = 1$ egyenletű egyenes feletti része pedig $T_1=\frac{14}{3}-2\cdot 1=\frac{8}{3}$ területű (T_p és az $FPQG$ téglalap területének különbségeként adódik).</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A HA, AB, BF szakaszok és a parabolaív által határolt síkrész területe:
$T_2=T_{ABGH}-T_1=4\cdot 3-\frac{8}{3}=\frac{28}{3}$.</td><td>1 pont*</td><td></td></tr>
<tr><td>Az egész $ABCD$ téglalap területe ennek a kétszerese:
$T_{ABCD}=\frac{56}{3}\ (=AB\cdot p)$,</td><td>1 pont*</td><td></td></tr>
<tr><td>így $p=\frac{T_{ABCD}}{AB}=\frac{\frac{56}{3}}{3}=\frac{56}{9}$.</td><td>1 pont*</td><td></td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>10 pont</td><td></td></tr>
</table>

*A *-gal jelölt pontokat az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:*

<table>
<tr><td>Az FC, CD, DH szakaszok és a parabolaív által határolt síkrész területe $\frac{8}{3}+3(p-4)$.

</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Az $ABCD$ téglalap területe ennek a kétszerese:
$\frac{16}{3}+6(p-4)=3p$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Ebből $p=\frac{56}{9}$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
</table>

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a $p \le 4$ eset vizsgálatával nem foglalkozik, hanem csak a kapott eredményből tekinti igazoltnak, hogy $p > 4$, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.